

Análisis Espectral de Procesos Estacionarios

Series de Tiempo

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

- 1 Introducción
- 2 Procesos Estacionarios
- 3 Representación Espectral

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

- 1 Introducción
- 2 Procesos Estacionarios
- 3 Representación Espectral

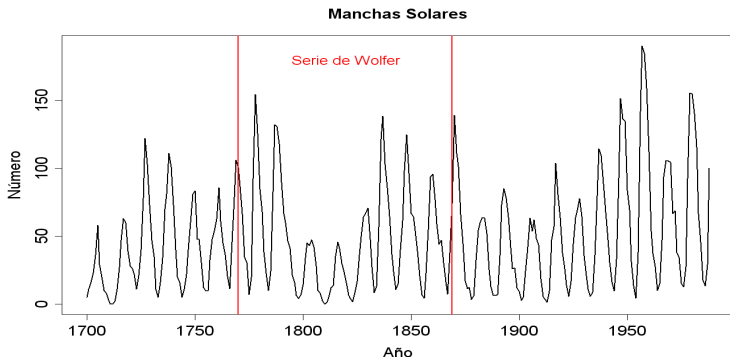


Arthur Schuster

Introducción Histórica

A. Schuster

A finales del siglo XIX el físico A. Schuster se interesó en el análisis de la serie sobre frecuencia de manchas solares recopilada por Wolfer.





Arthur Schuster

Introducción Histórica

A. Schuster

125, 1872]

NATURE

501

clusion, I may add that there is nothing improbable to ed in peoples even so distant from each other as the san Islanders and the Gauls retaining in their traditions a which had been applied to their mythical common ancestor, reasonable in supposing that they and other peoples men- in my paper were alike derived from some region in I Asia. My argument is simply cumulative, as there are acts of a different kind pointing in the same direction.

sory my communication has reached such an inordinate ; but having replied to "M. A. I.'s" objections, which, a first letter, forcibly remind me of the mountain in labour g forth a mouse, I shall not trouble you with further corse on a subject which I fear is far from interesting to a y of your readers.

C. STANLAND WAKE

Meteor

I was going along the road towards Greystoke Castle at at eight P.M. on Friday last, April 12, I noticed a very tere in a south-east direction. It was about the size of a n hand-ball, its centre being of an exceedingly brilliant color, surrounded by a circle of a bluish tinge, while ickering radiations were distinctly visible on its circum- in all directions, reminding me of the spherio-stellate : of certain sponges. It was falling in a perpendicular n, but I was not fortunate enough to see it at the begin- its course. Its downward motion was slow and quite t, apparently not swifter than an ordinary india-rubber uld fall by the gravity of its own body. There was no hatever left behind in its course. After two or three : it suddenly disappeared, before reaching the ground, ; any explosion or expansion of its body. The night was e and still, a maddigest covering the whole sky, inter- here and there with long stratus clouds, and a beautiful rounding the moon. THOMAS FAWCETT
cows School, Cumberland, April 22

A Waterspout

Saturday last, April 16, whilst fishing in the river Elwy int about two miles above the well-known Cefa cavel, 2 from St. Asaph by the river, I witnessed a very singu- nomenon. My attention was suddenly called up-stream markably strange hissing, bubbling sound, such as might ined by plunging a mass of heated metal into water. ing I beheld what I may call a diminutive waterspout in re of the stream, some forty paces from where I was g. Its base, as well as I could observe, was a little more o feet in diameter. The water curled up from the river shroken cylindrical form to a height of about fifteen rotating rapidly, then diverged as from a number of jets,

of NATURE; a mite of information from New Zealand, concern- ing one species of the Cuculidæ, may not be out of place.

The German theory that "the egg of the cuckoo is approxi- mately coloured and marked like those of the birds in whose nest it is deposited, that it may be less easily recognised by the foster parent as a substituted one," does not hold good in respect to our *Ceryle alcyon* *laciniata*, Gml., *pipilivirgata*, the whistler of small cuckoo.

The dupe is the pipit, or gray warbler, *Gygis flaviventris*, Gray, its eggs are white, dotted with red spots; the egg of the whistler of much larger size, is of a greenish dun.

However, I think it should be stated that the nest of the dupe is somewhat of a pear-shaped structure, firmly and thickly built, with a small entrance near the middle, well sheltered with feathers. Here discrimination betwixt eggs may be difficult for the foster parent, if it possesses the faculty and uses it. In the Trans. N. Z. Institute (vol. ii. pp. 58 and 65) reasons have been advanced by the writer for the selection of the warbler's nest by our brightly plumed cuckoo; may "the dim obscure" of its interior supply another reason?

THOMAS H. POTTS

Ohimitahi, Feb. 5

Sun-spots and the Vine Crop

As the connection of sun-spots with terrestrial phenomena is now largely occupying the attention of scientific men, the follow- ing facts may be of some interest. The years in which the wine crop in Germany was unusually good seem (in this century, at least) to have returned at regular intervals. The close coincidence of these years with the years of minimum sun-spots is shown by the following table:—

Minimum of Sun-spots.	Wine-years.	Minimum of Sun-spots.	Wine-years.
1784'8	...	1784	1831'8
1798'5	...	(?)	1846
1810'5	...	1811	1857
1823'2	...	1822	1868
		1857'2	1888

I may add that the gentleman who first remarked the regular recurrence of wine-years at intervals of about eleven years was not aware of the periodicity of the sun-spots, and could not there- fore have been in any way prejudiced. The years given in the above table are the only ones known in Germany as good wine- years.

These facts agree with the results of Messrs. Piazzi Smyth and Stone, who found that the mean temperature on the surface of the earth was subjected to a period of eleven years.

ARTHUR SCHUSTER

Owens College, Manchester, April 23



Introducción Histórica

A. Schuster

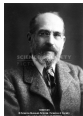
Schuster propuso un modelo en términos de funciones trigonométricas, siguiendo las ideas del análisis armónico:

$$X_t = \sum_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \text{sen } \omega_i t) + \varepsilon_t \quad (1)$$

donde ε_t representa el error o ruido aleatorio.

Un modelo de este tipo requiere la estimación no sólo de los coeficientes a_i , b_i sino también de las frecuencias ω_i , que son desconocidas.

Schuster describió su propuesta como el *modelo de periodicidades ocultas*.



Introducción Histórica

A. Schuster

La idea de Schuster para estimar las frecuencias fue considerar *frecuencias de prueba* $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_k$ y calcular el cuadrado de las amplitudes estimadas correspondientes a estas frecuencias:

$$(\hat{a}_i^2 + \hat{b}_i^2), \quad i = 1, \dots, k.$$

- En la gráfica de frecuencia vs. amplitud al cuadrado, si ω'_i está cerca de una frecuencia verdadera, $(\hat{a}_i^2 + \hat{b}_i^2) \approx (a_i^2 + b_i^2)$, y estos valores se apreciarán claramente
- Si en cambio ω'_i está lejos de todas las frecuencias verdaderas $(\hat{a}_i^2 + \hat{b}_i^2)$ será pequeña.



Introducción Histórica

A. Schuster

En la práctica no graficamos las cantidades $(\hat{a}_i^2 + \hat{b}_i^2)$ sino un múltiplo, que se conoce como el *periodograma*:

Si tenemos n observaciones X_1, \dots, X_n , el periodograma se define como

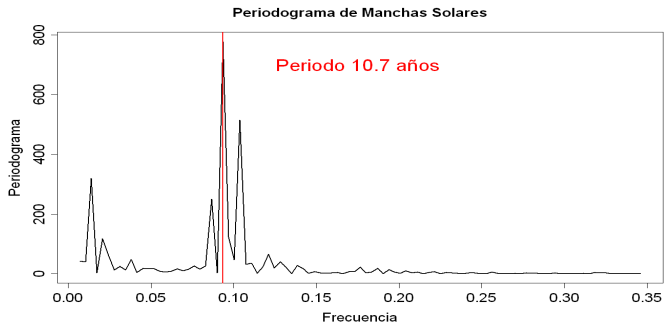
$$I(\omega) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{j=1}^n X_j \cos \omega t \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n X_j \sen \omega t \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Calculamos la función $I(\omega)$ para $\omega = 2\pi k/n$, $k = 1, \dots, [n/2]$. El resultado basado en $n = 289$ datos se presenta en la siguiente figura.



Introducción Histórica

A. Schuster



El mayor valor ocurre para una frecuencia de 0.0934 Hz.
que corresponde a un período de 10.7 años.



Introducción Histórica

A. Schuster

- Este es el inicio de los métodos espectrales para el análisis de series de tiempo estacionarias y estas ideas continúan siendo utilizadas hoy en día, aunque en un contexto diferente.
- Observamos que este modelo es esencialmente un esquema determinístico al cual se le ha añadido un término de error que representa la contribución aleatoria.

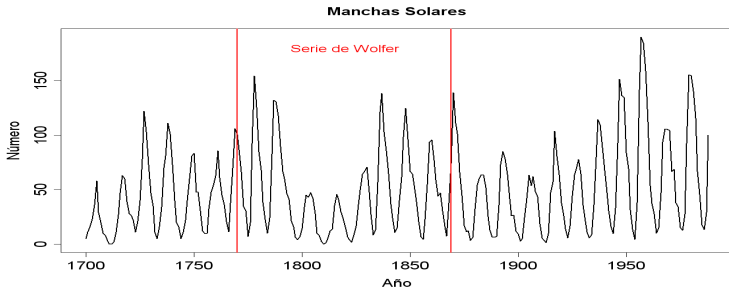


Introducción Histórica

U. Yule

En la década de 1920 el estadístico inglés Udny Yule consideró también la serie de Wolfer.

- Amplitudes irregulares
- Períodos irregulares
- Ciclos asimétricos



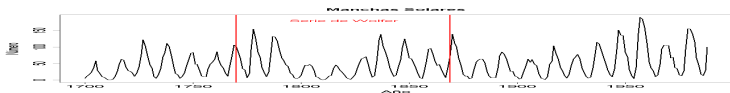


Introducción Histórica

U. Yule

En la década de 1920 el estadístico inglés Udny Yule consideró también la serie de Wolfer.

- Amplitudes irregulares
- Períodos irregulares
- Ciclos asimétricos





Introducción Histórica

U. Yule

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

Yule propuso en 1927 un modelo basado en una analogía con sistemas mecánicos oscilatorios.

Consideró un sistema oscilatorio amortiguado, como un péndulo en un medio con resistencia, sometido a una serie de impulsos periódicos.

Los impulsos ocurren aleatoriamente y en consecuencia el sistema continúa oscilando pero tiene amplitudes y períodos irregulares, como ocurre con la serie de las manchas solares.



Introducción Histórica

U. Yule

El movimiento oscilatorio de un péndulo puede ser descrito por una ecuación diferencial de segundo orden

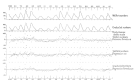
$$\ddot{X}(t) + \alpha\dot{X}(t) + \beta X(t) = \varepsilon(t)$$

donde $X(t)$ denota la desviación del péndulo en el instante t y $\varepsilon(t)$ denota una fuerza (aleatoria) que actúa sobre el péndulo.

El análogo en tiempo discreto es una ecuación en diferencias de segundo orden:

$$X_t + aX_{t-1} + bX_{t-2} = \varepsilon_t$$

donde ε_t denota un ruido blanco.

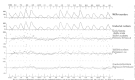


Introducción Histórica

U. Yule

$$X_t = aX_{t-1} + bX_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Esta ecuación fue el modelo propuesto por Yule y es la introducción de los *modelos autoregresivos*.
- En el modelo de Schuster el término de error sólo afecta la observación al instante t mientras que en el modelo de Yule es posible mostrar que el impulso aleatorio que ocurre en el instante t afecta no sólo el valor de X_t sino también a todos los valores siguientes.



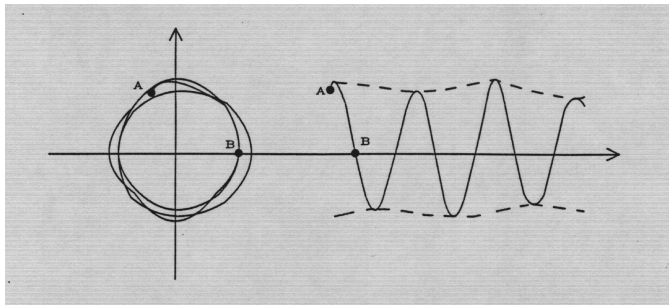
Introducción Histórica

U. Yule

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral



Modelo de Banda Estrecha.



Introducción Histórica

E. Slutsky

Eugen Slutsky fue el primero en explorar sistemáticamente el efecto acumulado de perturbaciones aleatorias.

En un trabajo publicado en 1927 Slutsky formula la siguiente pregunta

¿Es posible que una estructura que conecte fluctuaciones aleatorias pueda transformarlas en un sistema de ondas mas o menos regulares?



Introducción Histórica

E. Slutsky

La estructura principal que Slutsky consideró fue la *promedios móviles*. Si $(\xi_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. definimos

$$X_n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \xi_{n-i}$$

para ciertas constantes $a_i, i = 0, 1, \dots, k-1$.

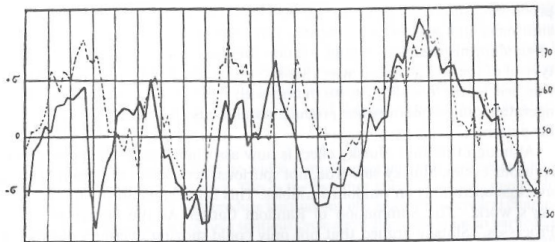
Este procedimiento genera una estructura de dependencia en la serie resultante, porque a través de los promedios los resultados tienen causas comunes.



Introducción Histórica

E. Slutsky

Como ejemplo presenté una comparación visual de un promedio móvil de orden 10 de los últimos dígitos de la lotería soviética con el índice trimestral de ciclos económicos ingleses elaborado por Dorothy Swaine Thomas, para los años de 1855 a 1877.



Черт. 3. — Индекс английской кон'юнктуры за 1855 — 1877 г.
(масштаб слева)
..... Модель I, точки 20—145. (Масштаб справа).

Esquema

- 1 Introducción
- 2 Procesos Estacionarios
- 3 Representación Espectral

Procesos Estacionarios

Definición

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y T un conjunto de índices. Un proceso aleatorio es una colección de variables aleatorias $\{X(t), t \in T\}$.

Todo proceso aleatorio determina una colección de distribuciones finito-dimensionales (dfd): Para cualquier colección finita de números reales $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, μ_{t_1, \dots, t_n} es la distribución del vector $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$:
Dado cualquier boreliano $B_n \in \mathcal{B}^n$

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_n) = P((X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) \in B_n) \quad (3)$$

Definición

Decimos que un proceso aleatorio $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es (estrictamente) estacionario si sus dfd son invariantes por traslaciones en el tiempo, es decir, dados $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, la distribución del vector

$$(X(t_1 + h), X(t_2 + h), \dots, X(t_n + h))$$

no depende de h .

Procesos Estacionarios

Definición

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Supongamos que $E(|X(t)|^2) < \infty$ para todo t . Si el proceso es estacionario entonces

$$E(X(t)) = E(X(0)) = m \quad (4)$$

y

$$\text{Cov}(X(t+h), X(t)) = \text{Cov}(X(h), X(0)) = \Gamma(h) \quad (5)$$

es decir, el valor esperado es constante y la covarianza sólo depende de la distancia en el tiempo h .

Definición

Sea $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un proceso aleatorio con $E(|X(t)|^2) < \infty$ para todo t . Si el proceso satisface las condiciones (4) y (5) decimos que es débilmente estacionario, o estacionario de segundo orden.

- Un proceso débilmente estacionario no necesariamente es estacionario.
- En cambio, todo proceso estacionario que tenga segundo momento finito es débilmente estacionario.

Vamos a suponer que

$$m = E(X(t)) = 0, \quad \sigma^2 = \text{Var}(X(t)) = 1 \quad \forall t.$$

Esto último implica que la covarianza Γ es igual a la correlación ρ .

Ejemplo (Series Trigonométricas)

Podemos construir un proceso estacionario superponiendo componentes armónicas $A_k \text{sen}(2\pi\omega_k t + \phi_k)$ con distintas frecuencias ω_k , amplitudes A_k (aleatorias) y fases ϕ_k (aleatorias):

$$X(t) = \sum_{k=1}^m A_k \text{sen}(2\pi\omega_k t + \phi_k).$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta$$

obtenemos

Ejemplo (Series Trigonómicas)

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{k=1}^m A_k \operatorname{sen}(2\pi\omega_k t + \phi_k) \\ &= \sum_{k=1}^m A_k (\operatorname{sen}(2\pi\omega_k t) \cos \phi_k + \operatorname{sen} \phi_k \cos(2\pi\omega_k t)) \\ &= \sum_{k=1}^m (a_k \operatorname{sen}(2\pi\omega_k t) + b_k \cos(2\pi\omega_k t)) \end{aligned}$$

con $a_k = A_k \cos(\phi_k)$ y $b_k = A_k \operatorname{sen}(\phi_k)$.

Ejemplo (Series Trigonómicas)

Teniendo en cuenta que $\cos(2\pi\omega_k t) = \sin(2\pi\omega_k t + \pi/2)$ cada componente armónica $A_k \sin(2\pi\omega_k t + \phi_k)$ queda representada como combinación lineal de dos componentes armónicas elementales con fases 0 y $\pi/2$. Podemos recuperar amplitud y fase usando

$$A_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}; \quad \phi_k = \arctan(b_k/a_k).$$

Ejemplo (Series Trigonométricas)

Una tercera representación de la serie, llamada la representación compleja, se basa en la identidad

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

*que resulta de la relación de deMoivre: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.
Tenemos*

$$\begin{aligned} A_k \operatorname{sen}(2\pi\omega_k t + \phi_k) &= \frac{A_k}{2i} \left(e^{i2\pi\omega_k t} e^{i\phi_k} - e^{-i2\pi\omega_k t} e^{-i\phi_k} \right) \\ &= \frac{A_k e^{i\phi_k}}{2i} e^{i2\pi\omega_k t} - \frac{A_k e^{-i\phi_k}}{2i} e^{-i2\pi\omega_k t} \\ &= c_k e^{i2\pi\omega_k t} + \overline{c_k} e^{-i2\pi\omega_k t} \end{aligned}$$

Ejemplo (Series Trigonométricas)

Usando la notación $c_{-k} = \overline{c_k}$

$$X(t) = \sum_{\pm k} c_k e^{2\pi\omega_k t}$$

con $c_k = \frac{A_k}{2i} e^{i\phi_k}$ para $k \geq 0$, $c_{-k} = \overline{c_k}$ y $\omega_k = -\omega_k$

Por cada componente armónica con frecuencia $2\pi\omega_k$, la representación compleja tiene dos componentes armónicas, con frecuencias $2\pi\omega_k$ y $-2\pi\omega_k$.

Ejemplo (Series Trigonométricas)

Como $|c_k| = A_k/2$, la amplitud original se divide a partes iguales entre las dos componentes armónicas complejas $e^{i2\pi\omega_k t}$, $e^{-i2\pi\omega_k t}$. La condición $c_{-k} = \overline{c_k}$ garantiza que la serie es real.

Es fácil obtener que la covarianza de este proceso es

$$\Gamma(s, t) = \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 \cos(2\pi\omega_k |t - s|),$$

que es la suma de componentes periódicas con pesos proporcionales a las varianzas σ_k^2 .

Procesos Estacionarios

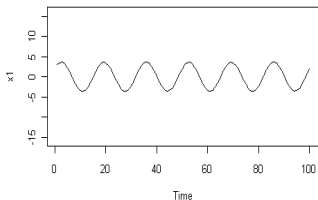
Ejemplos

Introducción

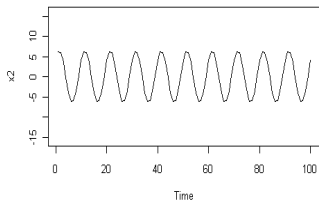
Procesos Estacionarios

Representación Espectral

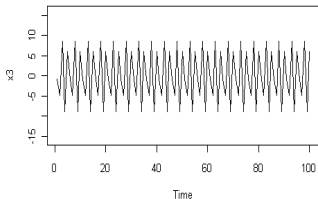
frec=6/100, amp²=13



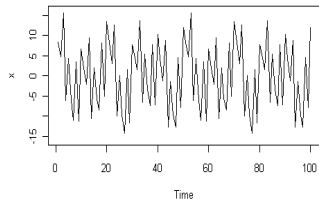
frec=10/100, amp²=41



frec=40/100, amp²=85



Suma



Procesos Estacionarios

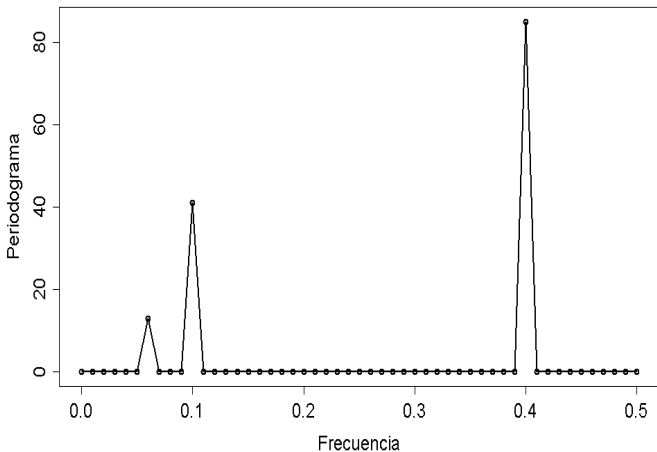
Ejemplos

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

Periodograma



Teorema

La función de correlación $\rho(t)$ de un proceso estacionario tiene las siguientes propiedades

- 1 $\bar{\rho}(t) = \rho(-t)$
- 2 $|\rho(t)| \leq 1$
- 3 $|\rho(t+h) - \rho(t)|^2 \leq 2\text{Re}[\rho(0) - \rho(h)]$
- 4 $\rho(t)$ es definida no-negativa: Para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0.$$

Demostración. (3) Usando la desigualdad de Schwarz tenemos

$$|E(X(0)[\bar{X}(t+h) - \bar{X}(t)])|^2 \leq E|X(0)|^2 E|X(t+h) - X(t)|^2$$

A partir de esta relación obtenemos

$$|\rho(t+h) - \rho(t)|^2 \leq E|X(t+h) - X(t)|^2.$$

Ahora

$$\begin{aligned} E|X(t+h) - X(t)|^2 &= E([X(t+h) - X(t)][\bar{X}(t+h) - \bar{X}(t)]) \\ &= 2\rho(0) - \rho(-h) - \rho(h) \\ &= 2\operatorname{Re}(\rho(0) - \rho(h)) \end{aligned}$$

donde usamos (1).

Demostración. (4) Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \rho(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n z_j \bar{z}_k \mathbb{E}(X(t_j) \bar{X}(t_k)) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^n z_j X(t_j) \sum_{k=1}^n \bar{z}_k \bar{X}(t_k) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left| \sum_{j=1}^n z_j X(t_j) \right|^2 \right) \geq 0.\end{aligned}$$



Observación

- 1 *La propiedad (3) implica que la función de correlación es continua si y sólo si es continua en 0.*
- 2 *Un proceso $X(t)$ es continuo en media cuadrática (o en L^2) si*

$$E|X(t+h) - X(t)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

La demostración del inciso (3) del teorema anterior dice que un proceso estacionario es continuo en media cuadrática si y sólo si su covarianza (correlación) es continua en 0.

Esquema

- 1 Introducción
- 2 Procesos Estacionarios
- 3 Representación Espectral**

Teorema (Bochner)

Una función $C(h)$ es continua, definida no-negativa con $C(0)$ finito si y sólo si existe una función acotada no-decreciente $F(\lambda)$ tal que

$$C(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} F(d\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La demostración de este teorema se puede ver el libro de Cramér & Leadbetter.

Representación Espectral

Covarianza

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Como consecuencia de los dos teoremas anteriores, si $(X(t), t \in T \subset \mathbb{R})$ es un proceso estacionario con función de covarianza $\Gamma(h)$ entonces existe una función acotada no-decreciente F tal que

$$\Gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} F(d\lambda). \quad (6)$$

(6) se conoce como la *representación espectral de la covarianza* y F es la *distribución espectral*.

Representación Espectral

Covarianza

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Como

$$\Gamma(0) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(d\lambda)$$

F es una función de distribución (de una medida de probabilidad) si y sólo si la varianza del proceso vale 1.

Si F es absolutamente continua su derivada $f = F'$ se conoce como la *densidad espectral* del proceso y la representación es

$$\Gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} f(\lambda) d\lambda. \quad (7)$$

Representación Espectral

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

Como

$$\Gamma(0) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda$$

la densidad espectral se puede considerar como la distribución de la varianza σ^2 del proceso en función de las frecuencias.

Representación Espectral

Ejemplo

Vamos a considerar un proceso de la forma

$$X(t) = \sum_{j=-n}^n \xi_j e^{i\omega_j t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (8)$$

donde $\omega_0 = 0, \omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$ son frecuencias fijas y las ξ_j son variables aleatorias con valores complejos.

¿Qué propiedades deben tener las variables ξ_j para que este proceso sea real y (débilmente) estacionario?

Para que el proceso sea real es necesario que las frecuencias sean simétricas respecto a 0, es decir, $\omega_{-j} = -\omega_j$, y las variables ξ_j deben satisfacer la propiedad

$$\xi_{-j} = \overline{\xi_j}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm n. \quad (9)$$

Representación Espectral

Ejemplo

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Para ver las condiciones relativas a la estacionaridad calculamos los momentos de X : El primer momento debe ser constante, digamos que vale m :

$$E(X(t)) = m = \sum_{j=-n}^n E(\xi_j) e^{i\omega_j t},$$

y a partir de esta expresión vemos que los coeficientes $E(\xi_j)$ son los coeficientes de Fourier de la función constante m . Por lo tanto

$$E(\xi_j) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m e^{-i\omega_j t} dt.$$

Representación Espectral

Ejemplo

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Como m es constante, un cálculo sencillo muestra que

$$E(\xi_0) = m, \quad \text{y} \quad E(\xi_j) = 0 \text{ para } j \neq 0.$$

Podemos suponer que $m = 0$ o equivalentemente podemos considerar el proceso centrado $X(t) - m$, de modo que la condición anterior es ahora $E(\xi_j) = 0$ para $j = -n, \dots, n$.

Representación Espectral

Ejemplo

Calculemos ahora la covarianza de X :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t+h, t) &= E(X(t+h)\overline{X}(t)) = E\left[\sum_{j=-n}^n \xi_j e^{i\lambda_j(t+h)} \sum_{k=-n}^n \overline{\xi_k} e^{i\lambda_k t}\right] \\
 &= E\left[\sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \xi_j \overline{\xi_k} e^{i(\lambda_j - \lambda_k)t} e^{i\lambda_j h}\right] \\
 &= \sum_{j=-n}^n E[|\xi_j|^2] e^{i\lambda_j h} + \sum_{j=-n}^n \sum_{k \neq j} E[\xi_j \overline{\xi_k}] e^{i(\lambda_j - \lambda_k)t} e^{i\lambda_j h}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Si queremos que esta expresión sólo dependa de h , la segunda suma debe anularse y para ello es necesario que

$$E(\xi_j \overline{\xi_k}) = 0 \quad \text{para } j \neq k, \tag{11}$$

es decir, las variables ξ_j deben ser no-correlacionadas.

Representación Espectral

Ejemplo

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Obtenemos

$$\Gamma(h) = \sum_{j=-n}^n \mathbb{E}(|\xi_j|^2) e^{i\omega_j h}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Si definimos

$$F(x) = \sum_{j:\omega_j \leq x} \mathbb{E}(|\xi_j|^2)$$

entonces (12) es

$$\Gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega h} F(d\omega), \quad h \in \mathbb{R},$$

Vemos que el espectro está concentrado en las frecuencias $\omega_j, j = -n, \dots, n$ con valores $\mathbb{E}|\xi_j|^2$.

Representación Espectral

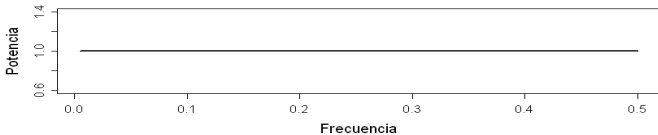
Ejemplos

Introducción

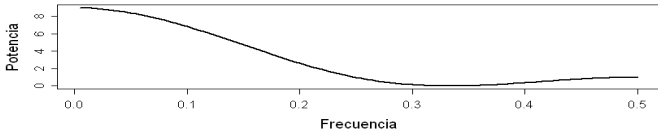
Procesos Estacionarios

Representación Espectral

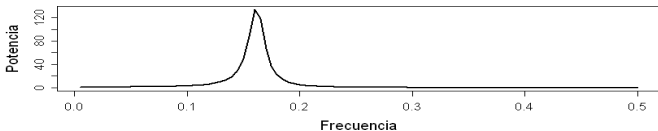
Ruido Blanco



Promedio Movil



Proceso Autoregresivo



Definición

Sea $\zeta(t)$ un proceso aleatorio centrado y con segundo momento finito. Decimos que este proceso tiene incrementos ortogonales si para cualesquiera $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ se tiene que

$$E([\zeta(t_4) - \zeta(t_3)][\bar{\zeta}(t_2) - \bar{\zeta}(t_1)]) = 0$$

Teorema (Cramér)

Sea $X(t)$ un proceso débilmente estacionario, centrado con función de covarianza $\Gamma(h)$ continua en 0 y función de distribución espectral $F(\lambda)$. Existe un proceso $\zeta(\lambda)$ con incrementos ortogonales tal que para cada t fijo tenemos la representación espectral

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda)$$

donde la integral estocástica se define como una integral en media cuadrática. El proceso $\zeta(\lambda)$ está definido salvo por una constante aditiva. Si fijamos $\zeta(-\infty) = 0$ entonces

$$E \zeta(\lambda) = 0, \quad E |\zeta(\lambda)|^2 = F(\lambda), \quad E |d\zeta(\lambda)|^2 = dF(\lambda) = f(\lambda)d\lambda.$$

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Consideremos $\mathcal{H}(X)$, el espacio de Hilbert generado por las variables $X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Los elementos de $\mathcal{H}(X)$ son las combinaciones lineales finitas de la forma

$$\alpha_1 X(t_1) + \cdots + \alpha_n X(t_n),$$

y los límites en media cuadrática de sucesiones de combinaciones de este tipo. El producto interno de dos elementos η_1, η_2 de $\mathcal{H}(X)$ es

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = E(\eta_1 \bar{\eta}_2).$$

y, como es usual, consideramos idénticas a dos variables aleatorias en $\mathcal{H}(X)$ que tengan distancia 0, con la distancia inducida por el producto interior.

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Consideramos ahora otro espacio de Hilbert, $L^2(F)$, el conjunto de las funciones $g(\lambda)$ con valores complejos tales que la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) \quad (13)$$

existe y es finita. Llamaremos $\mathcal{H}(F)$ a este espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)} dF(\lambda). \quad (14)$$

De nuevo, consideramos idénticos dos elementos cuya distancia sea cero.

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Ahora establecemos una correspondencia entre $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(F)$ en varias etapas.

Para cada real t , sean

$$X(t) \in \mathcal{H}(X) \quad \text{y} \quad e^{i\lambda t} \in \mathcal{H}(F)$$

los elementos asociados por esta correspondencia. Por el teorema de Bochner tenemos que

$$E X(t) \overline{X(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} e^{-i\lambda s} dF(\lambda),$$

de modo que se preservan los productos internos.

Representación Espectral

Proceso

Extendemos la correspondencia a las combinaciones lineales haciendo que los elementos

$$\eta = \alpha_1 X(t_1) + \cdots + \alpha_n X(t_n) \quad (15)$$

$$g(\lambda) = \alpha_1 e^{i\lambda t_1} + \cdots + \alpha_n e^{i\lambda t_n} \quad (16)$$

estén asociados por esta correspondencia. De nuevo el teorema de Bochner muestra que los productos internos se conservan, de modo que si los pares η_1, η_2 y g_1, g_2 están asociados entonces

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle \quad (17)$$

y en consecuencia también se tiene que

$$E |\eta_1 - \eta_2|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(\lambda) - g_2(\lambda)|^2 dF(\lambda). \quad (18)$$

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Sea ahora η_1, η_2, \dots una sucesión de v.a. de la forma (15) que converge en media cuadrática a una variable aleatoria η y sea g_1, g_2, \dots la sucesión de funciones de la forma (16) asociadas a las η_i , $i \geq 1$. Tenemos que

$$E |\eta_m - \eta_n|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g_m(\lambda) - g_n(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

y por lo tanto la sucesión (g_n) es una sucesión de Cauchy y converge a un elemento $g \in \mathcal{H}(F)$.

Extendemos la correspondencia asociando los elementos $\eta \in \mathcal{H}(X)$ y $g \in \mathcal{H}(F)$.

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
Estacionarios

Representación
Espectral

Todo elemento de $\mathcal{H}(X)$ es el límite en media cuadrática de una sucesión de elementos de la forma (16).

De manera similar, todo elementos de $\mathcal{H}(F)$ es el límite en media cuadrática de un elemento de la forma (17).

De esta manera hemos extendido la correspondencia a todos los elementos de $\mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{H}(F)$ y por la propiedades de la convergencia en media cuadrática las relaciones (17) y (18) valen para todos los elementos de los espacios de Hilbert considerados, de modo que se conservan los productos internos y las distancias, y la correspondencia es 1-1.

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

La función $g(\lambda) = \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(\lambda)$ está en $\mathcal{H}(F)$ y para cualquier real λ_0 , $g(\lambda - \lambda_0)$ también.

Llamemos $\zeta(\lambda_0)$ al elemento de $\mathcal{H}(X)$ correspondiente a esta última función.

El incremento $\zeta(\lambda_1) - \zeta(\lambda_0)$ corresponde a $g(\lambda - \lambda_1) - g(\lambda - \lambda_0)$.

Si $\lambda_0 < \lambda_1$ esta función es $\mathbf{1}_{(\lambda_0, \lambda_1]}(\lambda)$.

Si (λ_0, λ_1) y (λ_2, λ_3) son intervalos disjuntos, a partir de la conservación de los productos internos se tiene que

$$\begin{aligned} & E([\zeta(\lambda_3) - \zeta(\lambda_2)][\bar{\zeta}(\lambda_1) - \bar{\zeta}(\lambda_0)]) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(\lambda - \lambda_3) - g(\lambda - \lambda_2)][\bar{g}(\lambda - \lambda_1) - \bar{g}(\lambda - \lambda_0)] dF(\lambda) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que $\zeta(\lambda)$ es un proceso con incrementos ortogonales.

Haciendo $\lambda_3 = \lambda_1$ y $\lambda_2 = \lambda_0$ obtenemos

$$\begin{aligned}E |\zeta(\lambda_1) - \zeta(\lambda_0)|^2 &= F(\lambda_1) - F(\lambda_0), \\E |\zeta(\lambda_0)|^2 &= F(\lambda_0).\end{aligned}$$

A partir de estas relaciones es sencillo demostrar, usando la continuidad por la derecha de F , que $\Delta\zeta(\lambda) = \zeta(\lambda) - \zeta(\lambda^-)$ es una variable aleatoria tal que $E |\Delta\zeta(\lambda)|^2 = \Delta F(\lambda)$. Por lo tanto este proceso satisface las relaciones (3).

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Sea ahora $-A = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1} = A$ una partición del intervalo $(-A, A)$. La variable aleatoria

$$\eta = \sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} (\zeta(\lambda_{j+1}) - \zeta(\lambda_j))$$

corresponde a la función

$$g(\lambda) = \sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} \mathbf{1}_{(\lambda_j, \lambda_{j+1}]}(\lambda).$$

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Si hacemos A tender a infinito de modo que la distancia máxima entre valores consecutivos de λ_j tiende a cero, $g(\lambda)$ converge en media cuadrática a $e^{i\lambda t} \in \mathcal{H}(F)$, mientras que η converge en media cuadrática a la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) \in \mathcal{H}(X),$$

de modo que estos límites son elementos correspondientes. Pero ya sabemos que que la función $e^{i\lambda t}$ corresponde a $X(t)$, y como la correspondencia es 1-1 tenemos

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda),$$

y con esto concluye la demostración del teorema.

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Como consecuencia de la ortogonalidad de los incrementos de ζ y las relaciones (3) tenemos la siguiente relación

$$E \zeta(d\lambda) \bar{\zeta}(d\mu) = \begin{cases} F(d\lambda), & \text{si } \lambda = \mu, \\ 0, & \text{si } \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (19)$$

Representación Espectral

Proceso

Introducción

Procesos
EstacionariosRepresentación
Espectral

Usaremos a continuación esta relación para obtener la representación espectral de la covarianza a partir del resultado del teorema:

$$\begin{aligned}\Gamma(h) &= \mathbf{E} X(t+h)X(t) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+h)} \zeta(d\lambda) \right) \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} \zeta(d\mu) \right)} \\ &= \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+h)} e^{-i\mu t} \zeta(d\lambda) \bar{\zeta}(d\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+h)} e^{-i\mu t} \mathbf{E} \zeta(d\lambda) \bar{\zeta}(d\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} F(d\lambda).\end{aligned}$$