Modelos ARCH y GARCH

Roberto Cruz Oropesa
Francisco Javier Rivera
Miguel Ángel Sánchez
Adán Uribe Bravo

Diciembre 9, 2013
Series de Tiempo

Series Finacieras

- Hechos estilizados.
- Sea p_t el precio de un activo al tiempo t.
- Sea $r_t := \log(p_t/p_{t-1})$ retornos o rendimientos.

No estacionalidad de las series de precios

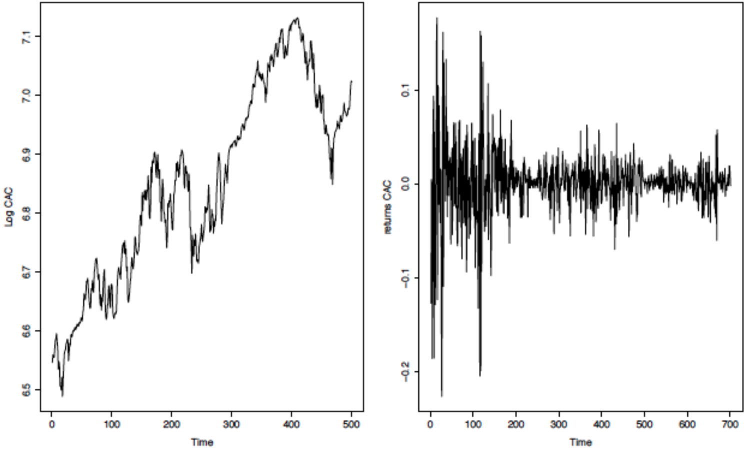


Figure: Log índice de CAC 40 y retornos de CAC 40.

Ausencia de correlación en los retornos y correlación en los cuadrados de los retornos

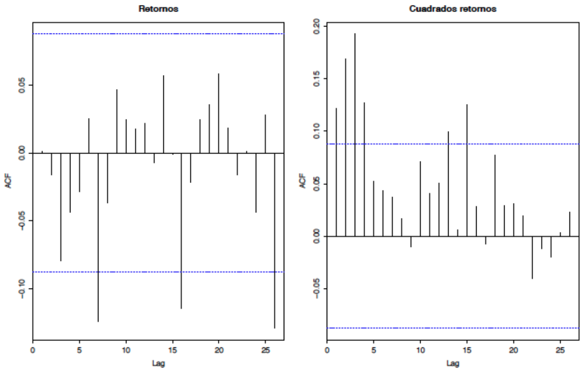
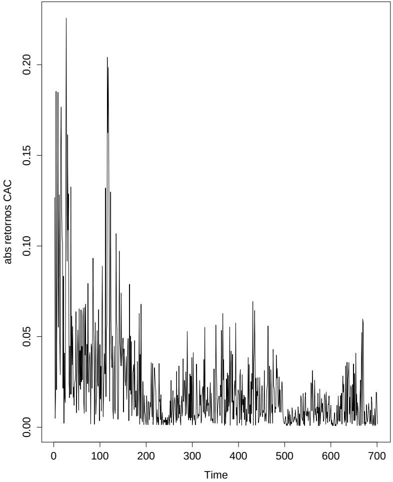


Figure: Función de autocorrelación de retornos y cuadrados de retornos de CAC 40.

Agrupamiento de volatilidad



Distribución de colas pesadas

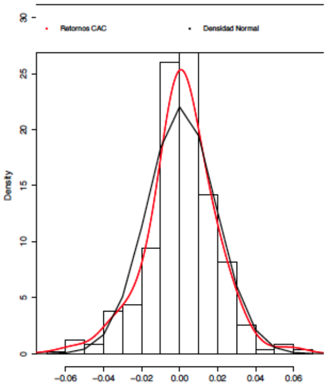


Figure: Densidad de CAC 40 y densidad Normal con media muestral y varianza muestral de los retornos.

Efecto de Apalancamiento

Autocorrelación muestral de los retornos, del valor absoluto de los retornos, la correlación muestral entre r^{+}_{t-h} y $|r_t|$, y entre $-r^{-}_{t-h}$ y $|r_t|$.

h	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\rho}_r(h)$	0.001	-0.016	-0.079	-0.044	-0.028	0.026	-0.124
$\hat{\rho}_{\lvert r \rvert}(h)$	0.125	0.201	0.157	0.150	0.109	0.127	0.104
$\hat{\rho}(r^{+}_{t-h}, \lvert r_t \rvert)$	0.111	0.078	0.165	0.023	0.076	0.023	0.034
$\hat{\rho}(-r^{-}_{t-h}, \lvert r_t \rvert)$	0.117	0.100	0.007	0.099	0.068	0.094	0.047

$*r^{+}_t = \max(r_t, 0)$ y $-r^{-}_t = \max(-r_t, 0)$.

Modelo de varianza aleatoria

1. Heterocedasticidad condicional

$$Var(r_t|r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots) \neq const.$$

2. Consideramos $r_t = \mu + \sigma_t \eta_t$, donde σ_t y η_t son procesos tales que:
    - σ_t es medible con respecto a F_{t-1}.
    - $(\eta_t) \sim iid(0,1)$, η_t es independiente de F_{t-1} y de $\sigma(\{r_s : s < t\})$.
    - $\sigma_t > 0$.
3. Si los dos primeros momentos condicionales de r_t existen entonces:
    - $\mathbb{E}(r_t|F_{t-1}) = \mu$.
    - $var(r_t|F_{t-1}) = \sigma_t^2$ (σ_t es la volatilidad de r_t).
    - $Cov(r_t, r_{t-h}) = 0$, para todo $h > 0$.

ARCH(1)

Un proceso estacionario a_t sigue un modelo **ARCH(1)** del inglés *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* si y sólo si

$$a_t = \sigma_t \eta_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha 1 \geq 0$. Además η_t y σ_t son dos procesos estacionarios independientes entre sí y $\eta_t \sim IIDN\,(0, 1)$, $\eta_t \sim IID\ t - student$ o $\eta_t \sim Errores\ Generalizados$. A σ_t se le conoce como la volatilidad.

ARCH(1)

Sea $\mathcal{F}_{t-1}$ la información hasta el tiempo $t-1$. Entonces la Esperanza:

- Marginal

$$\mathbb{E}\left(a_t\right) = \mathbb{E}\left(\sigma_t \eta_t\right) = \mathbb{E}\left(\eta_t\right)\mathbb{E}\left(\sigma_t\right) = 0$$

- Condicional

$$\mathbb{E}\left(a_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sigma_t \eta_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sigma_t \mathbb{E}\left(\eta_t\right) = 0$$

ARCH(1)

La varianza del Modelo ARCH(1)

- Marginal

$$\mathbb{E}\left(a_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\sigma_t^2\eta_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\eta_t^2\right)\mathbb{E}\left(\sigma_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left(a_t^2\right) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

- Condicional

$$\mathbb{E}\left(a_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sigma_t^2\eta_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sigma_t^2\mathbb{E}\left(\eta_t^2\right) = \sigma_t^2$$

ARCH(1)

$$\mathbb{E}\left(a_t^4\right) = \frac{3\alpha_0^2\left(1+\alpha_1\right)}{\left(1-\alpha_1\right)\left(1-3\alpha_1^2\right)}$$

Este resultado tiene dos implicaciones importantes:

- El cuarto momento de a_t es positivo, entonces

$$0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$$

- La Kurtosis de r_t es

$$\frac{\mathbb{E}\left(a_t^4\right)}{\left[Var\left(a_t\right)\right]^2} = 3\frac{\alpha_0^2\left(1+\alpha_1\right)}{\left(1-\alpha_1\right)\left(1-3\alpha_1^2\right)} \times \frac{\left(1+\alpha_1\right)^2}{\alpha_0^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

es decir, el modelo ARCH(1) es Leptocúrtico

ARCH(1)-AR(1)

El modelo ARCH(1), establece dependencia de tipo AR(1) entre los cuadrados de las observaciones, por tanto

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \nu_t$$

donde

$$\nu_t \equiv a_t^2 - \sigma_t^2 \equiv \sigma_t^2 \left(a_t^2 - 1\right)$$

es un proceso de ruido blanco, formado por variables estacionarias no correlacionadas de media cero y varianza marginal constante. Si llamamos $\rho_c\left(h\right)$ a la función de autocorrelación de los cuadrados de la serie, entonces

$$\begin{aligned} \rho_c\left(h\right) &= \alpha_1 \rho_c\left(h-1\right) \\ &= \alpha_1^{|h|} \end{aligned}$$

que indica que las autocorrelaciones de los cuadrados de las series tienen la estructura de un AR(1) con parámetro α_1.

ARCH(q)

Un proceso estacionario a_t sigue un modelo **ARCH(q)** si y sólo si

$$a_t = \sigma_t \eta_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_{t-i}^2$$

donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha i \geq 0$, $i = 1, ..., q$, para garantizar que la varianza sea positiva. Además, se requiere que

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$$

para que el proceso σ_t^2 sea estacionario.

Debilidades del modelo ARCH

- El modelo asume que los shocks positivos y los negativos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad ya que ésta depende del cuadrado de los shocks pasados. En la práctica, es bien sabido que el precio de un activo financiero responde de manera diferente a los impactos positivos y negativos.
- Los modelos ARCH son bastante restrictivos. Por ejemplo, en un modelo ARCH(1) el parámetro α_1^2 debe pertenecer al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ para que el momento de orden cuarto de la serie sea finito. Para modelos ARCH de orden superior a uno, las restricciones resultan más complejas y el proceso de estimación es más costoso.

Debilidades del modelo ARCH

- El modelo asume que los shocks positivos y los negativos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad ya que ésta depende del cuadrado de los shocks pasados. En la práctica, es bien sabido que el precio de un activo financiero responde de manera diferente a los impactos positivos y negativos.
- Los modelos ARCH son bastante restrictivos. Por ejemplo, en un modelo ARCH(1) el parámetro α_1^2 debe pertenecer al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ para que el momento de orden cuarto de la serie sea finito. Para modelos ARCH de orden superior a uno, las restricciones resultan más complejas y el proceso de estimación es más costoso.

Debilidades del modelo ARCH

- Generalmente, los modelos ARCH requieren un número elevado de retardos para describir el proceso de volatilidad.
- Los modelos ARCH consiguen describir el comportamiento de la varianza condicionada, pero no explican las causas de dicho comportamiento.

Debilidades del modelo ARCH

- Generalmente, los modelos ARCH requieren un número elevado de retardos para describir el proceso de volatilidad.
- Los modelos ARCH consiguen describir el comportamiento de la varianza condicionada, pero no explican las causas de dicho comportamiento.

GARCH

Para el modelo ARCH(1) nuestro predictor al tiempo $t+1$ de la varianza depende solo del último valor de σ_t. En la práctica uno desea mayor precisión en la predicción y para mejorarla se podría incluir todos los valores pasados σ_t con menor peso para volatilidades más distantes. Una propuesta para este problema la desarrolló Bollerslev(1986), donde introducen p retrasos de la varianza condicional al modelo y p hace referencia al orden del modelo GARCH.

GARCH(p,q)

Sea r_t una serie de log retornos y $a_t = r_t - \mu$ entonces el proceso $\{a_t\}$ es llamado GARCH(p,q) si

$$a_t = \sigma_t \eta_t, \ \ \eta_t \sim IIDN(0,1)$$

Donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j a_{t-i}^2, \ \alpha_0 > 0, \ \alpha_i \geqslant 0, \ \beta_j \geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^{max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1 \tag{1}$$

Lo anterior para garantizar de que la varianza sea positiva y existan los momentos de orden superior. De (1) obtenemos que la varianza marginal de a_t es finita, mientras que su varianza condicionada σ_t^2 varía en el tiempo.

GARCH(1,1)

Tomando $p = q = 1$ tenemos que el proceso $\{a_t\}$ es GARCH(1,1),

$$a_t = \sigma_t \eta_t$$

Donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

En este modelo, un valor alto de a_{t-1}^2 o σ_{t-1}^2 conlleva una mayor varianza σ_t^2. Por tanto, un shock a_{t-1}^2 grande tiende a ser seguido por otro shock a_t grande, lo que genera el agrupamiento de volatilidad que se observa en series financieras.

Propiedades

- La media condicionada como la marginal de a_t son cero.
- La varianza condicionada de $E(\sigma_t^2|F_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_{t-1}\sigma_{t-1}^2$.
- La varianza marginal es $Var(a_t) = E(a_t^2) = E(E(a_t^2|F_{t-1})) = \alpha_0 + \alpha_1\sigma^2 + \beta_1\sigma^2$ Luego $\sigma^2 = \frac{\alpha_o}{1-\alpha 1-\beta_1}$ donde se requiere que $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$ para que el proceso sea estacionario.
- Relación con el proceso ARMA(1,1)

Propiedades

- Consideremos $\{a_t^2\}$

$$\begin{aligned} a_t^2 &= \sigma_t^2 + (a_t^2 - \sigma_t^2) && (2)\\ &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + a_t^2 - \sigma_t^2 && (3)\\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 - \beta_1 (a_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) && (4)\\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) a_{t-1}^2 + \nu_t - \beta_1 \nu_{t-1} && (5) \end{aligned}$$

Donde

$$\nu_t = a_t^2 - \sigma_t^2$$

Con la expresión (5) se llega a que podemos ver al proceso $\{r_t^2\}$ como un ARMA(1,1).

Propiedades

Así, la función de autocorrelación para $\{a_t^2\}$ está dada por

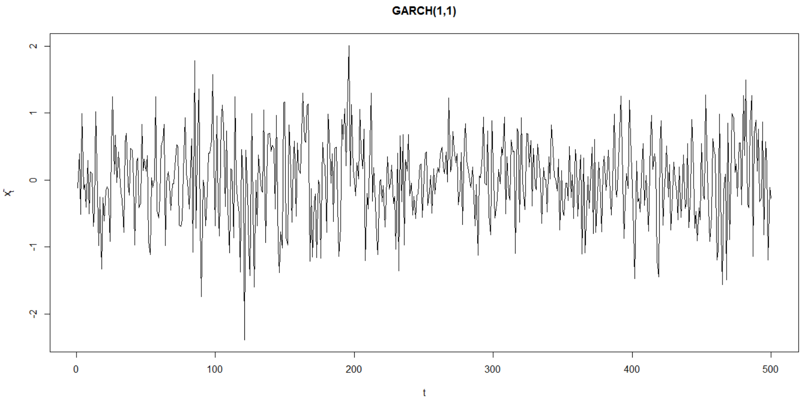
$$\rho(1) = \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2}$$

$$\rho(k) = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}\rho(1), \ k > 1$$

Lo que nos indica que el decrecimiento de la autocorrelación depende de $\alpha_1 + \beta_1$.

Propiedades

Ahora simularemos en R con la función garch.sim de la paquetería TSA un proceso GARCH(1,1) .



Propiedades

Los modelos GARCH presentan, al igual que los procesos ARCH, algunas debilidades. En concreto, la respuesta de la volatilidad a los shocks positivos es la misma que a los negativos.

Modelos IGARCH

- GARCH donde polinomio característico de $a_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2$ tiene raíz unitaria.
- Sea $\delta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$. El impacto de los δ_{t-i}, $i > 0$ sobre a_t^2 es persistente.
- La varianza no condicional no está definida.
- Es posible mostrar que en un modelo IGARCH σ_t^2 es una martingala.

IGARCH(1,1)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2$
- $0 < \beta_1 < 1$

Modelos IGARCH

- GARCH donde polinomio característico de $a_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i)a_{t-i}^2$ tiene raíz unitaria.
- Sea $\delta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$. El impacto de los $\delta_{t-i},\ i > 0$ sobre a_t^2 es persistente.
- La varianza no condicional no está definida.
- Es posible mostrar que en un modelo IGARCH σ_t^2 es una martingala.

IGARCH(1,1)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1)a_{t-1}^2$
- $0 < \beta_1 < 1$

Modelos IGARCH

- GARCH donde polinomio característico de $a_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i)a_{t-i}^2$ tiene raíz unitaria.
- Sea $\delta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$. El impacto de los δ_{t-i}, $i > 0$ sobre a_t^2 es persistente.
- La varianza no condicional no está definida.
- Es posible mostrar que en un modelo IGARCH σ_t^2 es una martingala.

IGARCH(1,1)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1)a_{t-1}^2$
- $0 < \beta_1 < 1$

Modelos IGARCH

- GARCH donde polinomio característico de $a_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2$ tiene raíz unitaria.
- Sea $\delta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$. El impacto de los δ_{t-i}, $i > 0$ sobre a_t^2 es persistente.
- La varianza no condicional no está definida.
- Es posible mostrar que en un modelo IGARCH σ_t^2 es una martingala.

IGARCH(1,1)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2$
- $0 < \beta_1 < 1$

Modelos IGARCH

- GARCH donde polinomio característico de $a_t^2 - \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2$ tiene raíz unitaria.
- Sea $\delta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$. El impacto de los δ_{t-i}, $i > 0$ sobre a_t^2 es persistente.
- La varianza no condicional no está definida.
- Es posible mostrar que en un modelo IGARCH σ_t^2 es una martingala.

IGARCH(1,1)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2$
- $0 < \beta_1 < 1$

Modelos GARCH-M

GARCH-M(1,1)

- $r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t$
- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$
- μ, c constantes.
- Alternativas
  - $r_t = \mu + c\sigma_t + a_t$
  - $r_t = \mu + c \ln \sigma_t^2 + a_t$

- Valor c positivo indica retorno relacionado positivamente con volatilidad.
- Existe correlación en la serie $\{r_t\}$.
- Existencia de prima de riesgo es una razón de retornos con correlaciones

Modelos EGARCH

- Propuesto por Nelson(1991).
- Busca permitir efectos asimétricos entre retornos positivos.
- Sea

$$g(\eta_t) = \theta\eta_t + \gamma\left(|\eta_t| - E\left[|\eta_t|\right]\right)$$

  donde θ, γ son constantes.
- Vealo como:

$$g(\eta_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\eta_t - \gamma E\left[|\eta_t|\right] & , \quad \eta_t \geq 0 \\ (\theta-\gamma)\eta_t - \gamma E\left[|\eta_t|\right] & , \quad \eta_t < 0 \end{cases}$$

Modelos EGARCH

EGARCH(p,q)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \frac{1+\alpha_1 B+\alpha_2 B^2+\ldots+\alpha_{q-1}B^{q-1}}{1-\beta_1 B-\beta_2 B^2-\ldots-\beta_p B^p} g(\eta_{t-1})$
- $\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{|a_{t-i}|+\gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \ln \sigma_{t-j}^2$

- Los polinomios deben tener raíces fuera del círculo unitario.
- No pueden tener factores comunes.
- Es posible ver que:

$$E\left[\ln \sigma_t^2\right] = \alpha_0$$

Modelos EGARCH

EGARCH(1,1)

- $\ln \sigma_t^2 - \alpha \ln \sigma_{t-1}^2 = (1-\alpha)\alpha_0 + g(\eta_{t-1})$

- Lo anterior es:

$$\ln \sigma_t^2 - \alpha \ln \sigma_{t-1}^2 = \begin{cases} \alpha_* + (\gamma + \theta)\eta_{t-1} & , \quad \eta_{t-1} \geq 0 \\ \alpha_* + (\gamma - \theta)(-\eta_{t-1}) & , \quad \eta_{t-1} < 0 \end{cases}$$

donde

$$\alpha_* = (1-\alpha)\alpha_0 - \gamma E\left[|\eta_t|\right]$$

Modelos EGARCH

- Luego,

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp(\alpha_*) \begin{cases} \exp\left((\gamma + \theta)\frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) & , \quad a_{t-1} \geq 0 \\ \exp\left((\gamma - \theta)\frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}\right) & , \quad a_{t-1} < 0 \end{cases}$$

- Coeficientes $(\gamma + \theta)$ y $(\gamma - \theta)$ muestran asimetría.
- Debido al efecto de apalancamiento, el parámetro θ debe ser negativo.

Modelos TGARCH

- Utilizado para manejar efecto de apalancamiento.

TGARCH(p,q)

- $a_t = \sigma_t \eta_t$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t_i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$
- $N_{t-i} = \begin{cases} 1 & , \quad a_{t-i} < 0 \\ 0 & , \quad a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$
- $\alpha_i \geq 0,\ \beta_j \geq 0,\ \gamma_i \geq 0$

Bibliografía

- CHRISTIAN FRANCQ, JEAN-MICHEL ZAKOAIN: Garch Models. Wiley. 2010.
- RUEY S. TSAY: Analysis of Financial Time Series.Second Edition. Wiley. 2005