Capítulo 6

Derivadas

6.1. Introducción.

En este capítulo obtendremos los resultados básicos del cálculo diferencial para funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$ o sobre intervalos.

Definición 6.1 Sea $I \subset \mathbb{R}, I \neq \varnothing, f : I \to \mathbb{R}$ una función, y x un punto interior de I. Decimos que f es *diferenciable* en el punto x si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{6.1}$$

existe y en ese caso decimos que este límite es la *derivada* de la función f en el punto x. Usamos la notación $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ o $Df(x)$.

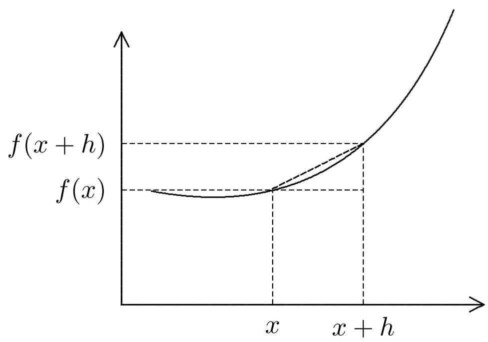


Figura 6.1

De esta manera asociamos a f una nueva función f' cuyo dominio es el conjunto J de puntos de I para los cuales el límite (6.1) existe. Decimos que f es diferenciable en J. Por las propiedades de los límites sabemos que si existe, es único.

Si f no es diferenciable en x es posible considerar en lugar de (6.1) los límites laterales del mismo cociente en el punto x. Llamamos *derivada lateral por la derecha* de la función f en el punto $x \in I$ al límite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

cuando existe, y usamos la notación $f'_+(x)$. Similarmente, la *derivada lateral por la izquierda* de f en $x \in I$ es

$$f'_-(x) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h - f(x))}{h}$$

cuando este límite existe. Esta claro que para que la función f sea diferenciable en x es necesario y suficiente que ambos límites existan y sean iguales.

Si f está definida sobre el intervalo $[a, b]$ la derivada de f en los extremos a y b, si existe, es una derivada lateral.

Ejemplos 6.1

1. Sea $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 0$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x. \end{aligned}$$

   en general, si $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, entonces f es diferenciable y $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ entonces $f'(x) = 1$ para $x > 0, f'(x) = -1$ para $x < 0$. En $x = 0$ tenemos $f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$ y la función no es diferenciable en este punto.

4. $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ no es diferenciable en ningún punto.

◀

Teorema 6.1 *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $x \in (a, b)$ entonces f es continua en x.*

Demostración. Para $h \neq 0$,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$$

y

$$\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = f'(x) \cdot \lim_{h \to 0} h = 0.$$

■

El ejemplo 3 muestra que el recíproco no es cierto: la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no diferenciable.

Teorema 6.2 *Sean f y g funciones reales definidas en el intervalo $I = (a, b)$ y diferenciables en todo punto de I. Sea $x \in I$*

(i) $f + g$ es diferenciable y $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)$ es diferenciable y $(\lambda f)'(x) = \lambda(f'(x))$.

(iii) fg es diferenciable y $(fg)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(iv) Si $g(x) \neq 0, (f/g)$ es diferenciable en x y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Demostración. (i) y (ii) se obtienen fácilmente a partir de la definición de derivada y las propiedades de límites.

(iii) Llamemos $\phi(x) = f(x)g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(x+h) - \phi(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))\end{aligned}$$

dividiendo por h y haciendo $h \to 0$, obtenemos por la continuidad de las funciones

$$\phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iv) Sea ahora $\phi(x) = f(x)/g(x)$, como $g(x) \neq 0$ y g es continua, $g(y) \neq 0$ en una vecindad de x y podemos suponer h suficientemente pequeño para que $x+h$ esté en esta vecindad y $g(x + h) \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi(x+h) - \phi(x) &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\big[g(x)(f(x+h) - f(x)) - f(x)(g(x+h) - g(x))\big]\end{aligned}$$

dividiendo por h, haciendo $h \to 0$ y usando la continuidad de las funciones se obtiene

$$\phi'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

■

Corolario 6.1 *Cualquier polinomio real es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.*

Corolario 6.2 *Cualquier función racional real es diferenciable en todo punto de su dominio.*

Corolario 6.3 *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-n}$ es diferenciable en todo punto de su dominio y $f'(x) = -nx^{-n-1}$*

Teorema 6.3 (Regla de la Cadena) *Sean $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ funciones y $a \in J$ tal que $g(a) \in I$. Entonces, si g es diferenciable en a y f es diferenciable en $g(a)$, $f \circ g$ es diferenciable en a y*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Demostración. Llamemos $b = g(a)$ y definamos las funciones α y β de la siguiente manera: $\alpha(a) = 0$, $\beta(b) = 0$ y para $x \neq a, y \neq b$,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a), \\ \beta(y) &= \frac{f(y) - f(b)}{y - b} - f'(b). \end{aligned}$$

Por la definición de derivada, $\alpha(x) \to 0$ cuando $x \to a$ y $\beta(y) \to 0$ cuando $y \to b$. Haciendo la sustitución $y = g(x)$ tenemos, usando la definición de β,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) &= f(y) - f(b) \\ &= (y - b)[f'(b) + \beta(y)] \\ &= (g(x) - g(a))[f'(g(a)) + \beta(g(x))] \end{aligned}$$

y usando ahora la definición de α obtenemos

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = (x - a)[g'(a) + \alpha(x)][f'(g(a)) + \beta(g(x))]$$

Por lo tanto, si $x \in J \setminus \{a\}$

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = [g'(a) + \alpha(x)][f'(g(a)) + \beta(g(x))]$$

haciendo $x \to a$ tenemos $\alpha(x) \to 0$, $g(x) \to g(a) = b$ y $\beta(g(x)) \to 0$, de donde obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = f'(g(a))g'(a).$$

■

Ejemplos 6.2
Supondremos conocidos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} e^x = e^x; \qquad &&\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0; \\ &\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x; \qquad &&\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

1. Sea $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$, entonces $f = g \circ h$ donde $h(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2$. Usando la regla de la cadena obtenemos $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Para $x > 0$ sea $f(x) = x^x$, Podemos escribir $f(x) = \exp(x \log x)$ de modo que
$$f'(x) = \exp(x \log x)[x \cdot 1/x + \log x] = x^x[1 + \log x]$$
para todo $x > 0$.

◄

Teorema 6.4 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona y continua en una vecindad de a, diferenciable en a con $f'(a) \neq 0$. Sea g la función inversa de f, si $b = f(a)$ entonces g es diferenciable en b y*
$$g'(b) = 1/f'(a)$$

Demostración. Usando la transformación $y = f(x)$ tenemos $g(y) = x$. Por lo tanto
$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \to \frac{1}{f'(a)} \text{ cuando } y \to b.$$

■

Ejercicios 6.1

1. *Para las siguientes funciones determine en cuáles puntos la función es diferenciable y halle el valor de la derivada.*

(a) $e^{\lvert x\rvert}$	(b) $\operatorname{sen}\lvert x\rvert$	(c) $\lvert\operatorname{sen} x\rvert$
(d) $[x]$	(e) $1/x$	(f) $\lvert x\rvert + \lvert x-1\rvert$

2. *Use la definición para calcular ala derivada de las siguientes funciones en el punto indicado.*

   (a) $f(x) = x^3 + x$ en $x = 3$.

   (b) $f(x) = x^2 \cos x$ en $x = 0$.

   (c) $f(x) = (2x + 3)/(3x + 4)$ en $x = 1$.

3. *Muestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y es diferenciable en todo punto de (a, b) con $f'(x) = 0$, entonces f es una función constante.*

4. *Suponga que f es diferenciable en a, demuestre que*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} = f'(a)$$

6.2. Extremos Locales.

Definición 6.2 Sea (X,d) un espacio métrico, $c \in X$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene un *máximo local* (resp. *mínimo local*) en c si para alguna vecindad V de c se tiene que $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$) para todo $x \in V$. Si f tiene un máximo o un mínimo local en c decimos que tiene un *extremo local* en c.

Teorema 6.5 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Si f tiene un extremo local en c y $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un máximo local en c. Por definición, existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ y $f(x) \leq f(c)$ siempre que $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Por lo tanto, si llamamos

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

tenemos que $g(x) \to f'(c)$ cuando $x \to c$ y además

$$\begin{aligned} g(x) \geq 0 \quad &si\ c - \delta < x < c \text{ y por lo tanto} f'(c) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \quad &si\ c < x < c + \delta \text{ y por lo tanto} f'(c) \leq 0. \end{aligned}$$

de donde concluimos que $f'(c) = 0$. ∎

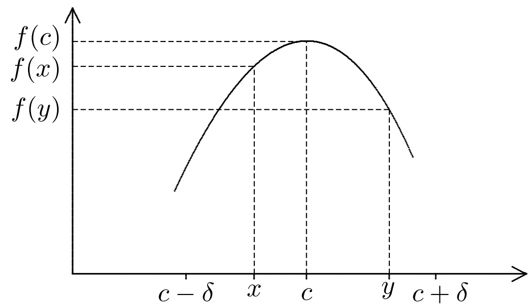


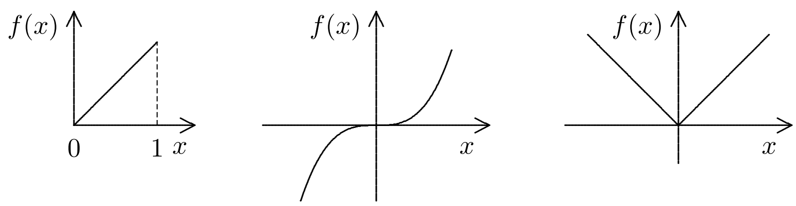
Figura 6.2

Observación 6.1

1. El punto c no puede ser un extremo del intervalo pues en este caso la conclusión del teorema puede ser falsa. Por ejemplo, $f(x) = x$ en $[0,1]$ (ver figura 6.3 a) tiene un máximo local en $x = 1$ y un mínimo en $x = 0$, pero en ambos puntos $f'(x) = 1 \neq 0$.

2. La condición es necesaria pero no suficiente: $f(x) = x^3$ satisface $f'(0) = 0$ pero no tiene un extremo local en este punto (ver figura 6.3 b).

3. La función puede no tener derivada en el punto c donde tiene un extremo local. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ en $c = 0$ (ver figura 6.3 c).



a) $f(x) = x$ en [0,1] b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = |x|$

Figura 6.3

Ejercicios 6.2

1.

6.3. Teoremas del Valor Medio

A continuación estudiaremos algunos de los resultados fundamentales sobre derivadas.

Teorema 6.6 (Rolle) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Demostración. Como el intervalo $[a, b]$ es compacto y f es continua, por el Corolario 5.12 existen u y v en $[a, b]$ tales que $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ para todo $x \in [a, b]$. Tenemos ahora dos posibilidades:

- u y v coinciden con los extremos del intervalo y entonces $f(u) = f(a) = f(b) = f(v)$ y f es constante. En este caso $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ y podemos tomar cualquier punto de este intervalo como ξ.

- Al menos uno de los puntos u, v está en (a, b). Supongamos que es v. La función tiene un máximo local en v y es diferenciable en ese punto. Por el Teorema 6.5 tenemos $f'(v) = 0$ y podemos tomar $\xi = v$.

∎

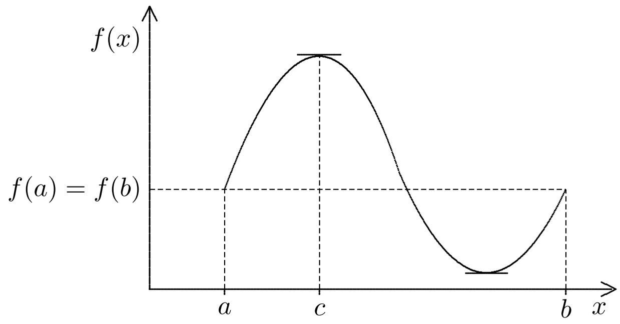


Figura 6.4

Teorema 6.7 (del Valor Medio, Lagrange) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi).$$

Demostración. Definimos

$$g(x) = f(x) + \frac{b-x}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Entonces $g(b) = g(a)$ y g satisface las condiciones de continuidad y diferenciabilidad del Teorema 6.6. Por lo tanto existe $\xi \in (a,b)$ tal que $g'(\xi) = 0$ es decir

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

de donde se obtiene el resultado.

■

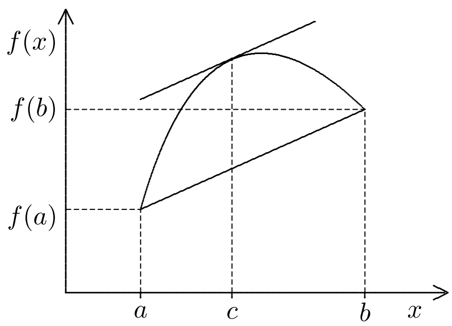


Figura 6.5

Corolario 6.4 *Supongamos que f satisface las condiciones del Teorema 6.7, entonces* *(i)* $f'(x) = 0$ *para* $x \in (a,b) \Rightarrow f$ *es constante en* $[a,b]$.

(ii) $f'(x) \geq 0$ *para* $x \in (a,b) \Rightarrow f$ *es creciente en* $[a,b]$.

(iii) $f'(x) \leq 0$ *para* $x \in (a,b) \Rightarrow f$ *es decreciente en* $[a,b]$.

(iv) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (a,b) \Rightarrow f$ *es estrictamente creciente en* $[a,b]$.

(v) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (a,b) \Rightarrow f$ *es estrictamente decreciente en* $[a,b]$.

Demostración. Veamos (ii), el resto se prueba de manera similar: sean $c < d$ en $[a,b]$ y usemos el Teorema 6.7 para $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, obteniendo para algún $\xi \in (c,d)$

$$f(d) - f(c) = (d-c)f'(\xi) \geq 0$$

■

Teorema 6.8 (Generalizado del Valor Medio, Cauchy) *Sean f y g funciones continuas sobre $[a,b]$, diferenciables sobre (a,b). Existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

Demostración. Definimos $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ Esta función satisface las hipótesis del Teorema de Rolle y por lo tanto existe $\xi \in (a,b)$ tal que $h'(\xi) = 0$, de donde se obtiene el resultado. ■

Teorema 6.9 *Sea $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (c,d), $[a,b] \subset (c,d)$ y sea γ un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$. Entonces existe $u \in (a,b)$ tal que $f'(u) = \gamma$.*

Demostración. Supongamos $f'(a) < \gamma < f'(b)$, el otro caso se prueba de manera similar. Definimos $g(x) = f(x) - \gamma x$ y entonces

$$\begin{aligned} &g'(a) < 0 \text{ de modo que } g(x_1) < g(a) \text{ para algún } x_1 \in (a,b), \\ &g'(b) > 0 \text{ de modo que } g(x_2) < g(b) \text{ para algún } x_2 \in (a,b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función continua g alcanza su mínimo sobre $[a,b]$ en algún punto $u \in (a,b)$. Por el Teorema 6.5 se tiene $g'(u) = 0$ y $f'(u) = \gamma$. ■

Corolario 6.5 *Si f es diferenciable en $[a,b]$ entonces f' no puede tener discontinuidades simples en $[a,b]$.*

Ejercicios 6.3

1. *Demuestre que las siguientes funciones reales definidas sobre el intervalo $[a,b]$ satisfacen las condiciones del Teorema de Rolle y encuentre un punto $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$:*

$$\begin{aligned} &(i) \quad a = 0, b = 1, \quad f(x) = \sqrt{x(x-1)} \\ &(ii) \quad a = 1, b = 2, \quad f(x) = (x-1)(2-x) \\ &(iii) \quad a = 1, b = 3, \quad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

2. *En los siguientes casos halle, si es posible, un número x que satisfaga las condiciones del Teorema de Rolle. Si en algún caso no puede hallar tal x ¿cuál de las condiciones del teorema no es válida? (i) $a = 1, b = 3, f(x) = x(x-2)(x-4)$, (ii) $a = -1, b = 3, f(x) = \frac{1}{x^2}$, (iii) $a = -1, b = 1, f(x) = x^{1/3}$.*
3. *Usando el Teorema del Valor Medio demuestre que $1 - x^\alpha < \alpha(1-x)$ para $0 < x < 1, \alpha > 1$.*
4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es diferenciable en todo punto de (a,b) con $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Demuestre que f es constante.*
5. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la condición: $|g(x) - g(y)| \leq (x-y)^2$ para x, y en $\mathbb{R}$, muestre que g es una función constante.*
6. *Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales tales que $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, entonces existe al menos un punto $x \in (0,1)$ tal que $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$.*

6.4. Regla de L'Hôpital

Teorema 6.10 *Sean $a < b$ en $\mathbb{R}^*$, f y $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Supongamos que*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^* \tag{6.2}$$

y que además se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0.$

(ii) $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \infty.$

Entonces

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

El enunciado es cierto reemplazando "$x \downarrow a$" por "$x \uparrow b$" y/o "∞" por "$-\infty$".

Demostración. Consideremos primero el caso $-\infty \leq \ell < \infty$ y sea $v \in \mathbb{R}$ tal que $\ell < v$. Escogemos ahora $\ell < r < v$, por (6.2) existe $c \in (a,b)$ tal que $a < x < c$ implica

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Si $a < x < y < c$, el Teorema Generalizado del Valor Medio dice que existe $d \in (x,y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} < r. \tag{6.3}$$

Supongamos que (i) es cierto, haciendo $x \downarrow a$ vemos que

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < v \qquad (a < y < c). \tag{6.4}$$

Si suponemos en cambio que (ii) es cierto, manteniendo y fijo en (6.3) podemos escoger $c_1 \in (a, y)$ tal que $g(x) > g(y)$ y $g(x) > 0$ si $a < x < c_1$. Multiplicando (6.3) por $[g(x) - g(y)]/g(x)$ obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1).$$

Haciendo $x \downarrow a$ en la desigualdad anterior la condición (ii) muestra que existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < v \qquad (a < x < c_2). \tag{6.5}$$

Resumiendo, (6.4) y (6.5) muestran que para cualquier $v > \ell$ existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < v \quad (a < x < c_2)$. De manera similar, si $-\infty < \ell \leq \infty$ y escogemos $u < \ell$ podemos hallar c_3 tal que

$$u < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad a < x < c_3.$$

Esto termina la demostración. ■

Ejemplo 6.3
Veamos que $\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{1/x}$. Escribimos

$$(e^x + x)^{1/x} = \exp\{\frac{1}{x}\log(e^x + x)\}.$$

Sea $f(x) = \log(e^x + x), \quad g(x) = x$. Entonces $g(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$. Aplicando la regla de L'Hospital,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + 1}{e^x + x} \to 1 \text{ cuando } x \to \infty.$$

y la continuidad de la función exponencial nos dice que el límite que buscamos es e. ◀

Ejercicios 6.4

1. *Calcule los siguientes límites, si existen*

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x}$, *(b)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$.

6.5. El Teorema de Taylor.

Definición 6.3 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de longitud positiva, $a \in I$ y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en alguna vecindad de a. Si f' es diferenciable en a llamamos a su derivada la *segunda derivada de f en a* y la denotamos $f''(a), D^2 f(a)$ o $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$. Así $f''(a) = (f')'(a)$.

Definición 6.4 Si para algún $n \in \mathbb{N}, D^{n-1}f$ está definida en alguna vecindad de a y tiene derivada en a, decimos que esta es la *n-ésima derivada de f en a* y la denotamos $f^{(n)}(a), D^n f(a)$ ó $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$. También la llamamos la *derivada de orden n* de f en a.

Definición 6.5 Si f tiene derivada finita de orden n en cada punto de I decimos que f es *n veces diferenciable* en I. Si f tiene derivadas finitas de todos los órdenes en a decimos que f es *infinitamente diferenciable en a*. Si esto es cierto en todo punto de I decimos que f es *infinitamente diferenciable en I* o que f es una función $\mathcal{C}^\infty$ en I y escribimos $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Si $f^{(n)}$ es continua en I para algún $n \geq 0$ escribimos $f \in \mathcal{C}^n(I)$, de modo que $\mathcal{C}^n(I)$ es el conjunto de las funciones que tienen n derivadas continuas en I. Es evidente que $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I)$.

Teorema 6.11 *Sean f y g funciones de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son ambas n veces diferenciables en $a \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f, f+g$ y fg son n veces diferenciables en a y*

$$\begin{aligned}(\lambda f)^{(n)}(a) &= \lambda f^{(n)}(a),\\ (f+g)^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),\\ (fg)^{(n)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a).\end{aligned}$$

Esta última relación se conoce como la fórmula de Leibniz.

Demostración. Basta usar el Teorema 6.2 e inducción en n. ■

Teorema 6.12 (Taylor) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en $[a,b]$ y existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Sean $\alpha \neq \beta$ puntos en $[a,b]$ y para $x \in [a,b]$ definimos*

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k,\\ R_n(x) &= f(x) - P_n(x).\end{aligned}$$

Para $p \in \mathbb{N}$ fijo existe $\xi \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$R_n(\beta) = \frac{(\beta-\xi)^{n-p}(\beta-\alpha)^p}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi).$$

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) &= f(\beta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\beta-x)^k,\\ g(x) &= \mathcal{F}(x) - \left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)^p \mathcal{F}(\alpha).\end{aligned}$$

Entonces $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ y g satisface las condiciones del Teorema de Rolle. Por lo tanto existe $\xi \in (\alpha, \beta)$ tal que $g'(\xi) = 0$, es decir

$$0 = g'(\xi) = \mathcal{F}'(\xi) + \frac{p(\beta - \xi)^{p-1}}{(\beta - \alpha)^p}\mathcal{F}(\alpha),$$

pero

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(\xi) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(\beta - \xi)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}k(\beta - \xi)^{k-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(\beta - \xi)^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(\beta - \xi)^k \\
&= -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(\beta - \xi)^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{(\beta - \xi)^{n-p}(\beta - \alpha)^p}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

y es fácil verificar que $\mathcal{F}(\alpha) = R_n(\beta)$. ■

R_n se conoce como el resto y la expresión que aparece en el enunciado del teorema se debe a Schlömilch. Como casos particulares se obtienen:
$p = n$ (Lagrange):

$$R_n(\beta) = \frac{(\beta - \alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \tag{6.6}$$

$p = 1$ (Cauchy):

$$R_n(\beta) = \frac{(\beta - \alpha)^n}{(n-1)!}(1 - \theta)^{n-1} f^{(n)}(\alpha + \theta(\beta - \alpha)) \text{ donde } 0 < \theta < 1 \tag{6.7}$$

Ejemplo 6.4
Queremos calcular $e^{0,25}$ con un error menor a 10^{-4}. Para ello vamos a usar el Teorema de Taylor para la función $f(x) = e^x$, usando el valor de esta función y sus derivadas en $\alpha = 0$ para aproximar el valor en $\beta = 0{,}25$.

Como sabemos, todas las derivadas de la función son iguales a la función y valen 1 en $\alpha = 0$. Por lo tanto $P_n(x)$ tiene una expresión sencilla

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

y para obtener la aproximación que buscamos basta determinar el valor de n y evaluar este polinomio en $x = 0{,}25$. Para lo primero buscamos el valor de n que hace que el valor absoluto del resto sea menor que 10^{-4}. Si usamos la expresión de Lagrange para el resto obtenemos

$$R_n(\beta) = \frac{(0{,}25)^n}{n!} e^{\xi}$$

donde $0 < \xi < 0{,}5$. Sabemos que $e < 4$ y por lo tanto $e^{\xi} < 4^{0{,}25} = \sqrt{2} < 1{,}5$. Por lo tanto, para lograr la precisión deseada basta con hallar n para el cual

$$\frac{1{,}5}{4^n n!} < 10^{-4}$$

Para $n = 5$ tenemos que la expresión anterior es $0{,}00001221 < 10^{-4}$. Por lo tanto basta calcular el polinomio

$$\begin{aligned} P_5(0{,}25) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{0{,}25^k}{k!} = 1 + 0{,}25 + \frac{0{,}25^2}{2} + \frac{0{,}25^3}{3} + \frac{0{,}25^4}{4} \\ &= 1 + 0{,}25 + 0{,}03125 + 0{,}0026041 + 0,000162 = 1{,}2840161 \end{aligned}$$

El verdadero valor es 1.28402541. ◀

6.5.1. Máximos y Mínimos

Si $f^{(n)}$ existe en una vecindad de a, es continua en a y además $f^{(k)}(a) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$ pero $f^{(k)}(a) \neq 0$ entonces

$$f(x) - f(a) \simeq \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \text{ cuando } x \to a.$$

Así si n es par:

- la función tiene un máximo en a si $f^{(n)}(a) < 0$,
- la función tiene un mínimo en a si $f^{(n)}(a) > 0$.

Si n es impar, a no es ni un máximo ni un mínimo sino un punto de inflexión.

Ejemplo 6.5
Consideremos la función $f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$. La derivada de esta función es $f'(x) = e^x - 2\operatorname{sen} x - e^{-x}$ y vemos que la derivada se anula en $x = 0$. Para ver si hay un extremo y de que tipo es, calculamos las derivadas siguientes y las evaluamos en este punto, obteniendo

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x - 2\cos x + e^{-x} & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= e^x + 2\operatorname{sen} x - e^{-x} & f'''(0) &= 0, \\ f^{(iv)}(x) &= e^x + 2\cos x - e^{-x} & f^{(iv)}(0) &= 4. \end{aligned}$$

y por lo tanto, la función tiene un mínimo en $x = 0$.

Ejercicios 6.5

1. *Halle la serie de Taylor para* $\operatorname{sen} x$ *y diga por qué converge a* $\operatorname{sen} x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto y sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función con segunda derivada en* $a \in I$. *Muestre que para* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |h| < \delta$ *entonces*
$$\left| \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} - f''(a) \right| < \varepsilon$$
3. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua y* f'' *existe y es estrictamente positiva en* (a,b), *muestre que* $(f(x) - f(a))/(x-a)$ *es una función estrictamente creciente de* x *en* (a,b).
4. $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$ *y* $h \leq f^{(n)}(x) \leq H$ *para* $x \in (a,b)$. f *y sus* $n-1$ *primeras derivadas se anulan en* $x = a$. *Muestre que* $\frac{h(x-a)^n}{n!} \leq f(x) \leq \frac{H(x-a)^n}{n!}$ *para* $x \in (a,b)$.

Ejercicios Complementarios

1.
2.
3.