Capítulo 9

Sucesiones de Funciones

9.1. Sucesiones de Funciones.

En los capítulos 3 y 4 vimos que una sucesión de números reales es, simplemente, una colección *numerable y ordenada* de números reales. De manera similar, una sucesión de funciones es una colección *numerable y ordenada* de funciones. En general supondremos que el conjunto de índices es $\mathbb{N}$, aunque ocasionalmente usaremos los enteros no-negativos o $\mathbb{Z}$. Usaremos la notación $(f_n)_{n\geq 1}$ o $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ para indicar una sucesión de funciones.

Ejemplos 9.1

1. Las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ n \geq 1$ definidas por $f_n(x) = x^n$ forman una sucesión cuyo conjunto de índices es $\mathbb{N}$.

2. Las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$ definidas por $f_n(x) = nx$, también forman una sucesión pero con índices en $\mathbb{Z}$. ◀

Definición 9.1 Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ y sea también f una función de S en $\mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge puntualmente* a f en S si, para todo $s \in S$, la sucesión $(f_n(s))_{n\geq 1}$ converge a $f(s)$:

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

y entonces escribimos $f_n \to f$ (puntualmente). Desarrollando esto en detalle, para cada $s \in S$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon, \qquad \text{siempre que } n \geq N.$$

Es fundamental observar que la selección de N se hace luego de conocer s y ϵ, de modo que N puede depender de ambos.

Ejemplos 9.2

1. $S = [0,1], f_n \colon S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(s) = \begin{cases} 1 - ns & \text{si } 0 \le s \le 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n < s \le 1, \end{cases}$$

y sea $f \colon S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < s \le 1 \\ 1 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Es trivial ver que $f_n(0)$ converge a $f(0) = 1$, mientras que si $0 < s \le 1$ y $\epsilon > 0$ tenemos $|f_n(s) - f(s)| = |f_n(s)| = 0 < \epsilon$ si $n > 1/s$, por lo tanto $f_n \to f$ puntualmente en S.

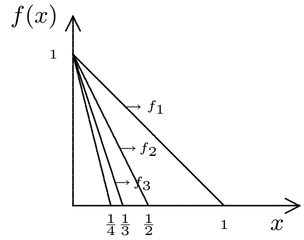

Figura 9.1: La sucesión f_n.

2. $S = [0,1]$ y para $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ está definida por $f_n(s) = s^n$. Sea $f \colon S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le s < 1, \\ 1 & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

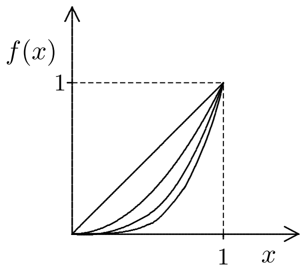

Figura 9.2: La sucesión f_n.

Es fácil ver que $f_n(1) \to f(1) = 1$, mientras que si $0 \le s < 1$,

$$|f_n(s) - f(s)| = |s^n| < \epsilon \qquad \text{si } n > \log\epsilon / \log s.$$

En este caso la dependencia de N en ϵ y s es clara.

3. $S = \mathbb{R}$ y para $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(s) = s/n$. Definimos $f \colon S \to \mathbb{R}$ por $f(s) = 0$ para $s \in \mathbb{R}$. De nuevo es claro que $f_n \to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$: si $s \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$,

$$|f_n(s) - f(s)| = \frac{|s|}{n} < \epsilon \qquad \text{si } n > \frac{|s|}{\epsilon}.$$

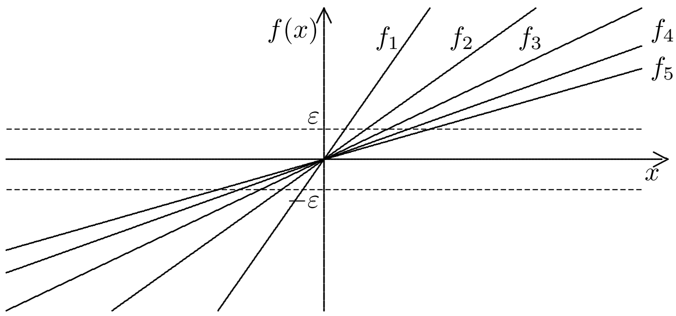

Figura 9.3: La sucesión f_n.

Por lo tanto el menor valor de N para el cual la afirmación:

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon \qquad \text{cuando } n > N$$

es cierta es la parte entera de $|s|/\epsilon$, y está claro que dado $\epsilon > 0$ no podemos escoger un único N que haga cierta la afirmación anterior para todo s.

4. Si en el ejemplo anterior tomamos $S = [0, 1]$ tenemos, por supuesto, que $f_n \to f$ en S, pero en este caso si $\epsilon > 0$ y $N = [1/\epsilon]$ entonces

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon$$

para $n > N$ y todo $s \in S$. La diferencia es que ahora, dado ϵ podemos hallar un N que sirve para todo $s \in S$.

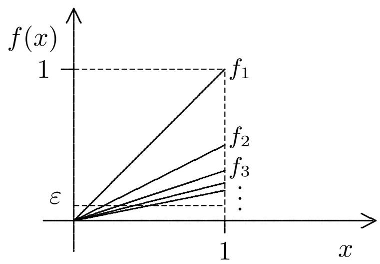

Figura 9.4: La sucesión f_n.

◀

5. $S = [0,1]$, $f_n(s) = ns(1-s)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n(s) \to 0$ para todo $s \in [0,1]$. Observamos que f_n tiene un máximo local en $s = 1/(n+1)$ de modo que, a medida que n crece, este máximo se desplaza hacia la izquierda. Además

$$f_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1} \to e^{-1}$$

El problema principal que nos planteamos ahora es determinar si ciertas propiedades de las funciones de la sucesión, también son compartidas por la función límite; en particular, si las funciones f_n son continuas, diferenciables o integrables, ¿es lo mismo cierto para f? ¿qué relación hay entre f_n' y f', o entre las integrales de las funciones f_n y la de f?

Por ejemplo, si $f_n \to f$ puntualmente, decir que f es continua en x quiere decir que

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$$

o sea

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

de modo que si las funciones f_n son continuas en x esto es

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$$

y la pregunta que nos estamos haciendo es si da lo mismo tomar los límites en cualquier orden. En general esto no es posible sin afectar el resultado: en los ejemplos 2.2.1 y 2 vemos funciones discontinuas que son límite de sucesiones de funciones continuas.

Ejemplos 9.3

1. Para m y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Cuando $m!x$ es entero, $f_m(x) = 1$. Para cualquier otro valor de x, $f_m(x) = 0$. Sea

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ y por lo tanto $f(x) = 0$. Para x racional, $x = p/q$ digamos, vemos que $m!x$ es entero si $m \geq q$ y entonces $f(x) = 1$. Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

2. Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{sen} nx \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

entonces $f'(x) = 0$ y $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$, de modo que f'_n no converge a f', por ejemplo,

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

mientras que $f'(0) = 0$.

3. Sea $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ para $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$. Podemos escribir $1-x^2 = \frac{1}{1+y}$ donde $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ y por lo tanto

$$(1-x^2)^n = \frac{1}{(1+y)^n}\ .$$

Por el teorema binomial

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k > \binom{n}{j} y^j$$

para cualquier $0 \le j \le n$. Si $j > 2$

$$n^2(1-x^2)^n = \frac{n^2}{(1+y)^n} < \frac{n^2}{\binom{n}{j}y^j} = \frac{n^2}{\frac{n!}{j!(n-j)!}y^j}$$

y como j está fijo, $j > 2$, esto tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Por otro lado es fácil ver que

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{-1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

de modo que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty.$$

Si en lugar de $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ tenemos $nx(1-x^2)^n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

◄

Ejercicios 9.1

1. *Halle el límite puntual (si existe) de la sucesión (f_n) de funciones de S en $\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:*

$$i)\ S=\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad ii)\ S=\mathbb{R},\ f_n(x)=\begin{cases} n & si\ -n\le x\le n,\\ 0 & si\ |x|>n\end{cases}$$

$$iii)\ S=[0,1],\ f_n(x)=nx(1-x^2)^n \qquad iv)\ S=\mathbb{R},\ f_n(x)=\begin{cases} 1 & si\ -n\le x\le n,\\ 0 & si\ |x|>n\end{cases}$$

$$v)\ S=[0,1],\ f_n(x)=\frac{x^n}{n} \qquad vi)\ S=[0,1],\ f_n(x)=\begin{cases} nx & si\ 0\le x\le 1/n\\ \frac{n(1-x)}{n-1} & si\ 1/n<x\le 1\end{cases}$$

$$vii)\ S=[0,1],\ f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n} \qquad viii)\ S=[0,\infty),\ f_n(x)=\begin{cases} \frac{x}{n} & si\ 0\le x\le n\\ 1 & si\ x>n\end{cases}$$

$$ix)\ S=[0,1],\ f_n(x)=\frac{x^n}{n+x^n} \qquad x)\ S=\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{x^2+nx}{x}$$

2. *Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función continua salvo en un único punto c del intervalo I. Obtenga una sucesión de funciones continuas $f_n:I\to\mathbb{R}$ que converja puntualmente a f. Generalice para un función f con un número finito de discontinuidades.*

9.2. Convergencia Uniforme.

Definición 9.2 Sea $S\subset\mathbb{R}$ un conjunto, $(f_n)_{n\ge1}$ una sucesión de funciones de S en $\mathbb{R}$ y $f\colon S\to\mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\ge1}$ *converge uniformemente* a f en S si para cada $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(s),f(s)|<\epsilon \qquad \text{si } n>N \text{ y } s\in S. \tag{9.1}$$

Decimos que f es el *límite uniforme* de (f_n) y que $f_n\to f$ *uniformemente* en S. Es importante observar que en este caso el valor de N a partir del cual vale la relación (9.1) es el mismo para todo $s\in S$.

Ejemplo 9.4

1. Sea $S=\{s\colon s>0\}$ y para $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$f_n(s)=\frac{s}{1+ns}; \qquad f(s)=0.$$

Si $s \in S$ tenemos

$$|f_n(s) - f(s)| = \left|\frac{s}{1+ns}\right| < \frac{s}{ns} = \frac{1}{n} < \epsilon$$

para $n > 1/\epsilon$. Por lo tanto (f_n) converge uniformemente a f en S. ◀

Si $Y \subset \mathbb{R}$ podemos ilustrar la noción de convergencia uniforme con un diagrama. Si $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

siempre que $x \in [a,b]$ y $n > N$. Esto quiere decir que si $n > N$ la gráfica de la función f_n debe estar dentro de la banda del diagrama.

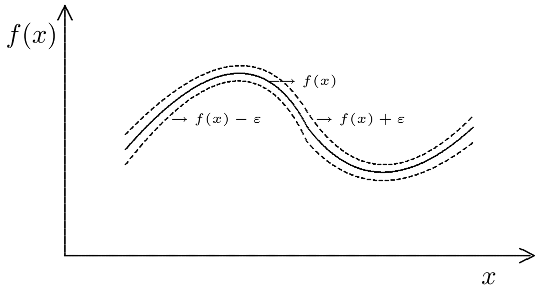

Figura 9.5: Convergencia Uniforme.

Es evidente a partir de las definiciones que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f entonces también converge puntualmente.

Teorema 9.1 (Condición uniforme de Cauchy) *La sucesión de funciones (f_n) definidas en S con valores en $\mathbb{R}$ converge uniformemente en S si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $m \geq N$, $n \geq N$, y $s \in S$ entonces*

$$|f_n(s) - f_m(s)| < \epsilon. \tag{9.2}$$

Demostración. Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en S, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $s \in S$

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

de modo que

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leq |f_n(s) - f(s)| + |f(s) - f_m(s)| \leq \epsilon$$

siempre que $n \geq N, m \geq N$ y $s \in S$. Supongamos ahora que la condición de Cauchy es válida. Por la completitud de los números reales, para cada $s \in S$ la sucesión $(f_n(s))$ converge a un límite en $\mathbb{R}$ que llamaremos $f(s)$. Por lo tanto la sucesión (f_n) converge a f en S. Falta ver que la convergencia es uniforme.

Sea $\epsilon > 0$ dado y tomemos N de modo que (9.2) sea cierto. Fijando n y haciendo $m \to \infty$ obtenemos

$$|f_n(s) - f(s)| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ y todo $s \in S$. ■

Teorema 9.2 *Supongamos que $f_n \to f$ puntualmente en S y sea*

$$M_n = sup_{s\in S}|f_n(s) - f(s)|.$$

Entonces $f_n \to f$ uniformemente en S si y sólo si $M_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Inmediato a partir de la definición. ■

Ejercicios 9.2

1. *En cada uno de los casos del ejercicio 2.1 determine si la convergencia es uniforme o no.*
2. *Estudie la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(x) = x^n$*
   i) en $X = [0, \eta]$ para $0 < \eta < 1$; ii) en $X = [0, 1]$; iii) en $[0, 1)$.
3. *Verifique que la convergencia uniforme a 0 sobre un intervalo I de una sucesión de funciones es equivalente a la condición siguiente: Existe una sucesión (a_n) de números reales que tienden a 0 tal que para n suficientemente grande y para todo $x \in I$ se tiene que $|f_n(x)| \leq a_n$.*
4. *Suponga que $f_n \to f$ uniformemente en S y $g_n \to g$ uniformemente en S. Demuestre que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente en S.*
5. *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua y para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n(x) = f(x + 1/n)$ sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que (f_n) converge uniformemente.*
6. *Sea K un conjunto compacto y (f_n) una sucesión de funciones reales continuas definidas sobre K que convergen puntualmente en K a la función continua f. Si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$ entonces f_n converge uniformemente a f.*
7. *Definimos las siguientes sucesiones de funciones*

$$f_n(x) = x(1 + \frac{1}{n}), \quad \text{si } x \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional,} \\ b + \frac{1}{n}, & \text{si } x \text{ es racional }, x = \frac{a}{b},\ b > 0,\ a, b \text{ primos relativos.} \end{cases}$$

   Demuestre que (f_n) y (g_n) convergen uniformemente en todo intervalo finito pero su producto $h_n(x) = f_n(x) \cdot g_n(x)$ no converge uniformemente en ningún intervalo finito.
8. *Suponga que $f_n \to f$ uniformemente en S y $g_n \to g$ uniformemente en S. Sea $h_n(x) = f_n(x) \cdot g_n(x)$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. El ejercicio anterior muestra que, en general, no es cierto que $h_n \to h$ uniformemente en S. Demuestre que bajo la hipótesis adicional de que las funciones f_n y g_n son acotadas, el resultado sí es válido.*

9.3. Convergencia Uniforme y Continuidad.

Teorema 9.3 *Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $S \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente a $f\colon S \to \mathbb{R}$ entonces f es continua.*

Demostración. Tenemos que mostrar que si $x \in S$ y $\epsilon > 0$ entonces para algún $\delta > 0$

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

Supongamos que $x \in S$ y $\epsilon > 0$, como $f_n \to f$ uniformemente en S, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{si } n > N \text{ y } t \in S.$$

Escogemos $n > N$, como f_n es continua existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(t)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

Por lo tanto, si $d|x - t| < \delta$

$$|f(x) - f(t)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)|$$

y cada uno de los términos de la derecha es menor que $\epsilon/3$, el primero y el último por (9.3), ya que $n > N$, y el segundo por (9.3), ya que $|x - t| < \delta$. Por lo tanto

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - t| < \delta.$$

y esto concluye la demostración. ◀

Observación 9.1 En el ejemplo 9.2.3 la convergencia no es uniforme pero la función límite es continua. Esto muestra que la condición del teorema es suficiente pero no necesaria.

Para $S \subset \mathbb{R}$ llamaremos $\mathcal{C}(S)$ a la familia de las funciones reales continuas y acotadas definidas en S. Si S es compacto entonces basta con pedir que las funciones sean continuas. Para cada función $f \in \mathcal{C}(S)$ definimos la norma supremo de f por

$$||f||_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Como hemos supuesto que f es acotada, $||f||_\infty < \infty$. Además, $||f||_\infty = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ para todo $x \in S$. Finalmente, si $g \in \mathcal{C}(S)$ y definimos $h(x) = f(x) + g(x)$ entonces $h \in \mathcal{C}(S)$ y tenemos

$$|h(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

para cualquier $x \in S$. Por lo tanto

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Estas tres propiedades muestran que la función $\|\ \|_\infty\colon \mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}^+$ es una norma.

Para $f, g \in \mathcal{C}(S)$ definimos la distancia entre ellas por

$$\rho(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|.$$

Lo anterior muestra que ρ es una métrica sobre el espacio $\mathcal{C}(S)$ y el Teorema 9.2 nos dice que la sucesión (f_n) en $\mathcal{C}(S)$ converge a $f \in \mathcal{C}(S)$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente en S.

Teorema 9.4 *$(\mathcal{C}(S), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Usar los Teoremas 9.1 y 9.3. ◄

Ejercicios 9.3

1. *Dé contraejemplos que muestren que si la convergencia no es uniforme, el límite no tiene por que ser continuo.*
2. *Suponga que (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n(x) = f_n(x + 1/n)$. Demuestre que la sucesión (g_n) converge puntualmente a f.*
3. *Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y cualquier sucesión (x_n) que converja a x, se tiene que $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$.*
4. *Si las funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas en E y $f_n \to f$ uniformemente en E entonces f es uniformemente continua en E.*

9.4. Convergencia Uniforme y Diferenciación

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f_n\colon I \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones que convergen puntualmente a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si para algún $a \in I$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es diferenciable en a, es natural preguntarse si f es diferenciable en a y si $(f_n'(a))$ converge a $f'(a)$. Planteadas de esta manera, ambas preguntas tienen respuestas negativa. Es posible que f no sea diferenciable en a y si lo es, puede suceder que $(f_n'(a))$ no converja a $f'(a)$ o simplemente que no converja en absoluto.

Ejemplos 9.5

1. Sea $I = \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, y $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces si $x \neq 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y como $f_n(0) = 0$, vemos que $f_n \to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$. Evidentemente $f'(0) = 0$ y $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, $f_n'(0) = 1$ de modo que $f_n'(0)$ no converge a $f'(0)$ aún cuando $(f_n'(0))$ converge.

2. Sea $I = \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ para $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es fácil ver de nuevo que $f_n \to f$ puntualmente en $\mathbb{R}$ y que además $f_n'(0) = n$. En este caso f es diferenciable en 0 pero $f_n'(0)$ no converge.

3. Sea $I = (0, \infty), f_n(x) = \frac{1-x}{1+x^n}$ para $x \in I,\ n \in \mathbb{N}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No es difícil ver que $f_n \to f$ puntualmente en I y que f no es diferenciable en 1. Como $f_n'(1) = -1/2,\ (f_n'(1))$ converge pero f no es diferenciable en 1.

4. Sea $I = (0, \infty), f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ para $x \in I,\ n \in \mathbb{N}$ y

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

De nuevo es posible mostrar que $f_n \to f$ puntualmente en I y que $f_n'(1) = n/4$ de modo que f no es diferenciable en 1 y $(f_n'(1))$ no converge.

◀

Teorema 9.5 *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales que son diferenciables en el intervalo (a, b). Supongamos que al menos para un punto $x_0 \in (a, b)$ la sucesión $(f_n(x_0))$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $f_n' \to g$ uniformemente en (a, b). Entonces*
i) Existe una función f tal que $f_n \to f$ uniformemente en (a, b).
ii) Para todo $x \in (a, b)$ la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $g(x)$.

Demostración. Fijamos $z \in (a, b)$ y definimos una nueva sucesión de funciones g_n

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z}, & \text{si } x \neq z, \\ f_n'(z), & \text{si } x = z. \end{cases} \tag{9.3}$$

Esta sucesión depende de la selección de z. La sucesión $g_n(z) = f_n'(z)$ converge por hipótesis. Veamos que (g_n) converge uniformemente en (a, b). Si $x \neq z$ tenemos

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{h(x) - h(z)}{x - z}$$

donde $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Por hipótesis $h'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$ y vale $f_n'(x) - f_m'(x)$. Usando el Teorema del Valor Medio obtenemos

$$g_n(x) - g_m(x) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi),$$

donde ξ está entre x y z. Como, por hipótesis, (f'_n) converge uniformemente en (a,b), podemos usar esta relación y el criterio de Cauchy para deducir que (g_n) converge uniformemente en (a,b).

Veamos ahora que (f_n) converge uniformemente en (a,b) Tomemos $z = x_0$ y recordemos que por hipótesis $(f_n(x_0))$ converge. A partir de 9.3 obtenemos

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x)$$

que es válida para todo $x \in (a,b)$. Por lo tanto

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)(g_n(x) - g_m(x)).$$

Usando de nuevo el criterio de Cauchy, esta ecuación demuestra la convergencia uniforme de (f_n) en (a,b). Esto demuestra (i).

Para demostrar (ii) sea $G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ donde g_n se define por (9.3) para un punto arbitrario $z \in (a,b)$ Como por hipótesis la derivada f'_n existe, se tiene que $\lim_{x\to z} g_n(x) = g_n(z)$, es decir, las funciones g_n son continuas en z. Como $g_n \to G$ uniformemente en (a,b), la función límite G también es continua en z. Esto quiere decir que

$$G(z) = \lim_{x\to z} G(x), \tag{9.4}$$

Pero para $x \neq z$ tenemos

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}.$$

Por lo tanto (9.4) dice que la derivada $f'(z)$ existe y es igual a $G(z)$. Pero

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z) = g(z),$$

y en consecuencia $f'(z) = g(z)$. Como $z \in (a,b)$ es arbitrario esto concluye la demostración. ■

Observación 9.2 Las condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, en el intervalo $[0,1]$, $f_n(x) = x^n/n$ converge a $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ y $f'_n \to f'$ puntualmente pero no uniformemente

---

Ejercicios 9.4

1. *Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$. Muestre que (f_n) converge uniformemente a una función f y que la ecuación $f'(x) = \lim f'_n(x)$ es válida.*

2. *Estudie la convergencia de la serie $\Sigma e^{-n} \cos n^2 x$ y demuestre que su suma es una función infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$.*

3. *Demuestre la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ de la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{n^2}.$$

¿Converge uniformemente la serie de derivadas?

4. *Considere la sucesión*

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)^{1/2}$$

Demuestre que f_n converge uniformemente en $[-1,1]$ a una función $f(x)$. Determine si f es diferenciable. ¿Para cuáles valores de x es cierto que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$?

5. *Sea $f_n(x) = x/(1+nx^2)$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Halle $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$*

   a) Demuestre que $f'(x)$ existe para todo x pero que $f'(0) \neq g(0)$. ¿Para qué valores de x se tiene que $f'(x) = g(x)$?

   b) ¿En cuáles subintervalos de $\mathbb{R}$ se tiene que $f_n \to f$ uniformemente?

   c) ¿En cuáles subintervalos de $\mathbb{R}$ se tiene que $f_n' \to g$ uniformemente?

6. *Sea $f_n(x) = e^{n^2x^2}/n$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Demuestre que $f_n \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$, que $f_n' \to 0$ putualmente en $\mathbb{R}$ pero que la convergencia de (f_n') no es uniforme en ningún intervalo que contenga al origen.*

9.5. Integración de sucesiones de funciones.

Después de la discusión de las secciones anteriores es natural plantearse si dada una sucesión $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ con límite puntual f es cierto que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Ejemplos 9.6

1. Sea $\{q_n, n \geq 1\}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   Para cada n tenemos que $\int_0^1 f_n dx = 0$, pero la sucesión f_n converge puntualmente a la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

   y $f \notin \mathcal{R}[a,b]$.

2. Definimos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

entonces $f_n \in \mathcal{R}[0,1]$ y $\int_0^1 f_n dx = 1$. Por otro lado $f_n \to f$ en $[0,1]$ donde $f(x) = 0$ para $x \in [0,1]$. En este caso $f \in \mathcal{R}[0,1]$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 \int_0^1 f dx.$$

◀

Teorema 9.6 *Sea f_n una sucesión en $\mathcal{R}[a,b]$ que converge uniformemente en $[a,b]$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para algún $N \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{si } n \geq N,\ x \in [a,b], \tag{9.5}$$

de donde obtenemos

$$|f(x)| < |f_N(x)| + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

para todo $x \in [a,b]$, de modo que f es acotada. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n = f - f_n$. A partir de (9.5) obtenemos que si $E \subset [a,b]$ no es vacío,

$$\frac{-\epsilon}{4(b-a)} \leq m(g_n, E) \leq M(g_n, E) \leq \frac{\epsilon}{4(b-a)}$$

si $n \geq N$, donde $m(g_n, E) = \inf\{g_n(x)\colon x \in E\}$ y $M(g_n, E) = \sup\{g_n(x)\colon x \in E\}$. Por lo tanto para cualquier $P \in \mathcal{P}[a,b]$

$$S(P, g_n) - I(P, g_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

si $n \geq N$ y además

$$\begin{aligned} S(P, f_n + g_n) &\leq S(P, f_n) + S(P, g_n) \\ I(P, f_n + g_n) &\geq I(P, f_n) + I(P, g_n). \end{aligned}$$

Escogemos $n \geq N$ y lo fijamos. Como $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$S(P, f_n) - I(P, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} S(P,f) - I(P,f) &= S(P, f_n + g_n) - I(P, f_n + g_n) \\ &\leq S(P, f_n) - I(P, f_n) + S(P, g_n) - I(P, g_n) < \epsilon \end{aligned}$$

de modo que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Además, por (9.5) y monotonía, si $n \geq N$

$$\int_a^b |f - f_n| dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{4(b-a)} dx = \frac{\epsilon}{4}$$

y entonces

$$\left| \int_a^b (f - f_n) dx \right| \leq \int_a^b |f - f_n| dx < \epsilon$$

si $n \geq N$. Por lo tanto

$$\int_a^b f_n dx \to \int_a^b f dx$$

y esto concluye la demostración. ■

Corolario 9.1 *Si (f_n) es una sucesión de funciones en $\mathcal{C}[a,b]$ que converge uniformemente en $[a,b]$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, dx = \int_a^b f dx.$$

Ejercicios 9.5

1. *Sea (f_n) una sucesión de funciones reales y continuas que converge uniformemente en $[a,b]$ a f. Definimos F_n y F en $[a,b]$ por $F_n(x) = \int_a^x f_n dt, F(x) = \int_a^x f dt$ para $x \in [a,b]$. Demuestre que F_n converge uniformemente a F en $[a,b]$.*
2. *Considere las siguientes sucesiones de funciones en $[0,1]$*

$$\begin{aligned} &(a)\ f_n(x) = n^2 x \ \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ &(b)\ f_n(x) = -n^2(x - \frac{2}{n}) \ \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} : \\ &(c)\ f_n(x) = 0 \ \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

   En cada caso dibuje la gráfica de f_n, halle el límite de la sucesión (f_n) y calcule $\int_0^1 f_n(x)dx$. ¿Qué concluye?
3. *Si g es una función real y continua definida sobre $[a,b]$ y (f_n) es una sucesión de funciones reales y continuas que converge uniformemente en $[a,b]$ a f, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$.*
4. *Suponga que g y $f_n, n \in \mathbb{N}$, están definidas sobre $(0,\infty)$, son integrables sobre $[t,T]$ para cualesquiera $0 < t < T < \infty, |f_n| \leq g, f_n \to f$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $(0,\infty)$ y $\int_0^\infty g(x)dx < \infty$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$.*

5. *Para las siguientes sucesiones de funciones* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *calcule* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *y determine si la convergencia es uniforme. Determine también si es posible intercambiar límites e integrales.*

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}, \qquad b)\ f_n(x) = \frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

6. *Sea* (f_n) *una sucesión de funciones reales continuas definidas en* $[0,1]$ *y suponga que* $f_n \to f$ *uniformemente en* $[0,1]$. *¿Es cierto que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx?$$

9.6. Convergencia Acotada

Definición 9.3 Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto E. Decimos que (f_n) es *acotada (puntualmente)* en E si para cada $x \in E$ la sucesión de números reales $(f_n(x))$ es acotada, es decir, existe una función $\phi : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in E, n \geq 1.$$

Decimos que (f_n) es *uniformemente acotada* en E si existe un número M tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in E, n \geq 1.$$

Definición 9.4 Una sucesión de funciones (f_n) converge acotadamente en T si (f_n) converge puntualmente y es uniformente acotada.

Teorema 9.7 (Arzelá) *Sea* (f_n) *una sucesión que converge acotadamente a* f *en* $[a,b]$ *y supongamos que cada* f_n *es integrable según Riemann en* $[a,b]$ *y también* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. Sea $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = 0.$$

Para esto vamos a definir una nueva sucesión de funciones (h_n) de la siguiente manera:

$$h_n(x) = \sup\{g_n(x), g_{n+1}(x), \dots\} \quad \text{si } x \in [a,b],\ n \geq 1.$$

Observamos que

$$0 \leq g_n(x) \leq h_n(x), \qquad h_{n+1}(x) \leq h_n(x), \qquad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0.$$

Por lo tanto

$$0 \leq \int_a^b g_n(x)\,dx = \underline{\int_a^b} g_n(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} h_n(x)\,dx \equiv I_n.$$

Esta última integral inferior existe porque las h_n son funciones acotadas en $[a,b]$. Sin embargo, h_n puede no ser integrable según Riemann. Por otro lado g_n sí es integrable según Riemann. Para demostrar el teorema basta con ver que $I_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Observamos que esta sucesión converge a un límite no negativo ya que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Sea $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Veamos que la desigualdad $I > 0$ nos lleva a una contradicción.

Supongamos que $I > 0$. Como $I_n \geq I > I/2$ para todo n, existe una partición P_n de $[a,b]$ tal que la suma inferior de Riemann $I(P_n, h_n)$ satisface

$$I(P_n, h_n) > I/2. \tag{9.6}$$

Sea $\varepsilon = I/2(M + b - a)$ donde M es una cota uniforme para (h_n) en $[a,b]$. Entonces la suma inferior $I(P_n, h_n)$ se puede dividir en dos partes de la siguiente manera:

$$I(P_n, h_n) = \sum_{i\in A(n)} m_i(h_n)\Delta x_i + \sum_{i\notin A(n)} m_i(h_n)\Delta x_i$$

donde $A(n) = \{i : m_i(h_n) > \varepsilon\}$. La ecuación (9.6) implica

$$\frac{I}{2} < \sum_{i\in A(n)} M\Delta x_i + \varepsilon \sum_{i\notin A(n)} \Delta x_i \leq M \sum_{i\in A(n)} \Delta x_i + \varepsilon(b-a),$$

de donde obtenemos que $\sum_{i\in A(n)} \Delta x_i > \varepsilon$. Como el refinamiento de una partición aumenta las sumas inferiores, no hay pérdida de generalidad en suponer que las particiones son monótonas: $P_n \subset P_{n+1}$.

Sea S_n la unión de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de P_n para los cuales $i \in A(n)$. Entonces S_n es cerrado y

$$\sum_{i\in A(n)} \Delta x_i > \varepsilon.$$

Esto implica que hay al menos un x que pertenece a infinitos conjuntos S_n y para este x tenemos que $h_n(x) > \varepsilon$, lo que contradice la hipótesis de que $h_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo x. Esta contradicción implica que $I = 0$. ■

Ejercicios 9.6

1. *Suponga que la sucesión $f_n : E \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a la función f. Demuestre que f es acotada si y solamente si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que f_n es acotada para todo $n \geq N$. En caso afirmativo demuestre que $||f||_\infty = \lim_n ||f_n||_\infty$.*

2. *Si la sucesión $f_n : E \to \mathbb{R}$ es acotada y $f_n \to f$ uniformemente en E entonces f es acotada y (f_n) es una sucesión uniformemente acotada.*

9.7. Equicontinuidad

Nuestro objetivo ahora es determinar bajo qué condiciones podemos garantizar que una colección E de funciones continuas definidas sobre un dominio común, tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Sabemos que para un conjunto de números reales E la condición necesaria y suficiente para que toda sucesión $x_n \in E$ tenga una subsucesión convergente es que el conjunto E sea acotado. En el caso de funciones esta condición no es suficiente. Incluso si (f_n) es una sucesión uniformemente acotada de funciones continuas definidas sobre un conjunto compacto K, no necesariamente existe una subsucesión que converja puntualmente en K.

Ejemplo 9.7
Sea $f_n(x) = \operatorname{sen} nx$, para $0 \le x \le 2\pi$, $n \ge 1$. Supongamos que existe una sucesión (n_k) tal que $(\operatorname{sen} n_k x)$ converge para todo $x \in [0, 2\pi]$. En ese caso se debe tener

$$\lim_{k\to\infty} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x) = 0, \quad \text{para } 0 \le x \le 2\pi.$$

Por lo tanto también se tiene

$$\lim_{k\to\infty} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 = 0, \quad \text{para } 0 \le x \le 2\pi.$$

Por el teorema 9.7 esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 = 0.$$

Sin embargo, no es difícil demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} n_k x - \operatorname{sen} n_{k+1} x)^2 = 2\pi.$$

y esto es una contradicción que viene de suponer que existe una subsucesión convergente. ◀

La segunda pregunta es si toda toda sucesión convergente contiene una subsucesión uniformemente convergente. El siguiente ejemplo muestra que esto no es cierto en general, aún si la sucesión es uniformemente acotada en un conjunto compacto.

Ejemplo 9.8
Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{para } 0 \le x \le 1/n^2, \\ -\frac{n^2 x - n}{n-1} & \text{para } 1/n^2 \le x \le 1/n, \\ 0 & \text{para } 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Para esta sucesión de funciones se tiene que $|f_n(x)| \leq 1$, de modo que (f_n) es uniformemente acotada en $[0,1]$ y se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Sin embargo,

$$f_n\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = 1, \quad n \geq 1,$$

de modo que ninguna subsucesión puede converger uniformemente en $[0,1]$. ◀

El concepto que necesitamos para responder estas preguntas es el de equicontinuidad.

Definición 9.5 Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones reales definidas sobre un dominio común E. Decimos que $\mathcal{F}$ es *equicontinua* si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

para toda $f \in \mathcal{F}$

Como vemos, esta condición es más fuerte que continuidad uniforme, porque se pide que dado $\varepsilon > 0$ exista un δ que sirva para todas las funciones de la familia $\mathcal{F}$. Por lo tanto, toda función en una familia equicontinua, es uniformemente continua.

Ejemplos 9.9

1. La sucesión de funciones continuas $f_n(x) = nx$ definidas en todo $\mathbb{R}$ no es equicontinua en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon = 1/2$ para cualquier $\delta > 0$ podemos hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1/n) < \delta$ y en este caso el punto $y = x + (1/n)$ cumple

$$|y - x| < \delta \qquad \text{pero} \qquad |f_n(y) - f_n(x)| = 1 > \varepsilon.$$

2. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones derivables en un intervalo I tales que $|f'(x)| \leq c$ para cierta constante $c > 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y todo $x \in I$. Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua. En efecto, sea $x \in I$, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon/c$. Si $y \in I$ con $|x - y| < \delta$ entonces por el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$|f(y) - f(x)| \leq c|y - x| < \varepsilon$$

para toda $f \in \mathcal{F}$.

Teorema 9.8 *Si una sucesión equicontinua de funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ converge puntualmente en un subconjunto denso $D \subset E$, entonces converge uniformemente en cada subconjunto compacto $K \subset E$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ demostraremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K,$$

y por el criterio de Cauchy para convergencia uniforme esto es suficiente para demostrar el teorema.

Como la sucesión (f_n) converge puntualmente en D, para todo $d \in D$ existe $N_d \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N_d \Rightarrow |f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9.7}$$

Por otro lado la equicontinuidad de la sucesión de funciones implica que para todo $y \in K$ existe un intervalo abierto J_y de centro y tal que

$$x, z \in E \cap J_y \Rightarrow |f_n(x) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9.8}$$

Como K es c ompacto y $\cup_y J_y$ es un cubrimiento abierto de K, podemos extraer un subcubrimiento finito:

$$K \subset J_1 \cup \cdots \cup J_r.$$

Como D es denso en E, en cada abierto J_i podemos escoger $d_i \in J_i \cap D$. Sea $N = \text{máx}\{N_{d_1}, N_{d_2}, \ldots, N_{d_r}\}$, entonces si $m, n \geq N$ y $x \in K$ existe i tal que $x \in J_i$ y en consecuencia

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(d_i)| + |f_m(d_i) - f_n(d_i)| + |f_n(d_i) - f_n(x)|$$

Usando (9.7) y (9.8) obtenemos que

$$m, n \geq N, \ x \in K \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

■

Teorema 9.9 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Toda sucesión acotada de funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente.*

Demostración. Sea $E = \{x_1, x_2 \ldots\}$. La sucesión de números reales $(f_n(x_1))_{n\geq 1}$ es acotada y por lo tanto posee una subsucesión convergente. Por lo tanto hay una sucesión $(n_k^{(1)})$ de números naturales tal que existe

$$a_1 = \lim_{k\to\infty} f_{n_k^{(1)}}(x_1).$$

Ahora consideramos la sucesión $(f_{n_k^{(1)}}(x_2))_{k\geq 1}$, que también es una sucesión acotada de números reales y por lo tanto tiene una subsucesión convergente. Es decir, existe $(n_k^{(2)})$ subsucesión de $(n_k^{(1)})$ tal que existe

$$a_2 = \lim_{k\to\infty} f_{n_k^{(2)}}(x_2).$$

Procediendo inductivamente de esta manera para cada natural i obtenemos una sucesión $(n_k^{(i)})$, que es subsucesión de $(n_k^{(i-1)})$, tal que existe

$$a_i = \lim_{k\to\infty} f_{n_k^{(i)}}(x_i).$$

Definimos ahora una nueva sucesión infinita $(m_i)_{i\geq 1}$ tomando como i-ésimo elemento el número $n_i^{(i)}$, es decir, el i-ésimo elemento de la i-ésima sucesión. La sucesión de funciones $(f_{m_i})_{i\geq 1}$ converge en todos los puntos de E porque para cualquier punto $x_r \in E$, la sucesión $(f_{m_i}(x_r))_{i\geq 1}$ es, a partir del r-ésimo elemento, una subsucesión de $(f_{n_i^{(r)}}(x_r))_{i\geq 1}$, que converge a a_r. ■

Teorema 9.10 (Arzelá-Ascoli) *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Toda sucesión equicontinua y acotada de funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.*

Demostración. Como E es compacto tiene un subconjunto numerable y denso $D \subset E$. Por el teorema 9.9, (f_n) tiene una subsucesión que converge puntualmente en D. Esta misma subsucesión converge uniformemente en E por el teorema 9.8. ■

Teorema 9.11 *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas definidas en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

(1) $\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.

(2) $\mathcal{F}$ es equicontinua y acotada.

(3) Toda sucesión de funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Demostración.

Es evidente que (1) $\Rightarrow$ (2) y por el teorema anterior tenemos que (2) $\Rightarrow$ (3). Falta demostrar que (3) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que esto es falso, entonces: (3) es cierto pero existe un punto $x_0 \in K$ en el cual $\mathcal{F}$ no es equicontinua, es decir, existe $\varepsilon > 0$ para el cual podemos obtener una sucesión de puntos $x_n \in K$ con $|x_n - x_0| < 1/n$ y funciones $f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$|f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$

Pasando a una subsucesión si es necesario, por la hipótesis (3), tenemos que $f_n \to f$ uniformemente en K. Entonces la sucesión (f_n) es equicontinua: Existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in K, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, si tomamos $n > 1/\delta$ obtenemos que $|x_n - x_0| < \delta$, de donde $|f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, lo que es una contradicción. Por lo tanto (3) implica que $\mathcal{F}$ es equicontinua.

Finalmente veamos que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada. Si no fuese así, para cada n podríamos hallar una función $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $\sup_{x\in K} |f_n(x)| > n$. En consecuencia ninguna subsucesión sería uniformemente acotada, y esto contradice la hipótesis en virtud del ejercicio 9.6.2. ■

Ejercicios 9.7

Para algunos de los siguientes ejercicios necesitamos la siguiente definición. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones reales definidas en un conjunto E de un espacio métrico X es equicontinua en un punto $x \in E$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

siempre que $d(x, y) < \delta$, $y \in E$ y $f \in \mathcal{F}$.

Si esta condición se cumple en todos los puntos del conjunto E decimos que $\mathcal{F}$ es equicontinua puntualmente en E.

1. *Si los conjuntos de funciones reales $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ definidas sobre un dominio común E son equicontinuos en el punto x, entonces la unión $\mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n$ es equicontinua en x.*
2. *Demuestre que la sucesión de funciones del ejemplo 9.8 es equicontinua en todo punto mientras que la del ejemplo 9.7 no lo es en ningún punto.*
3. *La sucesión de funciones $f_n(x) = nx^2$ posee derivadas acotadas en 0 pero no es equicontinua en ese punto.*
4. *Si una sucesión de funciones continuas $F_n : E \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : E \to \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ es equicontinuo.*
5. *Un conjunto de polinomios de grado menor o igual que k uniformemente acotados en un intervalo compacto es equicontinuo en ese intervalo.*
6. *Decimos que una sucesión de funciones $f_n : E \to \mathbb{R}$ converge debilmente a una función $f : E \to \mathbb{R}$ si $f_n(x) \to f(x)$ en todo punto $x \in E$ en el cual f sea continua. Sea $D \subset \mathbb{R}$ denso. Demuestre que si una sucesión de funciones monótonas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente en D a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces (f_n) converge debilmente a f en $\mathbb{R}$.*
7. *Toda sucesión acotada de funciones monótonas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una subsucesión que converge debilmente a una función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cual se puede tomar continua por la derecha. (Sugerencia: use el teorema 9.9).*
8. *Sea (f_n) una sucesión equicontinua y acotada definida en un compacto $E \subset \mathbb{R}$. Si toda subsucesión uniformemente convergente en E tiene el mismo límite $f : E \to \mathbb{R}$ entonces $f_n \to f$ uniformemente en E.*
9. *Dada una sucesión de funciones dos veces diferenciables $f_n : E \to \mathbb{R}$ donde E es un intervalo, suponga que $f_n \to f$ puntualmente en E, que $(f_n'(x_0))$ es acotada para algún $x_0 \in E$ y que (f_n'') es uniformemente acotada en E. Demuestre que $f \in C^1$.*

9.8. El Teorema de Aproximación de Weierstrass

Definimos la sucesión

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \mu_n(1 - x^2)^n & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde

$$\mu_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

se escoge de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, dx = 1. \tag{9.9}$$

A medida que n crece estas funciones se concentran más y más alrededor del origen.

Lema 9.1 *Para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\delta > 0$ existe un entero N tal que para $n \geq N$,*

$$1 - \varepsilon < \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(x)\, dx \leq 1, \tag{9.10}$$

$$\int_{-1}^{-\delta} \varphi_n(x)\, dx + \int_{\delta}^{1} \varphi_n(x)\, dx < \varepsilon. \tag{9.11}$$

Demostración. Comenzamos con la demostración de (9.11). Ya que la función φ_n es simétrica, basta considerar el caso $x \geq 0$. Como $1 - x^2 \geq 1 - x$ para $0 \leq x \leq 1$, tenemos

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx \geq \int_0^1 (1 - x)^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

y en consecuencia $\mu_n \leq (n+1)/2$. Por lo tanto tenemos, para $\delta \leq |x| \leq 1$

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(\delta) \leq \frac{n+1}{2}(1 - \delta^2)^n.$$

Pero $(n+1)(1 - \delta^2)^n \to 0$ y en consecuencia, para n suficientemente grande $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varepsilon/2$ para $\delta \leq |x| \leq 1$. Ahora (9.11) se obtiene a partir de las propiedades de la integral. Las desigualdades en (9.10) se obtienen restando (9.11) de (9.9). ■

Una sucesión que satisface (9.9), (9.10) y (9.11) se conoce como una sucesión de Dirac.

Teorema 9.12 (de Aproximación de Weierstrass) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p(x)$ tal que*

$$|p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in [a, b] \tag{9.12}$$

Demostración. Podemos suponer que $0 < a < b < 1$ pues en caso contrario podemos usar una transformación de la forma $x \mapsto \alpha + \beta x$ para constantes adecuadas α y β. Luego extendemos $f(x)$ a una función continua en $[0, 1]$, por ejemplo poniendo $f(x) = f(a)$ para $0 \leq x < a$ y $f(x) = f(b)$ para $b < x \leq 1$. Ahora, para $\xi \in [a, b]$ definimos

$$p_n(\xi) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x - \xi)\, dx = \mu_n \int_0^1 f(x)(1 - (x - \xi)^2)^n\, dx. \tag{9.13}$$

Para calcular el error cometido al aproximar $f(\xi)$ por $p_n(\xi)$ usamos la desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
|f(\xi) - p_n(\xi)| \le & \Big| \int_0^1 f(x)\varphi_n(x-\xi)\,dx - \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)\varphi_n(x-\xi)\,dx \Big| \\
& + \Big| \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)\varphi_n(x-\xi)\,dx - \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)\varphi_n(x-\xi)\,dx \Big| \\
& + \Big| f(\xi)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \varphi_n(x-\xi)\,dx - f(\xi) \Big|. \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

Ahora fijamos $\varepsilon > 0$. Como f es continua en $[0,1]$, es uniformemente continua y por lo tanto existe $\delta > 0$ independiente de ξ tal que

$$
|x-\xi| < 2\delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon. \qquad (9.15)
$$

Podemos escoger δ de modo que $\delta \le a$ y $\delta \le 1-b$. Por lo tanto siempre tenemos que $[\xi-\delta, \xi+\delta] \subset [0,1]$. Además la función $f(x)$ es acotada: existe M tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [0,1]$.

Los tres términos a la derecha de la ecuación (9.14) se pueden acotar de la siguiente manera: Para el primero usamos la acotación de f y la ecuación (9.11):

$$
\begin{aligned}
& \Big| \int_0^{\xi-\delta} f(x)\varphi_n(x-\xi)\,dx + \int_{\xi+\delta}^1 f(x)\varphi_n(x-\xi)\,dx \Big| \\
& \qquad \le \int_{-1}^{-\delta} |f(y+\xi)|\varphi_n(y)\,dy + \int_\delta^1 |f(y+\xi)|\varphi_n(y)\,dy \le M\varepsilon. \qquad (9.16)
\end{aligned}
$$

De manera similar se acota el tercer término. Finalmente el segundo término está acotado por

$$
\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |f(x) - f(\xi)|\varphi_n(x-\xi)\,dx \le \varepsilon.
$$

En consecuencia tenemos

$$
|f(\xi) - p_n(\xi)| \le (2M+1)\varepsilon
$$

para n suficientemente grande. Esto demuestra el teorema. ■

Corolario 9.2 *Para todo intervalo $[-a,a]$ existe una sucesión (p_n) de polinomios reales que converge a $|x|$ uniformemente en $[-a,a]$ para los cuales se tiene que $p_n(0) = 0$.*

Demostración. Por el teorema anterior existe una sucesión de polinomios (p_n^*) que converge a $|x|$ uniformemente en $[-a,a]$. En particular $p_n^*(0) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Los polinomios

$$
p_n(x) = p_n^*(x) - p_n^*(0)
$$

tienen las propiedades deseadas. ■

Definición 9.6 Una familia de funciones reales $\mathcal{A}$ definidas en un conjunto E es un *álgebra* si para $f,\ g \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

1. $f + g \in \mathcal{A}$.
2. $fg \in \mathcal{A}$.
3. $\lambda f \in \mathcal{A}$.

Si además se tiene que $f \in \mathcal{A}$ siempre que f sea el límite uniforme de la sucesión (f_n) con $f_n \in \mathcal{A}$ decimos que $\mathcal{A}$ es *uniformemente cerrada.*

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de las funciones que son límite de sucesiones uniformemente convergentes de elementos de $\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es la *clausura uniforme* de $\mathcal{A}$.

Por ejemplo, el conjunto de los polinomios es un álgebra y el teorema de aproximación de Weierstrass dice que la clase de las funciones continuas en $[a, b]$ es la clausura uniforme del conjunto de los polinomios en $[a, b]$.

Teorema 9.13 *Sea $\mathcal{B}$ la clausura uniforme de un álgebra $\mathcal{A}$ de funciones acotadas. Entonces $\mathcal{B}$ es un álgebra uniformemente cerrada.*

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{B}$ existen sucesiones $(f_n), (g_n)$ que convergen uniformemente a f y g respectivamente y $f_n \in \mathcal{A}$, $g_n \in \mathcal{A}$. Como las funciones son acotadas es fácil mostrar que

$$f_n + g_n \to f + g, \qquad f_n g_n \to fg, \qquad \lambda f_n \to \lambda f,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme en todos los casos.

En consecuencia $f + g \in \mathcal{B}$, $fg \in \mathcal{B}$ y $\lambda f \in \mathcal{B}$, de modo que $\mathcal{B}$ es un álgebra. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada. ■

Definición 9.7 Sea $\mathcal{A}$ una familia de funciones definidas sobre un conjunto E. Decimos que $\mathcal{A}$ *separa puntos* en E si para todo par de puntos distintos x, y en E existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Si para cada punto $x \in E$ existe una función $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq 0$, decimos que $\mathcal{A}$ *nunca se anula en E.*

El álgebra de los polinomios de una variable tiene estas propiedades en $\mathbb{R}$. Un ejemplo de un álgebra que no separa puntos en el conjuntos de los polinomios de grado par en $[-1, 1]$, ya que $f(-x) = f(x)$ para toda función par f.

Teorema 9.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones en un conjunto E tal que $\mathcal{A}$ separa puntos en E y $\mathcal{A}$ no se anula en ningún punto de E. Sea x, y puntos distintos de E y λ, μ constantes. Entonces $\mathcal{A}$ contiene una función f tal que*

$$f(x) = \lambda, \qquad f(y) = \mu.$$

Demostración. Por hipótesis podemos encontrar funciones g, h y k tales que

$$g(x) \neq g(y), \qquad h(x) \neq 0, \qquad k(y) \neq 0.$$

Ponemos

$$u = gk - g(x)k, \qquad v = gh - g(y)h.$$

Entonces $u,\ v \in \mathcal{A}$, $u(x) = v(y) = 0$, $u(y) \neq 0$ y $v(x) \neq 0$. Por lo tanto

$$f = \frac{\lambda v}{v(x)} + \frac{\mu u}{u(y)}$$

tiene las propiedades que buscamos. ■

Teorema 9.15 (Stone-Weierstrass) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones reales continuas sobre un conjunto compacto K. Si $\mathcal{A}$ separa puntos en K y si $\mathcal{A}$ no se anula en ningún punto de K, entonces la clausura uniforme $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ consiste de todas las funciones reales y continuas sobre K.*

Demostración. Dividimos la prueba en cuatro pasos.

Paso 1. Si $f \in \mathcal{B}$ entonces $|f| \in \mathcal{B}$.
Demostración.
Sea $a = \sup_{x\in K} |f(x)|$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Por el corolario 9.2 existen números reales $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \Big| < \varepsilon, \qquad \text{para } -a \leq y \leq a. \tag{9.17}$$

Como $\mathcal{B}$ es un álgebra, la función

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i(x)$$

pertenece a $\mathcal{B}$. Por la definición de a y (9.17) tenemos

$$\big| g(x) - |f(x)| \big| < \varepsilon \quad \text{para } x \in K.$$

Como $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada esto muestra que $|f| \in \mathcal{B}$.

Paso 2. Si $f, g \in \mathcal{B}$ entonces $\text{máx}(f, g) \in \mathcal{B}$ y $\min(f, g) \in \mathcal{B}$.
Demostración. El paso 2 sigue del paso 1 y las identidades

$$\text{máx}(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$
$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Iterando el resultado puede extenderse a cualquier conjunto finito de funciones: Si $f_1, \dots f_n \in \mathcal{B}$ entonces $\text{máx}(f-1, \dots, f_n) \in \mathcal{B}$ y $\min(f-1, \dots, f_n) \in \mathcal{B}$.

Paso 3. Dada una función real f, continua sobre K, un punto $x \in K$, y $\varepsilon > 0$, existe una función $g_x \in \mathcal{B}$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad \text{para todo } t \in K. \tag{9.18}$$

Demostración. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ satisface las hipótesis del teorema 9.14, también las satisface $\mathcal{B}$. Por lo tanto para todo $y \in K$ podemos hallar una función $h_y \in \mathcal{B}$ tal que

$$h_y(x) = f(x), \qquad h_y(y) = f(y). \tag{9.19}$$

Por la continuidad de h_y existe un conjunto abierto J_y que contiene a y tal que

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad \text{para } t \in J_y. \tag{9.20}$$

Como K es compacto, existe un conjunto finito de puntos $y_1, \dots, y_n$ tal que

$$K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}. \tag{9.21}$$

Ponemos

$$g_x = \text{máx}(h_{y_1}, \dots, h_{y_n}).$$

Por el segundo paso, $g \in \mathcal{B}$ y las relaciones (9.19) a (9.21) muestran que g_x tiene las demás propiedades.

Paso 4. Dada una función real f continua en K, y $\varepsilon > 0$, existe una función $h \in \mathcal{B}$ tal que

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in K \tag{9.22}$$

Como $\mathcal{B}$ es uniformemente cerrada, esto es equivalente a la conclusión del teorema.

Demostración. Consideremos las funciones g_x para $x \in K$ que construimos en el paso anterior. Por la continuidad de g_x existen conjuntos abiertos V_x que contienen a x tales que

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{para todo } t \in V_x. \tag{9.23}$$

Como K es compacto, existe un conjunto finito de puntos $x_1, \dots, x_m$ tales que

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}. \tag{9.24}$$

Ponemos $h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$. Por el paso 2, $h \in \mathcal{B}$ y por (9.18)

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \quad \text{para } t \in K, \tag{9.25}$$

mientras que (9.23) y (9.24) implican

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \quad \text{para } t \in K. \tag{9.26}$$

Finalmente (9.22) sigue de (9.25) y (9.26). ■

Ejemplo 9.10
El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de compacidad en K es importante. Consideremos un conjunto K que no sea compacto, por ejemplo $K = \mathbb{R}$ y sea x_n una sucesión que no tiene ninguna subsucesión convergente, por ejemplo $x_n = n$. Consideramos $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existe }\}$.

Si $a \neq b$ son números reales escogemoa $N \in \mathbb{N}$ tal que $a \neq n$ siempre que $n > N$ y definamos el conjunto $E = \{b\} \cup \{x_n : n > N\}$ y la función

$$f(x) = \frac{dist(x, E)}{dist(x, a) + dist(x, E)}$$

entonces $f(a) = 1,\ f(b) = 0,\ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Por lo tanto $f \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ separa puntos.

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ contiene a la función 1, $\mathcal{A}$ no se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Veamos que la clausura uniforme de $\mathcal{A}$ no es $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Sea $S = \{x_{2k}, k \in \mathbb{N}\}$, $T = \{x_{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}$ y

$$g(x) = \frac{dist(x, T)}{dist(x, T) + dist(x, S)}.$$

Entonces $g \in (\mathbb{R})$ y $g(x) = 1$ si $x \in S$ mientras que $g(x) = 0$ si $x \in T$, de modo que la sucesión $g(x_n)$ no converge cuando $n \to \infty$ y por lo tanto no puede aproximarse de manera uniforme por una función en $\mathcal{A}$. De hecho, $||g - f||_\infty \geq 1/2$ para toda $f \in \mathcal{A}$. ◀

Ejercicios 9.8

1. *Demuestre que*
$$\varphi_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2}, \quad n \geq 1,$$
es una sucesión de Dirac, es decir, satisface las condiciones (9.9), (9.10) y (9.11). Esta fue la sucesión que Weierstrass usó en su demostración.

2. *Sea*
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| \leq 1/2n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Demuestre que para toda función continua $f(x)$ se tiene
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x - \xi) f(x) dx = f(\xi)$$
para todo $\xi \in (a, b)$.

3. *Sea $p_0 = 0$ y defina para $n \geq 0$*
$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n(x)).$$
Demuestre que $p_n(x) \to |x|$ uniformemente en $[-1, 1]$. (Ayuda: Use la identidad
$$|x| - p_{n+1}(x) = \big(|x| - p_n(x)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}(|x| + p_n(x))\Big)$$

para demostrar que $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$ *si* $|x| \leq 1$, *y que*

$$|x| - p_n(x) \leq |x|\Big(1 - \frac{|x|}{2}\Big)^n < \frac{2}{n+1}$$

si $|x| \leq 1$*).*

4. *Use el Teorema de Aproximación de Weierstrass e inducción para demostrar que si* f *tiene* k *derivadas continuas en un intervalo* $[a, b]$ *entonces existe una sucesión de polinomios* (p_n) *que satisfacen*

$$\begin{aligned} p_n &\to f \quad \text{uniformemente en } [a,b] \\ p_n' &\to f' \quad \text{uniformemente en } [a,b] \\ &\vdots \\ p_n^{(k)} &\to f^{(k)} \quad \text{uniformemente en } [a,b] \end{aligned}$$

5. *Sea* A *un conjunto y* $\mathbf{1}_A$ *la función indicadora de* A*:*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Decimos que la función g *es* simple *si se puede escribir como*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{A_j},$$

con $A_j = [a_j, b_j]$*. Demuestre que una función continua en el intervalo* $[a, b]$ *es el límite uniforme de funciones simples.*

6. *Si* f *es una función continua en* $[a, b]$ *y si*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = 0$$

para todo polinomio p*, demuestre que* f *debe ser idénticamente igual a cero.*