Ayudantía de Probabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 4.
Henry Pantí.

16. Recordemos que φ_{X_n} está dada por

$$\varphi_{X_n}(0) = 1, \quad \varphi_{X_n}(t) = \frac{\sin(nt)}{nt}, \quad t \neq 0.$$

Entonces

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Ahora bien, la sucesión F_n está dada por

$$F_n(x) = \frac{x+n}{2n}\mathbf{1}_{[-n,n)}(x) + \mathbf{1}_{[n,\infty)}(x).$$

Entonces, $F_n(x) \to \frac{1}{2}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. De aquí, no existe v.a. X_0 tal que $X_n \to X_0$ en distribución. Esto no contradice el teorema de continuidad de Lévy ya que φ no es continua en cero.

17. (i) Primero, la densidad de f_{-Y_2} está dada por

$$f_{-Y_2}(y) = e^y, \quad y \leq 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} f_{Y_1 - Y_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1}(x-y) f_{-Y_2}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{x\wedge 0} e^{-(x-y)}e^y dy \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x\wedge 0} e^{2y}dy \\ &= \frac{1}{2}e^{-x+2(x\wedge 0)} \\ &= \frac{1}{2}e^{-|x|}. \end{aligned}$$

(ii) Sea $Y = Y_1 - Y_2$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \varphi_{Y_1}(t)\varphi_{Y_2}(-t) \\ &= \frac{1}{1-it}\frac{1}{1+it} \\ &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

(iii) Por la fórmula de inversión tenemos

$$\frac{1}{2}e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx.$$

Por lo tanto, la f.c. de una v.a. Cauchy X está dada por $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

18. Sea $Z = X + Y$. Ya que Y es v.a. uniforme en $(-1,1)$, entonces

$$F_Y(y) = \frac{y+1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1)}(y) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(y). \tag{18.1}$$

Entonces, por la ley de probabilidad total y (18.1) se sigue

$$\begin{aligned}
P(Z \le z) &= \frac{1}{2}[P(Y \le z-1) + P(Y \le z+1)] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\mathbf{1}_{[0,2)}(z) + \mathbf{1}_{[2,\infty)}(z) + \frac{z+2}{2}\mathbf{1}_{[-2,0)}(z) + \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)\right) \\
&= \frac{z+2}{4}\mathbf{1}_{[-2,2)}(z) + \mathbf{1}_{[2,\infty)}(z).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $X + Y$ tiene distribución uniforme en $(-2,2)$. Usando lo anterior y las expresiones para las funciones características de X e Y, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2t)}{2t} &= \varphi_{X+Y}(t) \\
&= \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \\
&= \cos(t)\frac{\sin(t)}{t}.
\end{aligned}$$

Esto nos permite hallar una identidad trigonométrica conocida: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

19. Primero supongamos que $k = 2$, es decir, $\varphi''(0)$ es finito. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx} - 2 + e^{-ihx}}{h^2}dF(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1-\cos hx)}{h^2}dF(x).
\end{aligned}$$

Ya que $0 \le \frac{2(1-\cos hx)}{h^2} \to x^2$, cuando $h \to 0$, entonces por el Lemma de Fatou

$$\begin{aligned}
E(X^2) &\le \liminf_{h\to 0} -\frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} \\
&= -\varphi''(0).
\end{aligned}$$

Esto muestra que la varianza es finita y por un teorema visto en clase $E(X^2) = i^{-2}\varphi''(0)$.

El resto de la prueba será por inducción. De esta forma, supongamos que $\varphi^{(2n+2)}(0)$ es finito. Por hipótesis de inducción $E(X^{2n})$ es finito, entonces $\varphi^{(2n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^{2n} e^{itx} dF(x)$. De aquí,

$$\frac{\varphi^{(2n)}(h) - 2\varphi^{(2n)}(0) + \varphi^{(2n)}(-h)}{h^2} = -(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \frac{2(1-\cos hx)}{h^2} dF(x).$$

Así, aplicando de nuevo el Lema de Fatou se obtiene

$$E(X^{2n+2}) \leq (-1)^{n+1} \varphi^{(2n+2)}(0) < \infty.$$

Además, $E(X^{2n+2}) = i^{-(2n+2)} \varphi^{2n+2}(0)$.

20. (i) **Teorema** Sean X e Y v.a. tales que $\kappa_X(t) = \kappa_Y(t)$, entonces $X \stackrel{d}{=} Y$.

Demostración. Con ayuda del teorema de unicidad para funciones características, tenemos que $\kappa_X = \kappa_Y$ si y sólo si $\varphi_X = \varphi_Y$ si y sólo si $X \stackrel{d}{=} Y$. □

(ii) Usando la independencia de $X_1, \ldots, X_n$ y la propiedad de que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos, se sigue

$$\kappa_{S_n}(t) = \log \varphi_{S_n}(t) = \log \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = \sum_{j=1}^{n} \log \varphi_{X_j}(t) = \sum_{j=1}^{n} \kappa_{X_j}(t).$$

(iii) Se puede mostrar (por inducción o cualquier otro método) que

$$\kappa^{(n)}(t) = \frac{\varphi^{(n)}(t)}{\varphi(t)} + \sum C_{j_1, m_n^1, \ldots, j_r, m_n^r, l_n} \frac{(\varphi^{(j_1)}(t))^{m_n^1} \cdots (\varphi^{(j_r)}(t))^{m_n^r}}{(\varphi(t))^{l_n}} + (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^n, \tag{20.1}$$

donde la suma es sobre el conjunto de índices $\{j_1, m_n^1, \ldots, j_r, m_n^r, l_n\}$ que satisfacen $j_1 m_n^1 + \cdots + j_r m_n^r = n$ y $l_n < n$. Por ejemplo,

$$\kappa'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)},$$

$$\kappa''(t) = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} - \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^2,$$

$$\kappa'''(t) = \frac{\varphi'''(t)}{\varphi(t)} - 3\frac{\varphi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi(t))^2} + 2\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^3,$$

$$\kappa^{(4)}(t) = \frac{\varphi^{(4)}(t)}{\varphi(t)} - 4\frac{\varphi'(t)\varphi'''(t)}{(\varphi(t))^2} + 12\frac{(\varphi'(t))^2\varphi''(t)}{(\varphi(t))^3} - 6\left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^4.$$

De la expresión (20.1) se obtiene que para cada n existe g_n tal que

$$\kappa^{(n)}(0) = i^n g_n(E(X), \ldots, E(X^n)). \tag{20.2}$$

Haciendo una expansión de series de Taylor alrededor del cero para κ y usando (20.2) se obtiene el resultado. Además, $\aleph_n = g_n(E(X), \ldots, E(X^n))$.

(iv) Recordando que si $E|X|^n$ es finito, entonces $\varphi^{(n)}(0) = i^n E(X^n)$. Usando este hecho, las primeras tres derivadas de κ dadas en el inciso anterior y (20.2), se obtiene $\aleph_1 = \mu_1$, $\aleph_2 = \mu_2 - \mu_1^2$, $\aleph_3 = \mu^3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$.