

# Probabilidad Avanzada I

## Problemas 5

Los problemas del 16 al 20 son para entregar el martes 20/03/12.

1. Sea  $X$  una v.a. con distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$ . Demuestre que su f.c. está dada por

$$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Considere el caso particular  $a = -b$  y obtenga la f.c.

2. Sea  $X$  una v.a. Demuestre que  $\varphi_X$  es real si y sólo si  $X \stackrel{d}{=} -X$ , es decir, si la distribución de  $X$  es simétrica. Si  $X, Y$  son i.i.d. demuestre que  $X - Y$  tiene distribución simétrica.
3. Decimos que una distribución es estable simétrica si su f.c. tiene la forma  $e^{-c|t|^\alpha}$  para  $0 < \alpha \leq 2$  y alguna constante positiva  $c$ . Demuestre que esta clase es cerrada bajo convoluciones: Si  $X_1, \dots, X_n$  son estables simétricas con índice  $\alpha$ , entonces  $\sum_i^n X_k/n^{1/\alpha}$  también es estable simétrica con índice  $\alpha$ .
4. Usando la relación de Parseval demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{e}$$

Ayuda: Considere  $X$  una variable de Bernoulli simétrica y  $Y$  una variable de Cauchy estándar.

5. Usando la relación de Parseval demuestre que

$$\int_{-1}^1 (1-|y|) \cos y dy = 2(1 - \cos 1).$$

Ayuda: Considere  $X$  una variable de Bernoulli simétrica y  $Y_1 + Y_2$  donde  $Y_i \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $i = 1, 2$ , son independientes.

6. Usando funciones características calcule media y varianza para las distribuciones binomial, Poisson, uniforme, exponencial, gamma y normal estándar.
7. Demuestre que  $e^{-t^4}$ ,  $1/(1+t^4)$  y  $|\cos t|$  no son funciones características.
8. Sea  $X$  una v.a. con f.d.  $F$  y f.c.  $\varphi$ . Demuestre que para  $h > 0$

$$P(|X| > 2/h) \leq \frac{1}{h} \int_{|t| < h} (1 - \varphi(t)) dt.$$

Ayuda: Use Fubini en la integral de la derecha.

9. **La función generadora de momentos.** Sea  $X$  una v.a. con valores enteros. La función generadora de momentos (f.g.m.) de  $X$  se define como  $g_X(t) = E t^X = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$ . Demuestre los siguientes resultados:
- (i) Un teorema de unicidad para la f.g.m.
- (ii) Si  $X_1, \dots, X_n$  son v.a.i.,  $g_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n g_{X_k}(t)$ , con  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .
10. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a.i. con esperanza 0 y terceros momentos finitos. Usando funciones características demuestre que
- $$E(X_1 + \dots + X_n)^3 = E X_1^3 + \dots + E X_n^3.$$
11. Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a.i. con distribución exponencial de parámetro 1 y sea  $V_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$  y  $W_n = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \dots + \frac{1}{n}X_n$ . Demuestre que  $V_n \stackrel{d}{=} W_n$ .
12. Demuestre que no es posible hallar v.a.i.i.d.  $X$  e  $Y$  tales que  $X - Y \sim U(-1, 1)$ .

13. Suponga que los momentos de una v.a.  $X$  son constantes:  $E X^n = c$  para todo  $n \geq 1$ . Halle la distribución de  $X$ .
14. Demuestre que si  $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$  cuando  $t \rightarrow 0$  es una f.c. entonces  $\varphi \equiv 0$ .
15. ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?  
 (i) Si  $\varphi$  es una f.c., También lo es  $\varphi^2$ .  
 (ii) Si  $\varphi$  es una f.c. no-negativa, también lo es  $\sqrt{\varphi}$ .
16. Sea  $X_n$  una v.a. con distribución uniforme en  $(-n, n)$ . Sea  $\varphi_n$  la f.c. de  $X_n$ . Demuestre que la sucesión  $\varphi_n(t)$  converge para todo  $t$ . ¿Existe una v.a. propia y no-degenerada  $X_0$  tal que  $X_n \xrightarrow{d} X_0$ ? Razone su respuesta. ¿Cómo se relaciona este resultado con el teorema de continuidad?
17. Recordemos que la densidad de la distribución de Cauchy es  $1/\pi(1+x^2)$  para  $x \in \mathbb{R}$  y la de la distribución de Laplace es  $e^{-|x|}/2$  para  $r \in \mathbb{R}$ .  
 (i) Si  $Y_1$  y  $Y_2$  son v.a. exponenciales estándar demuestre que su diferencia  $Y_1 - Y_2$  tiene distribución de Laplace.  
 (ii) Usando el inciso anterior demuestre que la f.c. de la distribución de Laplace es  $1/(1+t^2)$ .  
 (iii) Usando ahora la fórmula de inversión demuestre que la f.c. de la distribución de Cauchy es  $e^{-|t|}$ .
18. Sean  $X$  tal que  $P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2$ ,  $Y \sim U(-1, 1)$  y  $X$  e  $Y$  independientes. Demuestre por un cálculo directo que  $X + Y \sim U(-2, 2)$  y luego traduzca este resultado a una proposición sobre las funciones características.
19. Sea  $X$  una v.a. Si para algún  $n \geq 1$  la f.c. tiene derivada finita de orden  $2n$  en  $t = 0$ , entonces  $E|X|^{2n} < \infty$  y  $E X^{2n} = i^{-2n} \varphi^{(2n)}(0)$ .
20. **La función generadora de cumulantes.** La función generadora de cumulantes (f.g.c.) de una v.a.  $X$  se define como  $\kappa_X(t) = \log \varphi_X(t)$ , donde  $\varphi_X$  es la f.c. Demuestre los siguientes resultados:  
 (i) Un teorema de unicidad para la f.g.c.  
 (ii) Si  $X_1, \dots, X_n$  son v.a.i.,  $\kappa_{S_n}(t) = \sum_{k=1}^n \kappa_{X_k}(t)$ , con  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .  
 (iii) Si  $E|X|^n < \infty$  para algún  $n \geq 1$ ,

$$\kappa_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(it)^k}{k!} \aleph_k + o(|t|^n) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Los coeficientes  $\aleph_k$  se llaman cumulantes o semi-invariantes.

(iv) Suponiendo que existen, demuestre la siguiente relación entre momentos ( $\mu_k = E X^k$ ) y cumulantes:  $\aleph_1 = \mu_1$ ,  $\aleph_2 = \mu_2 - \mu_1^2$  y  $\aleph_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$ .

21. Sea  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , demuestre que los cumulantes de  $X$  son todos cero salvo el de orden 2, que vale 1.
22. Sea  $X$  una v.a. con función de densidad  $f$ . Demuestre que  $|\varphi_X(t)| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .
23. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i. con distribuciones  $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$  y sea  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ . Demuestre que la función característica de  $Y$  es

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1 - 2it)^{n/2}} \exp\left(\frac{it\theta}{1 - 2it}\right)$$

donde  $\theta^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2$ . La variable  $Y$  tiene una distribución ji-cuadrado no-centrada con  $n$  grados de libertad y parámetro de no-centralidad  $\theta$ ,  $Y \sim \chi^2(n; \theta)$ .

24. De un ejemplo de dos variables aleatorias dependientes  $X, Y$  tales que  $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ .