

## Elementos de Probabilidad y Estadística Problemas IX

Los problemas 2, 7, 15 y 21 son para entregar el miércoles 6/05/09.

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución normal de parámetros  $\mu = 12$ ,  $\sigma^2 = 9$ . Use  $\mathbf{R}$  para calcular  
a.  $P(X > 3)$ .    b.  $P(|X - 12| < 4)$ .    c.  $P(|X - 10| > 2)$ .
2. Determine el valor que debe tomar la constante  $A$  en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución.  
a.  $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $\alpha$  y  $\theta$  constantes.  
b.  $f(x) = Ax^{\alpha+1}$ ,  $x > x_0 > 0$ ,  $\alpha$  constante.  
c.  $f(x) = Ax(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .  
d.  $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .
3. Sea  $f(x) = Cxe^{-x}$ ,  $x > 0$  una densidad.  
a. Determine el valor de  $C$ .    b. Calcule  $P(X < 2)$ .    c. Calcule  $P(2 < X < 3)$ .
4. Halle la función de distribución  $F$  y su gráfica si la densidad es  
a.  $f(x) = 1/2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .    b.  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
5. Si  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$ ,  $x > 0$ , halle un número  $x_0$  tal que  $P(X > x_0) = 1/2$ .
6. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 0.5$ . Calcule  
a.  $P(X > 1)$ ,    b.  $P(0.5 < X < 1.5)$ ,    c.  $P(X > 2|X > 1)$ .
7. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad  $f(x) = C/x^2$ ,  $x > 100$ .  
a. Calcule  $C$ .    b. Halle la función de distribución.    c. Calcule  $P(X > 500)$ .
8. La temperatura  $T$  de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, tiene una distribución normal con parámetros  $\mu = 98.6$  y  $\sigma^2 = 2$ . La temperatura  $\theta$  medida en grados centígrados está relacionada con  $T$  por la fórmula  $\theta = 5 \cdot (T - 32)/9$ . Obtenga la distribución de  $\theta$ .
9. La magnitud  $v$  de la velocidad de una molécula con masa  $m$  en un gas de temperatura absoluta  $T$  es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro  $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$ , donde  $k$  es la constante de Boltzman. La distribución de Maxwell de parámetro  $\alpha$  tiene densidad
$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
¿Cuál es la densidad de la energía cinética  $E = mv^2/2$  de una molécula?
10. Halle la densidad de  $Y = e^X$  donde  $X$  tiene distribución normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ . (Se dice que la variable  $Y$  tiene distribución lognormal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ ).
11. Escriba un programa de computación para simular  $n$  valores de una variable de Bernoulli con  $p = 1/3$ . Corra el programa para  $n = 100$ ; 1000; 10000 y en cada caso determine la proporción de los valores que son iguales a 1.
12. Escriba un programa de computación que tenga como entrada la función de probabilidad  $p_i, i = 1, \dots, n$  y como resultado produzca un valor de la variable con esta función de probabilidad y valores en  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
13. Considere la distribución binomial negativa con parámetros  $p$  y  $k$ . Verifique la relación

$$P(X = j + 1) = \frac{j(1-p)}{j+1-k} P(X = j).$$

Use esta relación para dar un nuevo algoritmo para generar esta distribución.

14. Dé un método para generar una variable aleatoria tal que  $P(X = i) = (e^{-\lambda} \lambda^i / i!) / (\sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \lambda^i / i!)$ ,  $i = 0, \dots, k$ .
15. Dé un método para generar una variable aleatoria con distribución triangular.
16. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad  $f(x) = e^x / (e - 1)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
17. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{2-x/3}{2}, & \text{si } 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

18. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución  $F(x) = (x^2 + x)/2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
19. Dada la función de probabilidad conjunta definida por

$$p_{ij} = C(i + j) \tag{1}$$

en los puntos  $(1, 1)$ ;  $(2, 1)$ ;  $(2, 1)$  y  $(3, 1)$ , donde  $C$  es una constante, determine en valor de  $C$  y obtenga la función de probabilidad marginal correspondiente a la primera variable.

20. Sean  $X, Y$  variables aleatorias con valores en  $\{1, 2, \dots, n\}$  y con función de probabilidad conjunta dada por (1). Halle el valor de  $C$  y las distribuciones marginales.
21. La función  $p_{i,j}$  está dada por  $p_{i,j} = C\alpha^i \beta^j$  para  $i, j \in \mathbb{N}$  y  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Halle el valor de  $C$  para que  $p_{i,j}$  sea la función de probabilidad de las variables  $(X, Y)$ . Halle las funciones de probabilidad marginales. ¿Son independientes estas variables?
22. ¿Es  $p_{i,j} = (0.5)^{i+j}$  para  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$  una función de probabilidad? Si la respuesta es positiva, calcule  $P\{1 \leq i \leq 3, j \geq 2\}$
23. La función  $p_{i,j}$  está dada por

$$p_{i,j} = C \binom{10}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Halle el valor de  $C$  y determine las funciones de probabilidad marginales.

24. Sea  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  y  $P$  la distribución uniforme en  $\Omega$  (todos los puntos tienen igual probabilidad). Definimos las variables  $X, Y$  y  $Z$  de la siguiente manera:  $X(\omega_1) = Y(\omega_2) = Z(\omega_3) = 1$ ,  $X(\omega_2) = Y(\omega_3) = Z(\omega_1) = 2$ ,  $X(\omega_3) = Y(\omega_1) = Z(\omega_2) = 3$ . Demuestre que estas tres variables tienen la misma función de probabilidad. Halle las funciones de probabilidad de  $X + Y$ ,  $Y + Z$  y  $X + Z$ .
25. Considere un grupo de cartas que consiste de  $J$ ,  $Q$ ,  $K$  y  $A$  de las cuatro pintas. Se extraen dos cartas del grupo sin reposición y llamamos  $X$  e  $Y$  al número de diamantes y corazones obtenidos, respectivamente. Obtenga la función de probabilidad conjunta y la función marginal correspondiente a  $X$ .
26. Una caja tiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Las bolas numeradas 1 y 2 son rojas mientras que las otras son blancas. Extraemos dos bolas al azar de la caja y sean  $X, Y$  las variables aleatorias que representan el número de bolas rojas y el número de bolas pares en la muestra, respectivamente. Halle la distribuciones de  $X$  e  $Y$  y su distribución conjunta. Determine si estas variables son independientes.