Ayudantía de Probabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 3.
Henry Pantí.

3. a) Ya que u_0 es continua, entonces u_0 es uniformemente continua sobre $[a,b]$. De aquí, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x_1, x_2 \in [a,b]$ son tales que $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|u_0(x_1) - u_0(x_2)| < \epsilon/5$. Ahora, sea $B_x(\delta) = \{y : |y - x| < \delta)$, una vecindad centrada en x de radio δ. Tenemos

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B_x(\delta/2).$$

Entonces, ya que $[a,b]$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in [a,b]$ tales que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i}(\delta/2).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

Además, por construcción, $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, \ldots, m$. Por otro lado, ya que $u_n \to u_0$ puntualmente, existe N tal que para toda $n \geq N$,

$$\sup_{0\leq i\leq m} |u_n(x_i) - u_0(x_i)| < \epsilon/5. \tag{3.1}$$

Usando que u_n es no-decreciente, (3.1) y la continuidad uniforme de u_0 sobre $[a,b]$, tenemos que para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ y $n \geq N$

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(x_i)| &\leq u_n(x_i) - u_n(x_{i-1}) \\
&\leq u_0(x_i) + \epsilon/5 - (u_0(x_{i-1}) - \epsilon/5) \\
&= (2/5)\epsilon + u_0(x_i) - u_0(x_{i-1}) \\
&\leq (3/5)\epsilon. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Finalmente, por (3.1), (3.2) y la continuidad uniforme de u_0 sobre $[a,b]$, se sigue que para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ y $n \geq N$,

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq |u_n(x) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - u_0(x_i)| + |u_0(x_i) - u_0(x)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para $n \geq N$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u_0(x)| = \max_{1\leq i\leq m} \{ \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |u_n(x) - u_0(x)|\} < \epsilon.$$

b) Sea $\epsilon > 0$. Tomemos M tal que

$$F_0(M), 1 - F_0(M) < \epsilon/2.$$

Con ayuda de a), podemos tomar N tal que para toda $n \geq N$.

$$|F_n(\pm M) - F_0(\pm M)| < \epsilon/2, \qquad \sup_{x\in[-M,M]} |F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon.$$

Así, para $n \geq N$,

$$\sup_{x\leq M} |F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon, \qquad \sup_{x\in[-M,M]} |F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon, \qquad \sup_{x\geq M} |F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para $n \geq N$, se satisface

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon.$$

c) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $A_x = \{\omega : F_n(x,\omega) \to F_0(x,\omega)\}$, donde $F_n(x,\omega)$ es la función de distribución empírica. Como F es continua, $P(A_x) = 1$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea $\Omega' = \cap_{x\in\mathbb{Q}} A_x$, entonces $P(\Omega') = 1$. Además, por la densidad de los racionales y b), se sigue que para todo $\omega \in \Omega'$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x,\omega) - F_0(x,\omega)| \to 0.$$

10. a) Usando 2a) de la lista 4, es suficiente mostrar que $P(X_n = x) \to P(X = x)$, para $x = 0, 1, 2, \ldots$ y X variable aleatoria geométrica. La convergencia de $P(X_n = x)$ a $P(X = x)$ se obtiene de la expresión

$$P(X_n = x) = p_n(1 - p_n)^x, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

ya que $p_n \to p$.

b) Denote por $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero menor o igual a x. Observe que de la desigualdad

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx, \quad n \geq 1,$$

se sigue que $\lfloor nx \rfloor / n \to x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Usando este hecho y que $np_n \to \lambda > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
P(X_n/n > x) &= P(X_n > nx) \\
&= P(X_n > \lfloor nx \rfloor) \\
&= (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor} \\
&= \left[\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n\right]^{\lfloor nx \rfloor / n} \\
&\longrightarrow e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba.

15. Primero observemos que

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_n \int_{|x|\leq\alpha} f(x)dF_n(x) = \sup_n \int f(x)dF_n(x) < \infty.$$

De aquí,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sup_n \int_{|x|>\alpha} f(x)dF_n(x) = 0. \tag{15.1}$$

Ahora sea $\epsilon > 0$, entonces por (15.1) existe $\alpha_1 > 0$ tal que $\sup_n \int_{|x|>\alpha} f(x)dF_n(x) < \epsilon$, para toda $\alpha > \alpha_1$. Por otro lado, ya que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$, entonces existe α_2 tal que $f(x) \geq 1$, para toda $|x| > \alpha_2$. De esta forma, tomando $\alpha^* = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, se obtiene que

$$\sup_n \int_{|x|>\alpha} dF_n(x) \leq \sup_n \int_{|x|>\alpha} f(x)dF_n(x) < \epsilon, \quad \forall\, \alpha > \alpha^*.$$

Lo que muestra que (F_n) es tensa.

17. Para $H \in \mathcal{M}$, sea $\mathcal{C}_H$ sus puntos de continuidad. Ya que H es no-decreciente, entonces H tiene a lo más un número contable de puntos de discontinuidad. De aquí, el conjunto $\mathcal{C}_H$ es denso en $\mathbb{R}$. Esto implica de forma inmediata que si se tiene la definición vista en clase, entonces también es cierta la definición propuesta aquí. Ahora veamos el recíproco. Sea $D \subset \mathbb{R}$ denso tal que para toda $a, b \in D$, $H_n(a, b] \to H(a, b]$. Sean $c, d \in \mathcal{C}_H$ y $\epsilon > 0$. Ya que D es denso y H es continua en los puntos c y d, entonces existen $a, b \in D$ tales que, $a < c$ y $b > d$ y

$$|H(c) - H(a)| < \epsilon/4, \quad |H(b) - H(d)| < \epsilon/4.$$

De aquí,

$$|H(c, d] - H(a, b]| < \epsilon/2.$$

Por otro lado, la convergencia $H_n(a, b] \to H(a, b]$, $a, b \in D$, implica que existe N_1 tal que para toda $n \geq N_1$,

$$|H_n(a, b] - H(a, b]| < \epsilon/2.$$

De esta manera, para $n \geq N_1$,

$$H_n(c, d] - H(c, d] \leq H_n(a, b] - H(c, d] \leq |H_n(a, b] - H(a, b]| + |H(a, b] - H(c, d]| < \epsilon.$$

De manera análoga se puede verificar que existe N_2 tal que para toda $n \geq N_2$,

$$H(c, d] - H_n(c, d] < \epsilon.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ se obtiene que

$$|H(c, d] - H_n(c, d]| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $H(c, d] \to H(c, d]$, para todo $c, d \in \mathcal{C}_H$.

24. Sean $\{r_n\}$ una enumeración de los racionales y $\{s_n\}$ definida por

$$s_n = r_n + \frac{1}{n}.$$

Definimos las medidas $\mu_n = \delta_{r_n}$ y $\nu_n = \delta_{s_n}$. Como f es continua y de soporte compacto, entonces f es uniformemente continua. Esto implica

$$\int f d\mu_n - \int f d\nu_n = f(r_n) - f(s_n) \to 0,$$

ya que $r_n - s_n \to 0$. Ahora bien, para (a, b) intervalo dado, existe subsucesión $\{r_{n_k}\}$ tal que

$$a - \frac{1}{n_k} < r_{n_k} < a, \quad r_{n_k} < b - \frac{1}{n_k}, \quad k \geq 1.$$

De aquí, $r_{n_k} \notin (a, b)$, $s_{n_k} \in (a, b)$, de donde $\mu_{n_k}(a, b) - \nu_{n_k}(a, b) = -1$. Esto último muestra que $\mu_n(a, b) - \nu_n(a, b) \not\to 0$.