Elementos de Probabilidad y Estadística
Problemas X

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 7/05/14.

1. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.5$. Calcule

   a. $P(X > 1)$,
   b. $P(X < 2)$,
   c. $P(0.5 < X < 1.5)$,
   d. $P(X > 2|X > 1)$
   e. $P(X < 1|X < 2)$.

2. Considere la distribución binomial negativa con parámetros p y k. Verifique la relación

$$P(X = j + 1) = \frac{j(1 - p)}{j + 1 - k} P(X = j).$$

   Use esta relación para dar un nuevo algoritmo para generar esta distribución.

3. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 12$, $\sigma^2 = 9$. Use `R` para calcular

   a. $P(X > 3)$. b. $P(|X - 12| < 4)$. c. $P(|X - 10| > 2)$.

4. Determine el valor que debe tomar la constante A en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución.

   a. $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|},\ -\infty < x < \infty,\ \alpha$ y θ constantes.
   b. $f(x) = Ax^{\alpha+1},\ x > x_0 > 0,\ \alpha$ constante.
   c. $f(x) = Ax(1 - x),\ 0 \leq x \leq 1$.
   d. $f(x) = \frac{A}{1+x^2},\ -\infty < x < \infty$.

5. Sea $f(x) = Cxe^{-x},\ x > 0$ una densidad.

   a. Determine el valor de C. b. Calcule $P(X < 2)$. c. Calcule $P(2 < X < 3)$.

6. Halle la función de distribución F y su gráfica si la densidad es

   a. $f(x) = 1/2,\ 0 \leq x \leq 2$.
   b. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

7. Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ x > 0$, halle un número x_0 tal que $P(X > x_0) = 1/2$.

8. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad $f(x) = C/x^2,\ x > 100$.

   a. Calcule C. b. Halle la función de distribución. c. Calcule $P(X > 500)$.

9. La temperatura T de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, tiene una distribución normal con parámetros $\mu = 98.6$ y $\sigma^2 = 2$. La temperatura θ medida en grados centígrados está relacionada con T por la fórmula $\theta = 5 \cdot (T - 32)/9$. Obtenga la distribución de θ.

10. La magnitud v de la velocidad de una molécula con masa m en un gas de temperatura absoluta T es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$, donde k es la constante de Boltzman. La distribución de Maxwell de parámetro α tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 \exp\left(\frac{x^2}{k^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   ¿Cuál es la densidad de la energía cinética $E = mv^2/2$ de una molécula?

11. Halle la densidad de $Y = e^X$ donde X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. (Se dice que la variable Y tiene distribución lognormal con parámetros μ y σ^2).

12. Escriba un programa de computación para simular n valores de una variable de Bernoulli con $p = 1/3$. Corra el programa para $n = 100;\ 1000;\ 10000$ y en cada caso determine la proporción de los valores que son iguales a 1.

13. Escriba un programa de computación que tenga como entrada la función de probabilidad $p_i, i = 1, \ldots n$ y como resultado produzca un valor de la variable con esta función de probabilidad y valores en $\{1, 2, \ldots, n\}$.

14. Dé un método para generar una variable aleatoria tal que $P(X = i) = \big(e^{-\lambda}\lambda^i/i!\big)/\big(\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i/i!\big),\ i = 0, \ldots, k$.

15. Dé un método para generar una variable aleatoria con distribución triangular.

16. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = e^x/(e-1), \quad 0 \leq x \leq 1$.

17. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ \frac{2-x/3}{2}, & \text{si } 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

18. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = (x^2 + x)/2, \quad 0 \leq x \leq 1$.