Capítulo 4

Series

4.1. Introducción

Definición 4.1 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

La sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ se conoce como la *serie infinita* asociada a, o generada por, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. La notación usual es

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{ó} \qquad \sum x_n.$$

Decimos que x_n es el *n-ésimo sumando* o *término* y S_n es la *n-ésima suma parcial* de $\sum x_n$. Si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge a $S \in \mathbb{R}$ decimos que $\sum x_n$ es una *serie convergente*. En caso contrario la serie es *divergente*. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ decimos que S es la *suma* de la serie $\sum x_n$ y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S.$$

Así, para las series convergentes, el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tiene un doble papel: representa la serie y también su suma. Es importante que el lector distinga claramente entre la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y entienda la relación entre ambas.

Observamos también que la suma de una serie convergente no se obtiene realizando una cantidad infinita de sumas sino como el límite de una sucesión.

En este capítulo consideraremos ocasionalmente series de la forma $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ donde $p \in \mathbb{Z}$, las cuales definimos como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ donde $y_n = x_{n+p-1}$.

Ejemplo 4.1
Sea $x_n = 1/n$. Las sumas parciales (S_n) correspondientes a esta sucesión son

$$S_1 = 1; \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}; \quad \ldots$$

En la figura 4.1 vemos, en la parte inferior, la gráfica de la sucesión x_n y en la parte superior, la de la sucesión de sumas parciales S_n. La primera sucesión es decreciente mientras que la segunda es creciente.

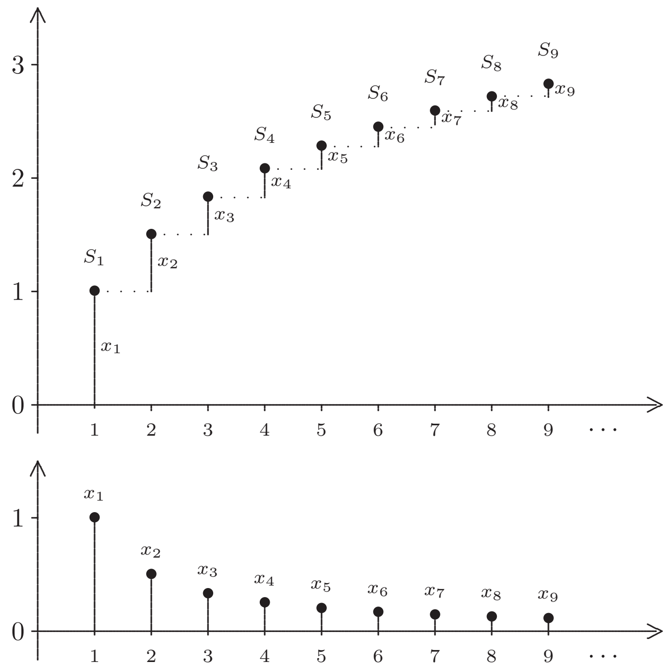

Figura 4.1: La sucesión $1/n$ y la serie asociada.

Está claro a partir de la definición que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ determina totalmente la serie $\sum x_n$ y sus propiedades. Lo contrario también es cierto, ya que la serie $\sum x_n$ es la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ de sumas parciales y $x_n = S_n - S_{n-1}$. Por lo tanto, todos los resultados que hemos estudiado para sucesiones tienen una versión para series. En particular, el Criterio de Cauchy para series es el siguiente:

Teorema 4.1 (Criterio de Cauchy) *La serie $\sum x_n$ es convergente si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right| < \epsilon$$

siempre que $n \geq m \geq N$.

Este resultado tiene varias consecuencias importantes. En primer lugar, si $\sum x_n$ converge entonces el teorema anterior con $m = n$ nos dice que para todo $n \geq N$ se tiene que $|x_n| < \epsilon$, es decir

Corolario 4.1 *Si* $\sum x_n$ *converge entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

La condición enunciada en el Corolario 4.1 es sólo necesaria, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2
Si $x_n = n^{-1/2}$ entonces $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ pero

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

y como $\sqrt{n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, $\sum x_n$ diverge a ∞.

Haciendo $n \to \infty$ con m fijo en el teorema 4.1 obtenemos

Corolario 4.2 *Si* $\sum x_n$ *converge, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m \geq N$ *entonces* $|\sum_{k=m}^{\infty} x_n| < \epsilon$.

Es decir, si $\sum x_n$ converge, $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} x_n = 0$.

Observación 4.1 Si se cambia un número finito de sumandos de una serie no se altera su convergencia o divergencia, pero puede variar el valor de su suma. En contraste, el cambio de un número finito de términos de una sucesión no altera su convergencia o divergencia, ni se altera el límite al cual converge, en caso de que sea convergente. La diferencia se debe a que el m-ésimo sumando de la serie $\sum x_n$ aparece en la k-ésima suma parcial $\sum_{j=1}^{k} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ si $k \geq m$ y en consecuencia, el cambio en el valor de un sumando de la serie altera el valor de todos los términos de la sucesión de sumas parciales, excepto por una cantidad finita de ellos.

Ejemplo 4.3
Consideremos de nuevo el ejemplo de la sucesión $x_n = 1/n$ y supongamos que cambiamos los dos primeros términos de la sucesión: en lugar de 1 y $0,5$ ponemos 0 en ambos casos (Ver figura 4.2). En el caso de la sucesión x_n cambian los valores de estos dos términos pero el resto de la sucesión permanece igual, mientras que en el caso de la serie, el valor de todas las sumas parciales ha sido alterado: en lugar de $1;\ 1,5;\ 1,83;\ 2,08;\ 2,28;\dots$ tenemos ahora $0;\ 0;\ 0,33;\ 0,58;\ 0,78;\ \dots$. Como veremos más adelante, ambas series son divergentes, pero las sucesiones de sumas parciales son distintas.

Corolario 4.3 *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son series de términos reales y* $x_n = y_n$ *para todo* n *suficientemente grande, entonces o ambas series convergen o ambas divergen.*

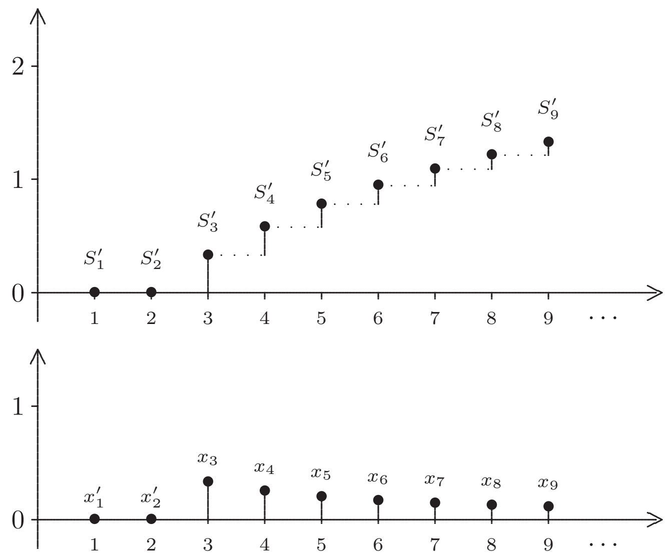

Figura 4.2: La sucesión $1/n$ y la serie asociada con los dos primeros términos cambiados.

Demostración. Para algún $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $n > N$ implica que $x_n = y_n$. Por lo tanto para $n \geq m > N$ se tiene

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{n} y_k$$

y por el criterio de Cauchy ambas series convergen o ambas divergen. ■

Observación 4.2 El resultado anterior no dice que si ambas series convergen, lo hacen al mismo límite. En general, si ambas series convergen lo hacen a límites distintos por la razones que expusimos en la observación anterior.

Usando los teoremas que hemos visto para sucesiones obtenemos el siguiente resultado para series.

Teorema 4.2 *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son series convergentes de términos reales y* $c \in \mathbb{R}$ *entonces*

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

En particular, las dos series de la izquierda convergen.

Demostración. Usando la definición de serie, esto es consecuencia del Teorema 3.4. ■

Teorema 4.3 (Serie Geométrica) *Sean $a, x \in \mathbb{R}$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ converge y su suma es $a/(1+x)$ si $|x| < 1$. Si $a \neq 0$ y $|x| \geq 1$ esta serie diverge.*

Demostración. La fórmula para progresiones geométricas nos dice que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ax^k = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Aplicando los resultados estudiados para sucesiones, si $|x| < 1$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-x}.$$

Si $a \neq 0$ y $|x| \geq 1$ entonces $|ax^n| \geq |a| > 0$ para todo n y el Corolario 4.1 muestra que la serie no puede converger.

■

Definición 4.2 Una serie $\sum x_n$ de términos reales *converge absolutamente* (o es *absolutamente convergente*) si $\sum |x_n|$ converge.

Teorema 4.4 *Si $\sum x_n$ converge absolutamente entonces converge.*

Demostración. El resultado se sigue de la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k|$$

y el criterio de Cauchy. ■

Definición 4.3 Si $\sum x_n$ converge pero $\sum |x_n|$ diverge decimos que $\sum x_n$ *converge condicionalmente.*

Ejercicios 4.1

1. *Muestre que $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge a 1.*
2. *Construya series con las siguientes propiedades:*
   a) *Σa_n converge y Σa_n^2 diverge.*
   b) *Σb_n converge y Σb_n^3 diverge.*
   c) *Σc_n converge y Σc_n^2 y Σc_n^3 divergen.*
3. *Si $\sum x_n$ converge muestre que $\sum \frac{x_n}{n}$ también converge.*
4. *Si $\sum x_n$ converge y $\sum y_n$ diverge demuestre que $\sum(x_n + y_n)$ diverge y que $\sum z_n$ donde $z_{2n} = x_n$ y $z_{2n-1} = y_n (n \in \mathbb{N})$ también diverge.*
5. *Si $\sum x_n$ converge a S, demuestre que $\sum x_{n+1}$ converge a $S - a_1$ y que $\sum kx_n$ converge a kS.*

6. *Si $\sum x_n$ converge a S, demuestre que $\sum(x_n + x_{n+1})$ converge a $2S - x_1$. Construya una serie divergente $\sum y_n$ tal que $\sum(y_n + y_{n+1})$ converja.*
7. *Sea (n_k) una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos con $n_1 = 1$ y sea $\sum x_n$ una serie convergente. Para $k \in \mathbb{N}$ sea $b_k = \sum\{x_n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$. Demuestre que $\sum b_n$ converge y tiene la misma suma que $\sum x_n$.*
8. *Si $\sum(x_{2n} + \lambda x_{2n-1})$ y $\sum(x_{2n} + \mu x_{2n-1})$ son series convergentes, donde $\lambda \neq \mu$, demuestre que $\sum x_n$ converge.*
9. *Si $\sum |x_n|$ converge demuestre que $\sum x_n^2$ converge.*
10. *Si $\sum x_n$ converge absolutamente e y_n satisface $(1 + x_n)(1 - y_n) = 1$, demuestre que $\sum y_n$ converge absolutamente.*
11. *Si $\sum x_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{x_n}{n}$ converge absolutamente.*
12. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y $\sum x_n$ converge, pruebe que $nx_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Deduzca que si $\alpha \leq 1$ entonces $\sum n^{-\alpha}$ diverge.*

4.2. Series de Términos Positivos

En esta sección estudiaremos series con términos en $[0, +\infty]$. Como los sumandos son todos positivos, las sumas parciales forman una sucesión creciente y podemos usar las herramientas para el estudio de sucesiones monótonas que desarrollamos en la sección 3.2.2.

Definición 4.4 Sea $\sum x_k$ una serie con términos $x_k \in [0, +\infty]$ y sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ su n-ésima suma parcial. Como $(S_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente, tiene un límite $S \in \mathbb{R}^*$. Escribimos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$. S se conoce como la *suma* de la serie. Si $S < \infty$ esta definición coincide con la definición 4.1 y decimos que la serie *converge*. Si $S = \infty$ la serie *diverge*. En cualquier caso la serie tiene suma y escribimos

$$\sum x_k < \infty \quad \text{ó} \quad \sum x_k = \infty$$

según el caso.

El próximo teorema nos da el criterio fundamental para determinar la convergencia de una serie de términos positivos.

Teorema 4.5 *Sea $\sum x_n$ una serie con $x_n \in [0, +\infty]$. $\sum x_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales es acotada.*

Demostración. Este resultado es consecuencia del Teorema 3.6.

■

Ejemplos 4.4

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, conocida como la serie armónica, es divergente. Veamos que la sucesión de sumas parciales correspondiente a esta serie no está acotada. Usaremos el hecho de que $(1/n)$ es una sucesión decreciente. Veamos

el valor de las sumas parciales sobre los índices $1,\ 2,\ 4,\ 8,\dots$ que son potencias de 2.

$$S_1 = 1.$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = 1 + 2\frac{1}{2}.$$
$$S_8 = 1 + \cdots + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 3\frac{1}{2}.$$
$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > S_8 + 8\frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 4\frac{1}{2}.$$

y en general

$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} > S_{2^{n-1}} + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}.$$

Por recurrencia obtenemos que

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Vemos que esta sucesión no es acotada y por lo tanto la serie no converge.

2. Si los términos de la serie no son todos del mismo signo, la acotación de las sumas parciales no garantiza que la serie sea convergente, como lo muestra la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$
cuyas sumas parciales valen 0 ó 1 según el índice sea par o impar. Las sumas parciales forman una sucesión acotada pero no convergente.

Teorema 4.6 *Si* $y_n,\ x_n \in [0, +\infty]$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $c \in [0, +\infty]$ *entonces*

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demostración. Si todas las sumas que aparecen son finitas, esto es el teorema 4.2. En caso contrario el resultado es consecuencia de la definición 4.4.

■

4.2.1. Pruebas de Convergencia para Series de Términos Positivos

Teorema 4.7 (Criterio de Comparación) *Si para algún* $K > 0$ *y algún* $N \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $0 \leq x_n \leq Ky_n$ *para todo* $n \geq N$, *entonces* (*i*) *Si* $\sum y_n$ *converge se tiene que* $\sum x_n$ *converge y*

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n \leq K \sum_{n=N}^{\infty} y_n.$$

(*ii*) *Si* $\sum x_n$ *diverge,* $\sum y_n$ *también.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N = 1$ y $K = 1$, ya que si demostramos el resultado en este caso luego podemos aplicarlo a las series $\sum_{j=0}^{\infty} x_{N+j}$ y $\sum_{j=0}^{\infty} K y_{N+j}$ para obtener el caso general.

Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos las sumas parciales de ambas series:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{y} \quad T_n = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Las sucesiones $(S_n)_{n\geq 1}$ y $(T_n)_{n\geq 1}$ son crecientes y para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $0 \leq S_n \leq T_n$. Supongamos que $\sum y_n$ es convergente y tiene suma T. Como $(T_n)_{n\geq 1}$ es creciente y converge a T tenemos $T_n \leq T$ para todo n y en consecuencia $S_n \leq T$ para todo n. El Teorema 4.5 nos dice ahora que $\sum x_n$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq T = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Supongamos ahora que $\sum x_n$ es divergente, por el Teorema 4.5 sabemos que la sucesión $(S_n)_{n\geq 1}$ no está acotada. En consecuencia $(T_n)_{n\geq 1}$ tampoco lo está y $\sum y_n$ es divergente.

■

La demostración del teorema anterior depende de manera fundamental de que los términos de la serie son positivos. El resultado es falso si esto no es cierto.

Teorema 4.8 (Prueba del Cociente, d'Alembert) *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números reales estrictamente positivos.*

(*i*) *Si para algún* $N \in \mathbb{N}$ *existe un número real* $\alpha \in (0, 1)$ *para el cual* $x_{n+1}/x_n \leq \alpha$ *siempre que* $n \geq N$ *entonces* $\sum x_n$ *converge.*

(*ii*) *Si para algún* $N \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $x_{n+1}/x_n \geq 1$ *siempre que* $n \geq N$ *entonces* $\sum x_n$ *diverge.*

Demostración.

(*i*) Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N = 1$. Tenemos

$$x_n \leq \alpha x_{n-1} \leq \alpha^2 x_{n-2} \leq \cdots \leq \alpha^{n-1} x_1.$$

Sea $y_n = \alpha^{n-1}, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

por el Teorema 4.3. Usando el teorema anterior con $K = x_1$ vemos que $\sum x_n$ converge.

(ii) Como $x_n \geq x_1 > 0$ para todo n, no se puede cumplir que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto $\sum x_n$ no puede ser convergente.

■

Corolario 4.4 *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con $x_n > 0$ para $n \geq 1$.*

(i) *Si* $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ *entonces* $\sum x_n$ *converge.*

(ii) *Si* $\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ *entonces* $\sum x_n$ *diverge.*

Demostración. Supongamos que $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell < 1$. Escogemos α que satisfaga $\ell < \alpha < 1$. Entonces, por el Teorema 3.7 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \alpha$ para $n \geq N$, y el primer resultado es cierto por el teorema anterior. La segunda parte se prueba de manera similar.

■

Observación 4.3 Es importante notar que cuando se usa el Teorema 4.8 o su corolario hay que mostrar que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \alpha < 1$ para todo n suficientemente grande o que $\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. No basta ver que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ para todo n suficientemente grande. Por ejemplo, para la serie armónica $x_n = 1/n$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

pero ya hemos visto que esta serie es divergente.

En general, la prueba del cociente sólo funciona para series que convergen rápidamente y su principal aplicación es a las series de potencias, que estudiaremos mas adelante.

Para poder usar el Criterio de Comparación es necesario conocer el comportamiento de algunas series. El próximo resultado es importante en este sentido.

Teorema 4.9 *La serie* $\sum n^{-\alpha}$ *converge si* $\alpha > 1$ *y diverge si* $\alpha \leq 1$.

Demostración. Hemos visto que si $\alpha = 1$ la serie diverge. Si $\alpha < 1$, $n^{-\alpha} > n^{-1}$ y por el Criterio de Comparación, $\sum n^{-\alpha}$ diverge.

Supongamos ahora que $\alpha > 1$ y consideremos la suma para los índices n que satisfacen $N + 1 \leq n \leq 2N$; entonces

$$n^{-\alpha} \leq (N+1)^{-\alpha} < N^{-\alpha}$$

y

$$\sum_{n=N+1}^{2N} n^{-\alpha} < \sum_{n=N+1}^{2N} N^{-\alpha} < N^{-\alpha}(2N - N - 1) < N^{1-\alpha}$$

Tomemos ahora $N = 2^j$, para $j = 0,\ 1, \dots,\ k-1$; obtenemos que

$$\sum_{1}^{2^k} n^{-\alpha} = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} n^{-\alpha} \leq 1 + \sum_{j=0}^{k-1} (2^j)^{1-\alpha}$$
$$\leq 1 + \sum_{j=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^j = 1 + \frac{1}{1 - 2^{(1-\alpha)}}$$

donde $\sum 2^{(1-\alpha)j}$ es una serie geométrica convergente porque $\alpha > 1$ y $2^{1-\alpha} < 1$. Como estamos considerando una serie de términos positivos, la sucesión de sumas parciales es creciente y hemos mostrado que esta sucesión está acotada. Por el Teorema 4.5 la serie es convergente.

■

Teorema 4.10 (Prueba de la Raíz) *Sea* $\sum x_n$ *una serie de términos positivos y definamos* $\beta = \text{limsup}(x_n)^{1/n}$*. Entonces*

(*i*) *Si* $\beta < 1$, $\sum x_n$ *converge.*

(*ii*) *Si* $\beta > 1$, $\sum x_n$ *diverge.*

(*iii*) *Si* $\beta = 1$, *la prueba no da información.*

Demostración. Supongamos que $\beta < 1$ y tomemos η que satisfaga $\beta < \eta < 1$. Por el Teorema 3.7 sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)^{1/n} < \eta$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n < \sum_{n=N}^{\infty} \eta^n = \frac{\eta^N}{1-\eta} < \infty$$

de donde deducimos (i).

Si $\beta > 1$ entonces el Teorema 3.7 dice que para infinitos índices n se tiene que $(x_n)^{1/n} > 1$, por lo tanto $x_n > 1$ y entonces no es cierto que $x_n \to 0$, de donde deducimos (ii).

Para ver (iii) basta considerar las series $\sum n^{-1}$ y $\sum n^{-2}$. En ambos casos $\beta = 1$ pero la primera serie diverge mientras que la segunda converge.

■

La prueba de la raíz es más fuerte que la prueba del cociente, como lo muestra el ejercicio 3.3.4 y los siguientes ejemplos:

Ejemplos 4.5

1. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

entonces $\sum x_n < \sum 2^{-n} < \infty$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,\\
\underline{\lim}(x_n)^{1/n} &= \lim\left(3^{-n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3},\\
\overline{\lim}(x_n)^{1/n} &= \lim\left(2^{-n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2},\\
\overline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.
\end{aligned}$$

Vemos que la prueba de la raíz detecta la convergencia, mientras que la del cociente no nos da información.

2. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n = \begin{cases} 2^n, & \text{si } n \text{ es par,}\\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}$$

entonces $\sum x_n = \infty$ y

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}(x_n)^{1/n} &= \overline{\lim}\,(2^n)^{1/n} = 2,\\
\underline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{-(n+1)}}{2^n}\right) = \lim 2^{2n+1} = 0,\\
\overline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim\left(\frac{2^{n+1}}{2^{-n}}\right) = \infty.
\end{aligned}$$

La prueba de la raíz detecta la divergencia mientras que la prueba del cociente no da información.

El próximo teorema muestra que el orden en el cual aparecen los sumandos de una serie de términos positivos no afecta el valor de su suma.

Teorema 4.11 *Sea A un conjunto numerablemente infinito y sea $\{a_k, k \geq 1\}$ una enumeración de A. Para cualquier función $f : A \to [0,\infty]$ se tiene*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) = sup\left\{\sum_{a\in F} f(a) : F \text{ es finito}, F \subset A\right\} \tag{4.1}$$

Nota: El símbolo $\sum_{a\in F} f(a)$ denota la suma de los valores de f en los puntos del conjunto F. En vista del teorema escribimos el segundo miembro de (4.1) como

$$\sum_{a\in A} f(a) = \sum\{f(a) : a \in A\}$$

para cualquier $A \neq \varnothing$ y $f : A \to [0,\infty]$. Si $A = \varnothing$, $\sum_{a\in A} f(a) = 0$ por definición.

Demostración. Sea $\alpha < \sum_{a\in A} f(a)$. Escogemos $F \subset A$ finito de modo que

$$\alpha < \sum_{a\in F} f(a).$$

Escogemos ahora $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $F \subset \{a_k : 1 \leq k \leq k_0\}$. Por lo tanto

$$\alpha < \sum_{a\in F} f(a) \leq \sum_{k=1}^{k_0} f(a_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k),$$

y como α es arbitrario,

$$\sum_{a\in A} f(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k).$$

Además,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} f(a_k) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sum_{a\in A} f(a).$$

■

4.2.2. Pruebas para Convergencia Absoluta

Sea $\sum x_n$ una serie de números reales. La serie $\sum |x_n|$ de los valores absolutos es una serie de números reales positivos y podemos aplicarle los criterios de convergencia que estudiamos anteriormente para obtener de esta manera criterios de convergencia absoluta. Por ejemplo, si $\limsup(|x_n|)^{1/n} < 1$, la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente.

Ejemplos 4.6

1. Estudie la convergencia absoluta de la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}10^n}{n!}$.

   Usamos la prueba del cociente:

   $$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{10^{n+1}n!}{(n+1)!10^n} = \frac{10}{n+1} \to 0$$

   cuando $n \to \infty$. Por el corolario 4.4 la serie es absolutamente convergente y en consecuencia también es convergente.

2. Estudie la convergencia absoluta de la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}n!}{10^n}$.

   Usamos la prueba del cociente:

   $$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)!10^n}{10^{n+1}n!} = \frac{n+1}{10} \to \infty$$

   cuando $n \to \infty$. Por el corolario 4.4 la serie $\sum |x_n|$ es divergente, es decir, la serie no converge absolutamente.

4.2.3. El Número e.

En el capítulo anterior definimos el número e como

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

En esta sección obtendremos una expresión para este número en términos de una serie de números reales, probaremos que es irracional y veremos como se puede aproximar por números racionales.

Teorema 4.12 *$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ y si $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ entonces $0 < e - S_n < 1/(n!n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ es convergente, como puede verse fácilmente aplicando el criterio del cociente. Consideremos

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\right)\\ &< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}-1\right) = \frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

Si llamamos S la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ y S_n la suma parcial $\sum_{k=0}^{n} 1/k!$, basta considerar $n = 1$ en la desigualdad anterior para obtener que $S < 3$ y además observamos que

$$0 < S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Llamemos $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y usemos el teorema binomial para obtener

$$\begin{aligned}t_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}\\ &< 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = S_n < S\end{aligned}$$

para todo $n > 1$. Por lo tanto, $e = \lim t_n \le S$.

Dado $\epsilon > 0$ sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $S - \epsilon < S_p$. Para $n > p$ tenemos

$$\begin{aligned} e > t_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\ &> 1 + \sum_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \end{aligned}$$

haciendo $n \to \infty$, como el número de términos en la última suma está fijo obtenemos

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} = S_p > S - \epsilon.$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$, $S - \epsilon < e \leq S$, de modo que $S = e$.

■

Corolario 4.5 *e es irracional.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $e = m/n$ para $m, n \in \mathbb{N}$. Por el teorema anterior

$$0 < \frac{m}{n} - S_n < \frac{1}{n!n}$$

de donde

$$0 < (n-1)!m - n!S_n < \frac{1}{n} \leq 1$$

pero tanto $(n-1)!m$ como $n!S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)$ son enteros y por la desigualdad anterior, su diferencia debe ser un entero entre 0 y 1, lo cual es imposible.

■

Observamos que el teorema anterior nos permite aproximar al número irracional e por las sumas parciales S_n, que son números racionales. Por ejemplo, con $n = 6$ obtenemos

$$2,718055 < e < 2{,}718286$$

y sabemos que las tres primera cifras son exacta porque $1/6(6!) < 0,00024$

Ejercicios 4.2

1. *Determinar si las siguientes series convergen o divergen.*

(1) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n^3}}$	(2) $\Sigma \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$	(3) $\Sigma \frac{2}{n^n}$	(4) $\Sigma \frac{3}{n(n+1)}$
(5) $\Sigma \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	(6) $\Sigma \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$	(7) $\Sigma \frac{1}{\pi n}$	(8) $\Sigma \frac{2}{n+2}$
(9) $\Sigma \frac{1}{3^n+1}$	(10) $\Sigma \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$	(11) $\Sigma \frac{1}{n^2+3}$	(12) $\Sigma \frac{4}{\sqrt[n]{3}}$
(13) $\Sigma \frac{1}{3^n-1}$	(14) $\Sigma\, n \left(\frac{3}{4}\right)^n$	(15) $\Sigma \frac{4n}{2^n}$	(16) $\Sigma \frac{3^n}{n2^n}$

2. *Para cada una de las siguientes sucesiones determine si la serie asociada es convergente o no.*

$$(1)\ x_k = \frac{1}{4+k^2} \qquad (2)\ x_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \qquad (3)\ x_k = \frac{k^2}{k!}$$

$$(4)\ x_k = \frac{3^{2k}(k!)^2}{(2k)!} \qquad (5)\ x_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \qquad (6)\ x_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$$

$$(7)\ x_k = ((k)^{1/k}-1)^k \quad (8)\ x_k = (-1)^{k-1}\frac{k}{2k+1} \quad (9)\ x_k = \frac{k}{k^2+1}$$

3. *Sea $\sum x_n$ una serie de términos positivos tal que la sucesión (x_n) es decreciente y sea $y_n = 2^n x_{2^n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que ambas series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ convergen o ambas divergen.*

4. *Sean $x_n > 0$, $y_n > 0$ dos sucesiones. Demuestre lo siguiente: (i) Si $\sum y_n$ converge y x_n/y_n es decreciente entonces $\sum x_n$ converge. (ii) Si $\sum y_n$ diverge y x_n/y_n es creciente entonces $\sum x_n$ diverge. (iii) Si $\lim x_n/y_n = k$, $0 < k < \infty$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.*

5. *Usando el ejercicio anterior determine la convergencia o divergencia de las siguientes series:*

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)n!}, \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}, \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n^2 2^n}.$$

6. *Sean $\sum x_n$ y $\sum y_n$ dos series de términos positivos y suponga que*

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

para todo n. Entonces (i) Si $\sum x_n$ es convergente, también lo es $\sum y_n$. (ii) Si $\sum y_n$ es divergente, $\sum x_n$ también.

7. *Suponga que $\sum x_n$ es una serie convergente de términos positivos. Demuestre que $\sum(x_n x_{n+1})^{1/2}$ y $\sum(x_n n^{-1-\delta})^{1/2}$, $\delta > 0$ convergen.*

8. *Sean $\sum x_n$ y $\sum y_n$ series convergentes de términos positivos. Demuestre que $\sum(x_n y_n)^{1/2}$ converge.*

9. *La sucesión (x_n) es decreciente, $x_n > 0$ y $\sum(x_n x_{n+1})^{1/2}$ converge. Muestre que $\sum x_n$ converge. Dé un ejemplo de una serie positiva divergente $\sum y_n$ tal que $\sum(y_n y_{n+1})^{1/2}$ converge.*

10. *$\sum x_n$ es una serie divergente de términos estrictamente positivos.*

    (i) Determine si las siguientes series convergen o divergen:

$$(1) \sum x_n/(1+x_n) \qquad (2) \sum x_n/(1+nx_n)$$

$$(3) \sum x_n/(1+n^2x_n) \quad (4) \sum x_n/(1+x_n^2) \text{ con } x_n \text{ acotada}$$

    (ii) Sea $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Demuestre que $\frac{x_{N+1}}{S_{N+1}} + \cdots + \frac{x_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$ y deduzca que $\sum \frac{x_n}{S_n}$ diverge.

    (iii) Pruebe que $\frac{x_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ y deduzca que $\sum \frac{x_n}{S_n^2}$ converge.

4.3. Series Alternas.

Aunque la noción de convergencia absoluta nos provee una herramienta poderosa para estudiar la convergencia de series cuyos términos no tienen todos el mismo signo, puede suceder que una serie sea convergente sin ser absolutamente convergente. En esta situación hay algunas pruebas que permiten detectar en ciertos casos si la serie es convergente.

Definición 4.5 Si una serie es convergente sin ser absolutamente convergente decimos que es *condicionalmente* convergente.

El caso más frecuente es el de las series alternas, que son aquellas en las cuales los términos sucesivos cambian de signo (ver figura 4.3). Para este caso hay una prueba de convergencia sencilla e importante.

Teorema 4.13 (Prueba de Leibniz para Series Alternas) *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión decreciente de números positivos con* $\lim x_n = 0$, *entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$$

es convergente. Además, si $S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^{k+1}x_k$ *y* $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ *se tiene que*

$$|S - S_k| \leq x_{k+1} \qquad \textit{para todo } k \geq 1.$$

Demostración. Para k y p en $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|S_{k+p} - S_k| &= |(-1)^{k+2}x_{k+1} + \cdots + (-1)^{k+p+1}x_{k+p}| \\ &= |x_{k+1} - x_{k+2} + \cdots + (-1)^{p+1}x_{k+p}|.\end{aligned}$$

La suma que aparece entre los signos de valor absoluto se puede escribir como

$$(x_{k+1} - x_{k+2}) + (x_{k+3} - x_{k+4}) + \cdots + \begin{cases} x_{k+p-1} - x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es par} \\ x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como (x_n) es una sucesión decreciente, esto muestra que esta suma es positiva y por lo tanto podemos eliminar los signos de valor absoluto. La suma puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$x_{k+1} - (x_{k+2} + x_{k+3}) - \cdots - \begin{cases} x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es par} \\ x_{k+p-1} - x_{k+p}, & \text{si } p \text{ es impar,} \end{cases}$$

lo cual muestra que para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$|S_{k+p} - S_k| < x_{k+1}. \qquad (4.2)$$

Como $x_k \searrow 0$, dado $\epsilon > 0$ podemos hallar $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{k+p} - S_k| < \epsilon$$

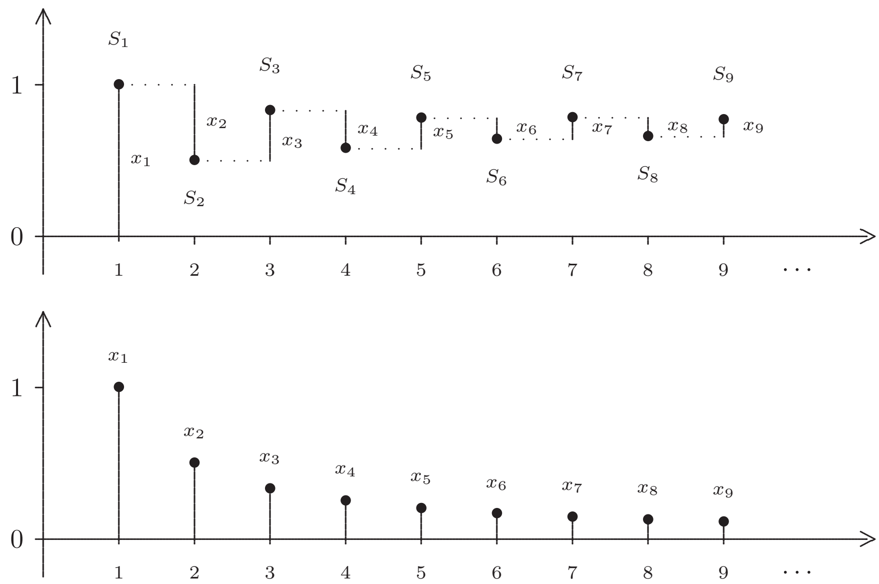

Figura 4.3: La sucesión x_n y la serie alterna asociada.

ya que basta tomar k de modo que $x_k < \epsilon$. Además, haciendo $p \to \infty$ en (4.2) obtenemos

$$|S - S_k| < x_{k+1}.$$

■

Ejemplos 4.7

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1/n)$ es convergente, lo cual se deduce del teorema anterior, pero no es absolutamente convergente ya que al tomar el valor absoluto de los términos obtenemos la serie armónica. Este es un ejemplo de una serie condicionalmente convergente.

2. Usando la prueba de Leibniz vemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}1/\sqrt{n}$ también es convergente, pero vimos en el ejemplo 4.2 que la serie no es absolutamente convergente, igual que en el caso anterior.

Ejercicios 4.3

1. *Estudie la convergencia y la convergencia absoluta de las series:*

$$(1) \sum(-1)^n((n^2+1)^{1/2} - n) \qquad (2) \sum(-1)^n(2n + (-1)^{n+1})^{-1/2}$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\log n}{\sqrt{n}} \qquad (4) \sum(-1)^n(1 - n\log(\frac{n+1}{n}))$$

2. *Sea a_n una sucesión decreciente de números reales positivos. Demuestre que $\Sigma a_n z^n$ converge si $|z| \leq 1,\ z \neq 1$.*

3. *Construya una serie convergente Σa_n y una sucesión de números positivos b_n con $b_n \to 0$ de modo que $\Sigma a_n b_n$ diverja.*

4.4. Convergencia Condicional.

Ya vimos que una serie condicionalmente convergente es aquella que converge pero que no converge condicionalmente. En la sección anterior vimos dos ejemplos. Sea ahora $\sum x_n$ una serie de este tipo y llamemos $p_1, p_2, p_3, \dots$ los términos positivos de esta serie, en el orden en el cual aparecen, y sean $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$ los términos negativos, también en el orden en el cual aparecen. Por ejemplo, para la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

tenemos

$$\begin{array}{lllll} p_1 = 1, & p_2 = \dfrac{1}{3}, & p_3 = \dfrac{1}{5}, & \dots \quad p_n = \dfrac{1}{2n-1} & \dots \\ q_1 = \dfrac{1}{2}, & q_2 = \dfrac{1}{4}, & q_3 = \dfrac{1}{6}, & \dots \quad q_n = \dfrac{1}{2n}, & \dots \end{array}$$

Consideramos ahora las dos series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ que consisten sólo de términos positivos.

Teorema 4.14 *Si la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente, entonces cada una de las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ es convergente y $\sum x_n = \sum p_n - \sum q_n$. En cambio, si la serie $\sum x_n$ es condicionalmente convergente, las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ ambas divergen.*

Demostración. Supongamos que la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente con $\sum |x_n| = M$, entonces, para cualquier n,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M. \tag{4.3}$$

Si consideramos ahora una suma parcial de la serie de términos positivos, digamos $p_1 + \cdots + p_k$, vemos que los términos de esta suma están incluidos en la suma $|x_1| + \cdots + |x_n|$ para n suficientemente grande, y por (4.3) concluimos que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \leq M.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo k concluimos por el teorema 4.5 que $\sum p_n$ es convergente.

De manera similar se demuestra que la serie $\sum q_n$ de términos negativos es convergente.

Para la suma parcial $x_1 + \cdots + x_n$ sea μ_n en número de términos positivos y ν_n el de términos negativos presentes. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_n = \sum_{i=1}^{\mu_n} p_i - \sum_{i=1}^{\nu_n} q_i. \tag{4.4}$$

Si la serie es absolutamente convergente hemos visto que ambas series del lado derecho son convergentes, y haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \sum_{i=1}^{\infty} q_i.$$

Es posible que sólo haya una cantidad finita de términos positivos, o de términos negativos, o incluso que no haya sino términos de un solo tipo. En estos casos la serie es absolutamente convergente si y sólo si es convergente, porque a partir de un cierto índice todos los términos tienen el mismo signo.

Consideremos el caso en el cual hay infinitos términos de cada signo, de modo que μ_n y $\nu_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Llamemos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i; \qquad Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Con esta notación (4.4) es $S_n = P_{\mu_n} - Q_{\nu_n}$ y además tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = P_{\mu_n} + Q_{\nu_n} \tag{4.5}$$

Supongamos ahora que la serie $\sum x_n$ es convergente y consideremos las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$. Si alguna de estas últimas es convergente, la otra también debe serlo. En efecto, por la relación $S_n = P_{\mu_n} - Q_{\nu_n}$, si, por ejemplo, $Q_n = \sum_1^n q_k$ es convergente, despejando P_n de la relación anterior tenemos $P_{\mu_n} = S_n + Q_{\nu_n}$, y como ambos sumandos de la derecha convergen cuando $n \to \infty$, también lo hace P_{μ_n}. Esto implica la convergencia de P_n por la definición de μ_n y porque se trata de una serie de términos positivos.

Pero si ambas series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes la relación (4.5) implica que $\sum |x_n|$ también lo es. Vemos, así, que si $\sum x_n$ es condicionalmente convergente, ambas series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ deben ser divergentes.

■

4.5. Reordenamientos.

Si tenemos una suma finita de número reales $x_1 + \cdots + x_n$, sabemos, por la propiedad conmutativa, que podemos sumarlos en cualquier orden y el resultado de la suma es siempre el mismo. Nos preguntamos ahora si esto es cierto en el caso de series infinitas: Si cambiamos el orden en el cual se suman los términos de una serie, ¿obtenemos siempre el mismo resultado?

La respuesta, que puede resultar sorprendente para el lector, es que no necesariamente las dos series suman lo mismo. Más aún, puede suceder que al cambiar el orden de los términos de una serie convergente, obtengamos una serie que diverge.

Comencemos por ver un ejemplo.

Ejemplo 4.8
En un capítulo posterior demostraremos que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{4.6}$$

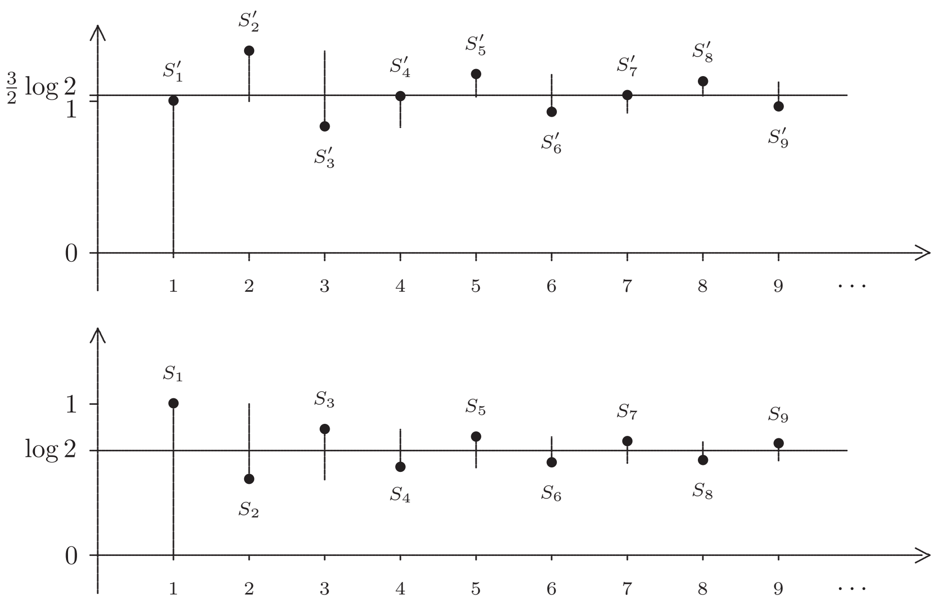

Figura 4.4: La sucesión $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y un reordenamiento.

Veamos que cambiando el orden de los sumandos de esta serie podemos obtener otro valor para la suma (ver figura 4.4):

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{4.7}$$

El esquema en este nuevo arreglo de la suma es tomar dos términos positivos y uno negativo y así sucesivamente. Para demostrar este resultado observemos que si multiplicamos (4.6) por $1/2$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \cdots$$

En esta última serie podemos insertar términos iguales a cero sin cambiar su valor:

$$\frac{1}{2}\log 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \cdots \tag{4.8}$$

y ahora, por el teorema 4.2 podemos sumar las series (4.6) y (4.8) término a término para obtener (4.7).

Definición 4.6 Sean $\sum x_n$ una serie y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. La serie $\sum y_n$ donde $y_n = x_{f(n)}$ es un *reordenamiento* o *rearreglo* de $\sum x_n$.

Como la función inversa $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ también es biyectiva, $\sum x_n$ es un reordenamiento de $\sum y_n$.

Ejemplo 4.9
Las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ donde $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y para $k \geq 1$

$$y_n = \begin{cases} 1/(4k-3), & \text{si } n = 3k-2 \\ 1/(4k-1), & \text{si } n = 3k-1 \\ -1/2k, & \text{si } n = 3k \end{cases}$$

son reordenamientos. Los primeros términos de la serie reordenada son

$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{7}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{11}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \ldots$$

es decir, esta es la serie (4.7). En este caso $y_n = x_{f(n)}$ donde f está definida para $n \geq 1$ por

$$f(3n-2) = 4n-3, \quad f(3n-1) = 4n-1, \quad f(3n) = 2n.$$

Los primeros valores de la función f son

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 7, \quad f(6) = 4.$$

Definición 4.7 Si $\sum x_n$ y todos sus reordenamientos convergen a la misma suma decimos que $\sum x_n$ *converge incondicionalmente.*

Veremos que esto es equivalente a convergencia absoluta. El Teorema 4.11 muestra que las series convergentes de términos positivos son incondicionalmente convergentes.

Teorema 4.15 $\sum x_n$ *converge absolutamente si y sólo si converge incondicionalmente.*

Demostración. Supongamos que $\sum x_n$ converge absolutamente y $\sum y_n$ es un reordenamiento que se obtiene por la función f con $y_n = x_{f(n)}$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \epsilon$. Sea M tal que los números $1,\ 2,\ \ldots, N$ estén todos incluidos en $f(1),\ f(2),\ \ldots, f(M)$, entonces, para $m \geq M$,

$$\left| \sum_{1}^{\infty} x_n - \sum_{1}^{m} y_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \epsilon$$

y esto muestra que $\sum y_n$ converge a $\sum x_n$, y por lo tanto la serie converge incondicionalmente.

Supongamos ahora que $\sum x_n$ converge incondicionalmente pero no absolutamente. Definimos las sucesiones $p_i,\ i \geq 1$ de términos positivos y $-q_i,\ i \geq 1$ de términos negativos, así como sus correspondientes sumas parciales, como en la sección 4.4. Sabemos por el teorema 4.14 que ambas sucesiones tienen infinitos términos y que las series correspondientes son divergentes.

Construimos un reordenamiento de la serie de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2} - q_2 \\ &\quad + p_{n_2+1} + \cdots + p_{n_3} - q_3 + p_{n_3+1} + \cdots \end{aligned} \tag{4.9}$$

en el cual un grupo de términos positivos va seguido por uno negativo. Escogiendo adecuadamente los índices $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ podemos hacer que esta serie sea divergente, para lo cual basta tomar n_1 de modo que

$$P_{n_1} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > q_1 + 1,$$

luego $n_2 > n_1$ de modo que

$$P_{n_2} > q_1 + q_2 + 2,$$

y en general n_j de modo que

$$P_{n_j} > Q_j + j$$

para $j = 1, 2, \cdots$. Siempre podemos encontrar una sucesión de índices que satisfaga estas condiciones porque $P_n \to \infty$. La serie (4.9) es divergente porque las sumas parciales de esta serie cuyo último término es q_j, para algún j, son estrictamente mayores que j, y la desigualdad también se satisface para las sumas parciales que siguen. Por lo tanto las sumas parciales tienden a ∞ y no a S.

■

En realidad, en la demostración del teorema anterior probamos que si la serie $\sum x_n$ converge condicionalmente hay un reordenamiento que converge a $+\infty$. Es posible mostrar el siguiente resultado, que es mas fuerte: sean $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ entonces existe un reordenamiento $\sum y_n$ de $\sum x_n$ con sumas parciales $(T_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\underline{\lim}\, T_n = \alpha, \qquad \overline{\lim}\, T_n = \beta.$$

Ejercicios 4.4

1. *Sea* $\sum x_n$ *una serie condicionalmente convergente. Dado* $S \in \mathbb{R}$ *demuestre que hay un reordenamiento de* $\sum x_n$ *cuya suma es* S.
2. *Suponiendo cierta la ecuación (4.6), demuestre que* $\log 2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + + + - - - \cdots$
3. *Suponiendo cierta la ecuación (4.6), demuestre que* $\log 2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots$. *En este desarrollo los términos positivos tienen denominadores impares y los términos negativos tienen denominadores pares. Los términos alternan en signo.*

4. *Sea $\sum x_n$ una serie convergente y $\sum y_n$ un reordenamiento. En el reordenamiento, suponga que ningún término de la serie original se mueve más de N lugares de su posición original, donde N es un número fijo. Muestre que $\sum y_n$ es convergente y converge al mismo valor que $\sum x_n$.*

4.6. Multiplicación de Series

Consideremos dos series convergentes $\sum x_n$, $\sum y_n$ y, para fijar las ideas, supongamos que son series de términos positivos, lo cual nos va a permitir sumar estas series en cualquier orden y obtener siempre el mismo resultado. Hemos visto que si formamos una nueva serie $\sum z_n$ sumando término a término las series iniciales ($z_n = x_n + y_n$), el resultado es una serie convergente cuya suma es la suma de las series $\sum x_n$ e $\sum y_n$:

$$\sum z_n = \sum x_n + \sum y_n.$$

Queremos ahora definir el 'producto' de las series originales de modo que la 'serie producto' converja al producto de las series iniciales. Un primer ensayo podría ser definir $\sum z_n$ como el producto término a término de las series originales: $z_n = x_n \cdot y_n$. Es fácil ver, sin embargo, que esto no funciona.

Ejemplo 4.10
Definimos para $n \geq 1$,

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2^{-n}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Los productos término a término valen todos 0 mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{4}\big)^n = \frac{1}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{2}{3},$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq 0.$$

Supongamos que las series comienzan con el índice 0 y llamemos $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, $T_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$ a las sumas parciales de las respectivas series y S y T a los límites correspondientes, de modo que

$$S_n \to S, \qquad T_n \to T, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Si multiplicamos término a término las sucesiones de sumas parciales tenemos que $S_nT_n \to ST$ y el producto de las sumas parciales es:

$$S_nT_n = \Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} y_j\Big) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x_iy_j.$$

Vemos que el producto de las sumas parciales es la suma de todos los productos posibles entre pares de términos formados tomando un elemento de cada suma. Si hacemos $n \to \infty$ esta suma converge a ST y por lo tanto, una posible definición del producto entre las series $\sum x_n$ e $\sum y_n$ es una serie $\sum z_n$ en la cual aparezcan todos los productos posibles formados multiplicando un término x_n por un término y_n, es decir, que aparezcan todos los términos de la tabla 4.6.

	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n	y_{n+1}	$\cdots$
x_0	x_0y_0	x_0y_1	x_0y_2	$\cdots$	x_0y_{n-1}	x_0y_n	x_0y_{n+1}	$\cdots$
x_1	x_1y_0	x_1y_1	x_1y_2	$\cdots$	x_1y_{n-1}	x_1y_n	x_1y_{n+1}	$\cdots$
x_2	x_2y_0	x_2y_1	x_2y_2	$\cdots$	x_2y_{n-1}	x_2y_n	x_2y_{n+1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_{n-1}	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_2$	$\cdots$	$x_{n-1}y_{n-1}$	$x_{n-1}y_n$	$x_{n-1}y_{n+1}$	$\cdots$
x_n	x_ny_0	x_ny_1	x_ny_2	$\cdots$	x_ny_{n-1}	x_ny_n	x_ny_{n+1}	$\cdots$
x_{n+1}	$x_{n+1}y_0$	$x_{n+1}y_1$	$x_{n+1}y_2$	$\cdots$	$x_{n+1}y_{n-1}$	$x_{n+1}y_n$	$x_{n+1}y_{n+1}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

Cuadro 4.1: Multiplicación de Series

Una manera cómoda de realizar esta suma es hacerla a lo largo de las diagonales. Esto equivale a fijar el valor de la suma de los índices en los productos, por ejemplo, $a_{n-1}y_1$ y a_0y_n están en la misma diagonal porque en ambos casos los índices suman n. Este es el sentido de la siguiente definición.

Definición 4.8 El *producto de Cauchy* de dos series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ de términos reales es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ donde

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_ky_{n-k}.$$

La sucesión (z_n) se conoce como la *convolución* de las sucesiones (x_n) e (y_n).

La figura 4.5 es una simplificación del cuadro 4.6 en la cual reemplazamos los términos del margen por sus índices y los productos por puntos.

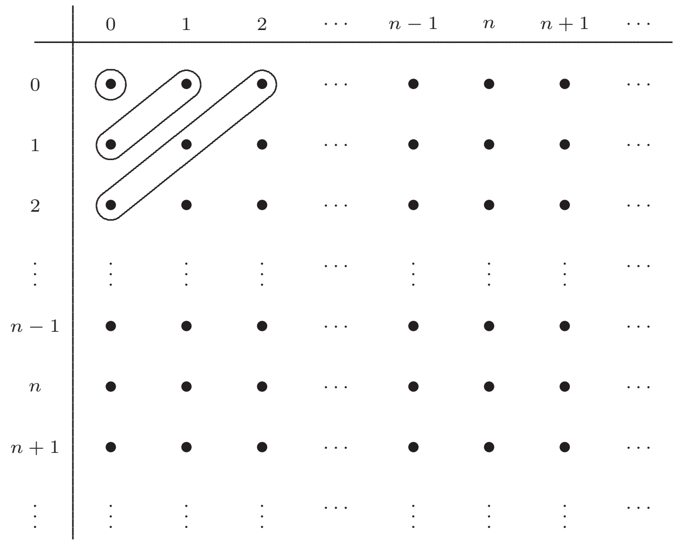

Figura 4.5: Definión de z_n.

El término z_n de la definición representa la suma de los productos que aparecen en la figura y que corresponden a la diagonal n (empezando la numeración de las diagonales con el 0, que corresponde al término x_0y_0). Queremos demostrar a continuación que, definido de esta forma y bajo ciertas condiciones, el producto de Cauchy de dos series convergentes es convergente y su valor es $ST = (\sum x_n)(\sum y_n)$.

Vimos ya que el producto de las sumas parciales S_nT_n converge, cuando $n \to \infty$, al producto ST. Por lo tanto, bastaría ver que la diferencia entre la suma parcial para el producto de Cauchy $\sum_{k=1}^{n} z_n$ y el producto de las sumas parciales tiende a 0 cuando $n \to \infty$ (ver figura 4.6). Esto lo haremos en el próximo teorema bajo condiciones ms generales. Antes, veamos que no basta con la convergencia de las series que deseamos multiplicar para garantizar que su producto de Cauchy converja.

Ejemplo 4.11
Veamos una serie convergente cuyo producto de Cauchy consigo misma es divergente: sea

$$x_0 = 0 \qquad x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad n \geq 1$$

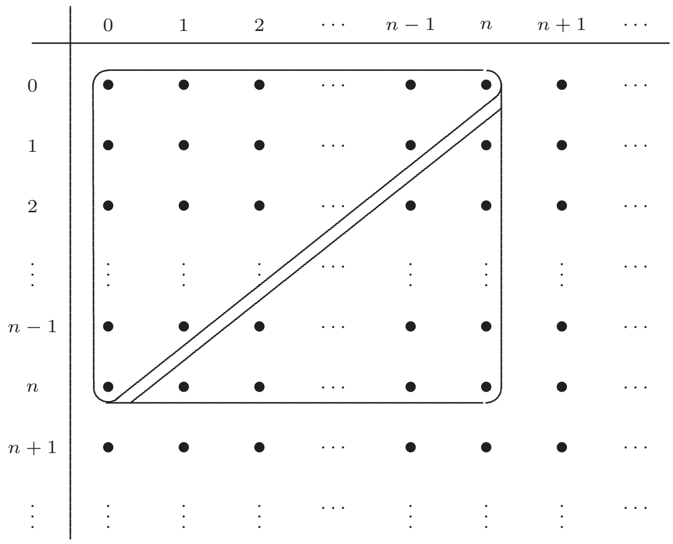

Figura 4.6: Diferencia entre $\sum_1^n z_j$ y $(\sum_1^n x_j)(\sum_1^n y_j)$.

entonces $\sum x_n$ converge por el Criterio de Leibniz (Teorema 4.13). Sin embargo,

$$\begin{aligned} z_0 &= z_1 = 0, \\ z_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k x_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}, \\ |z_n| &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = 1, \end{aligned}$$

por lo tanto $z_n \nrightarrow 0$ y $\sum z_n$ diverge.

Teorema 4.16 (Mertens) *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente de suma S y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie convergente de suma T. Definimos $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = ST$$

Demostración. Sean

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k, \qquad U_n = \sum_{k=0}^{n} z_k, \qquad \tau_n = T_n - T,$$

entonces

$$\begin{aligned} U_n &= x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + \cdots + (x_0y_n + x_1y_{n-1} + \cdots + x_ny_0) \\ &= x_0T_n + x_1T_{n-1} + \cdots + x_nT_0 \\ &= x_0(T + \tau_n) + x_1(T + \tau_{n-1}) + \cdots + x_n(T + \tau_0) \\ &= S_nT + x_0\tau_n + x_1\tau_{n-1} + \cdots + x_n\tau_0. \end{aligned}$$

Queremos ver que esta expresión converge a ST. Como $S_nT \to ST$ basta mostrar que

$$\eta_n = x_0\tau_n + x_1\tau_{n-1} + \cdots + x_n\tau_0 \to 0.$$

Llamemos $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\sum y_n$ converge a T, $\lim \tau_n = 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\tau_n| < \epsilon$ para $n \geq N$ y entonces

$$\begin{aligned} |\eta_n| &\leq |x_0\tau_n + \cdots + x_{n-N-1}\tau_{N+1}| + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0| \\ &\leq \epsilon|x_0 + x_1 + \cdots + x_{n+N-1}| + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0| \\ &\leq \epsilon\sigma + |x_{n-N}\tau_N + \cdots + x_n\tau_0|. \end{aligned}$$

Como $x_n \to 0$, manteniendo N fijo y haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\text{limsup}\,|\eta_n| \leq \epsilon\sigma.$$

Teniendo en cuenta que ϵ es arbitrario se obtiene el resultado.

■

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostración

Teorema 4.17 (Abel) *Si las series $\sum x_n$, $\sum y_n$ y $\sum z_n$ convergen a S, T y U respectivamente y $z_n = x_0y_n + \cdots + x_ny_0$ entonces $U = ST$.*

Ejercicios 4.5

1. *Para las series Σa_n y Σb_n calcule su producto de Cauchy Σc_n. Determine cuáles de estas series con convergentes y si todas lo son, calcule Σc_n en términos de Σa_n y Σb_n.*

   i) $a_n = b_n = 1$ *para todo* n

   ii) $a_0 = a_1 = 1/2$, $a_n = 0$ *para* $n > 1$; Σb_n *convergente.*

   iii) $a_0 = 1, a_1 = -1$, $a_n = 0$ *para* $n > 1$; $b_n = 1/n$.

   iv) $a_n = x^n/n!$, $b_n = y^n/n!$.

2. *$\sum x_n$ converge absolutamente e $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Muestre que $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.*

3. *Pruebe que si $|x| < 1$ entonces $[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots]^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$*

4. *Demuestre por multiplicación de series que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, entonces $f(x)f(y) = f(x + y)$ para cualesquiera x e y.*

5. *Demuestre que el producto de Cauchy de las dos series divergentes*

$$(2+2+2^2+2^3+2^4+\cdots)(-1+1+1+1+1+1+\cdots)$$

converge absolutamente.

Ejercicios Complementarios

1. *Espacios métricos de sucesiones.*

   a) *Sea ℓ^∞ el espacio de las sucesiones acotadas de números reales. Definimos*

   $$d((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : s \in \mathbb{N}\}$$

   Demuestre que d es una métrica en ℓ^∞.

   b) *Para $p \geq 1$ el espacio ℓ^p consiste de todas las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

   converge. Para (x_n), (y_n) sucesiones en ℓ^p definimos

   $$d((x_n),(y_n)) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\Big)^{1/p}.$$

   Demuestre que d es una métrica para ℓ^p.

   c) *Si $\mathbf{x} = (x_n)$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$, sea x_N la sucesión que tiene los mismos N primeros términos que $\mathbf{x}$ y después todos sus términos son cero. Demuestre que si $\mathbf{x} \in \ell^p$ entonces x_N converge a $\mathbf{x}$ pero si $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ esto no necesariamente sucede.*

2. *Test de Raabe.*
   Suponga que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

   $$\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) = \ell.$$

   Demuestre que $\sum x_n$ converge si $\ell > 1$ y diverge si $\ell < 1$.
   (Ayuda: Sea $1 < a < \ell$, a partir del algún índice n_0

   $$n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) > a$$

   si $n > n_0$, y en consecuencia

   $$nx_n - (n+1)x_{n+1} > (a-1)x_{n+1}$$

   de modo que a partir de este índice la sucesión es decreciente y sumando esta última desigualdad se obtiene el resultado.