Ayudantía de Probabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 6.
Henry Pantí.

1. Sea X tal que $X_n/b_n \xrightarrow{d} X$. Entonces, ya que $b_n = o(\beta_n)$ se sigue

$$\frac{X_n}{\beta_n} = \frac{b_n}{\beta_n}\frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{d} 0 \cdot X = 0,$$

o bien, $X_n/\beta_n \xrightarrow{P} 0$.

Ahora, usando lo anterior veamos que el TCL implica la ley débil de grandes números. Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a.i.d. con media μ y varianza σ^2 finita. Sea $X_n = \sum_{k=1}^n (Y_k - \mu)$ y $b_n = \sqrt{n}\sigma$ entonces por el TCL $X_n/b_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Ahora bien, $b_n = o(\beta_n)$, con $\beta_n = n$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^n (Y_k - \mu)/n = X_n/\beta_n \xrightarrow{P} 0$, lo que es la ley débil de grandes números.

5. Tenemos

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^n E|kX_k|^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + o(n^3)$$

y

$$\sum_{k=1}^n E|kX_k|^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + o(n^4).$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n E|kX_k|^3}{s_n^3} = 0.$$

De aquí, la condición de Lyapounov se satisface, lo que implica que

$$\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n kX_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Y ya que $s_n \sim (n^3/3)^{1/2}$, se concluye

$$\left(\frac{3}{n^3}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^n kX_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

10. Ya que $g(x)/x^2 \uparrow \infty$, entonces sobre el evento $\{|X_k| > \epsilon s_n\}$ se satisface $g(|X_k|)/|X_k|^2 \geq g(\epsilon s_n)/(\epsilon s_n)^2$, o bien, $g(|X_k|)/g(\epsilon s_n) \geq (|X_k|/\epsilon s_n)^2$. De aquí,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n E|X_k|^2 \mathbf{1}_{\{|X_k|>\epsilon s_n\}} &= \epsilon^2 \sum_{k=1}^n E\left[\left(\frac{|X_k|}{\epsilon s_n}\right)^2 \mathbf{1}_{\{|X_k|>\epsilon s_n\}}\right] \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{g(\epsilon s_n)} \sum_{k=1}^n Eg(|X_k|) \to 0.\end{aligned}$$

Esto muestra que la condición de Lindeberg se satisface. Por lo tanto,

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Para $\delta > 0$, tomando $g(x) = x^{2+\delta}$, $x \geq 0$, se obtiene la condición de Lyapunov. Esto muestra que la condición aquí dada es una generalización de la condición de Lyapunov.

15. Ya que el producto de f.c. i.d. es i.d. y las f.c. correspondientes a v.a. degeneradas son también i.d., entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\mu = 0$. Ahora observe que el integrando en (1) se puede escribir de la siguiente manera

$$\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} = (e^{itx} - 1 - itx)\frac{1}{x^2} + (e^{itx} - 1), \quad x \neq 0. \tag{15.1}$$

Puesto que los siguientes límites son ciertos

$$\frac{\cos tx - 1}{x^2} \to -\frac{t^2}{2}, \quad \frac{\sin tx - tx}{x^2} \to 0, \quad e^{itx} - 1 \to 0, \quad \text{cuando } x \to 0,$$

entonces por (15.1) se sigue que el integrando en (1) es continuo en 0. Además, (15.1) implica también que esta misma función es continua y acotada. De todo lo anterior se deduce que la integral en (1) es siempre finita.

Ahora, usando de nuevo (15.1) tenemos que para t pequeña,

$$\left|(e^{itx} - 1 - itx)\frac{1}{x^2} + (e^{itx} - 1)\right| \leq t^2 + 2,$$

entonces por ser G medida finita, se deduce

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} dG(x) = 0.$$

Lo que muestra que la f.c. φ es continua en 0. Sólo resta probar que φ es límite de f.c. i.d. El procedimiento es similar al que se hizó en la prueba del teorema 3.2.1 de las notas. Lo escribiremos aquí para tener completa la solución de este ejercicio.

Definimos la medida $G_{n,k}$ como la medida discreta con masa $\alpha_{n,k} = G(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ concentrada en $k2^{-n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^{2n}$, $n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,k}(t) &= \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} dG_{n,k}(x)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(e^{itk2^{-n}} - 1 - \frac{itk2^{-n}}{1+(k2^{-n})^2}\right)\frac{\alpha_{n,k}(1+(k2^{-n})^2)}{(k2^{-n})^2}\right\},
\end{aligned}$$

corresponde a la f.c. de la v.a.

$$\frac{\alpha_{n,k}(1+(k2^{-n})^2)}{(k2^{-n})^2}\left(Y - \frac{k2^{-n}}{(1+(k2^{-n})^2)}\right),$$

donde Y es una v.a. Poisson de parámetro 1. Sea $Y_{n,k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^{2n}$, $n \geq 1$, v.a. con f.c. $\varphi_{n,k}$ y sea $Y_n = \sum_k Y_{n,k}$ con f.c. φ_n con representación (1) y medida $G_n = \sum_k G_{n,k}$. Claramente, las v.a. $Y_{n,k}$ son i.d., lo que implica que Y_n también lo es. Además, $G_n \xrightarrow{v} G$ cuando $n \to \infty$ y $G_n(\mathbb{R}) \leq G(\mathbb{R}) < \infty$. Como vimos el integrando en (1) es continuo y acotado, de aquí $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$. Lo que concluye la prueba.

18. Sea X v.a. con distribución uniforme en el intervalo $(-1, 1)$. Tenemos que la f.c. de X está dada por

$$\varphi_X(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}.$$

Observe que φ_X se anula en los puntos $t = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, por lo cual se afirma que φ_X no puede ser i.d., ya que las f.c. i.d. nunca se anulan.