

Capítulo 2

Cadenas de Markov

2.1. Introducción

Sea $T \subset \mathbb{R}$ y (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Un *proceso aleatorio* es una función

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in T$, $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria.

Si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$ que se conoce como una *trayectoria* del proceso.

En general interpretamos el parámetro t como el tiempo aunque también se pueden considerar procesos con índices en espacios más generales. En lo que estudiaremos en este curso T será un subconjunto de \mathbb{R} . Los casos más comunes serán

- T discreto (Procesos a tiempo discreto): $T = \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \mathbb{Z}$.
- T continuo (Procesos a tiempo continuo): $T = [0, 1]$, $T = [0, \infty)$, $T = \mathbb{R}$.

En cuanto a los valores del proceso llamaremos \mathcal{E} al espacio de estados y consideraremos también dos casos:

- Valores discretos, por ejemplo $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ o $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$
- Valores continuos, por ejemplo $\mathcal{E} = [0, \infty)$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, etc.

2.2. Definiciones

Hablando informalmente, un proceso de Markov es un proceso aleatorio con la propiedad de que dado el valor actual del proceso X_t , los valores futuros X_s para $s > t$ son independientes de los valores pasados X_u para $u < t$. Es decir, que si tenemos la información presente del proceso, saber cómo llegó al estado actual no afecta las probabilidades de pasar a otro estado en el futuro. En el caso discreto la definición precisa es la siguiente.

Definición 2.1 Una *Cadena de Markov* a tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias X_n , $n \geq 1$ que toman valores en un conjunto finito o numerable \mathcal{E} , conocido como espacio de estados, y que satisface la siguiente propiedad

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) \quad (2.1)$$

para todo n y cualesquiera estados i_0, i_1, \dots, i_n, j en \mathcal{E} . La propiedad (2.1) se conoce como la propiedad de Markov.

En general, es cómodo designar los estados de la cadena usando los enteros no-negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$ y diremos que X_n está en el estado i si $X_n = i$.

La probabilidad de que X_{n+1} esté en el estado j dado que X_n está en el estado i es la *probabilidad de transición* en un paso de i a j y la denotaremos P_{ij}^{n+1} :

$$P_{ij}^{n+1} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (2.2)$$

En general, las probabilidades de transición dependen no sólo de los estados sino también del instante en el cual se efectúa la transición. Cuando estas probabilidades son independientes del tiempo (o sea, de n) decimos que la cadena tiene probabilidades de transición *estacionarias* u *homogéneas en el tiempo*. En este caso $P_{ij}^{n+1} = P_{ij}$ no depende de n y P_{ij} es la probabilidad de que la cadena pase del estado i al estado j en un paso. A continuación sólo consideraremos cadenas con probabilidades de transición estacionarias.

Podemos colocar las probabilidades de transición en una matriz

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

que será finita o infinita según el tamaño de \mathcal{E} . P se conoce como la *matriz de transición* o la *matriz de probabilidades de transición* de la cadena. La i -ésima fila de P para $i = 0, 1, \dots$ es la distribución condicional de X_{n+1} dado que $X_n = i$. Si el número de estados es finito, digamos k entonces P es una matriz cuadrada cuya dimensión es $k \times k$. Es inmediato que

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \geq 0, \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j | X_n = i) = 1, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

de modo que cada fila de la matriz representa una distribución de probabilidad. Una matriz con esta propiedad se llama una *matriz estocástica* o *de Markov*.

Ejemplo 2.1 (Línea telefónica)

Consideremos una línea telefónica que puede tener dos estados, libre (0) u ocupada (1), y para simplificar vamos a considerar su comportamiento en los intervalos de tiempo de la forma $[n, n+1)$. Para cualquiera de estos períodos la probabilidad de que llegue una llamada es $\alpha \in [0, 1]$. Si una nueva llamada llega cuando la línea está ocupada, ésta no se registra, mientras que si la línea está libre, se toma la llamada y la línea pasa a estar ocupada. La probabilidad de que la línea se desocupe es $\beta \in [0, 1]$. En cada intervalo de tiempo puede llegar una llamada o se puede desocupar la línea, pero no ambas cosas.

Esta situación se puede modelar por una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1\}$. Las probabilidades de transición están dadas por

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) &= 1 - \alpha = P_{00} \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) &= \alpha = P_{01} \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) &= 1 - \beta = P_{11} \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= \beta = P_{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

Un caso un poco más complicado es el siguiente. Supongamos ahora que si la línea está ocupada y llega una llamada, ésta se guarda y permanece en espera hasta que la línea se desocupa. Pero si hay una llamada en espera no se registran las siguientes llamadas. En cada período entra a lo sumo una llamada a la cola. Cuando en un período se desocupa la línea, se identifica el fin del período con el momento de colgar, de modo tal que después de haber colgado ya no se registran más llamadas en ese período. Como en el ejemplo anterior $\alpha \in [0, 1]$ denota la probabilidad de que llegue una llamada y $\beta \in [0, 1]$ la probabilidad de que la línea se desocupe. Suponemos además que en un mismo período no puede ocurrir que el teléfono esté ocupado con llamada en espera, cuelgue, entre la llamada que estaba en espera y entre otra llamada en espera.

Para este caso consideramos un espacio de estados con tres elementos: 0 denota que la línea está libre, 1 cuando la línea está ocupada y no hay llamada en espera y 2 cuando la línea está libre y hay una llamada en espera. Para simplificar las expresiones vamos a usar la notación $\alpha' = 1 - \alpha$, $\beta' = 1 - \beta$. Las probabilidades de transición para $n \in \mathbb{N}$ son

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) &= \alpha', & P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) &= \alpha, & P(X_{n+1} = 2 | X_n = 0) &= 0, \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= \alpha'\beta, & P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) &= \alpha'\beta' + \alpha\beta, & P(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) &= \alpha\beta', \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 2) &= 0, & P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) &= \beta, & P(X_{n+1} = 2 | X_n = 2) &= \beta'. \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 2.2 (Paseo al Azar o Caminata Aleatoria)

Sean $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ y que toman valores en los enteros $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$; denotaremos por p_Y la distribución de Y_i , es decir $p_Y(x) = P(Y_i = x)$, $x \in \mathbb{Z}$. Consideremos la sucesión

$$X_n = \sum_{i=0}^n Y_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

y veamos que esta sucesión es una cadena de Markov con espacio de estados \mathbb{Z} y determinemos sus probabilidades de transición.

Es evidente que el espacio de estados del proceso X es \mathbb{Z} ya que la suma de dos enteros es un entero. Para demostrar la propiedad de Markov bastará con probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera x_0, \dots, x_n, x_{n+1} se tiene que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (2.5)$$

Para ver esto comenzamos por calcular

$$P(X_k = x_k, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0), \quad x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z} \text{ y } k \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta que $X_n = \sum_{i=0}^n Y_i$, $n \in \mathbb{N}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} P(X_k = x_k, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) &= P(Y_0 = x_0, Y_1 = x_1 - x_0, \dots, Y_k = x_k - x_{k-1}) \\ &= p_Y(x_0)p_Y(x_1 - x_0) \cdots p_Y(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Usando este cálculo es inmediato que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = p_Y(x_{n+1} - x_n).$$

Un cálculo similar muestra que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = \frac{P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} = p_Y(x_{n+1} - x_n) \quad (2.6)$$

y por lo tanto (2.5) se satisface. Las probabilidades de transición están dadas por la ecuación (2.6). ▲

Una cadena de Markov está completamente determinada si se especifican su matriz de transición y la distribución de probabilidad del estado inicial X_0 . Veamos esto: Sea $P(X_0 = x) = \pi(x_i)$ para $i \geq 1$. Es suficiente mostrar como se calculan las probabilidades

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \quad (2.7)$$

ya que cualquier probabilidad que involucre a X_{j_1}, \dots, X_{j_k} , $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ se puede obtener usando la Ley de la Probabilidad Total y sumando términos como (2.7). Tenemos

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &\quad \times P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= P_{x_{n-1}x_n} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} P_{x_{n-2}x_{n-1}} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &= P_{x_{n-1}x_n} P_{x_{n-2}x_{n-1}} \cdots P_{x_0x_1} \pi(x_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

■

Un cálculo similar muestra que (2.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ = P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m | X_n = x_n). \end{aligned}$$

2.2.1. Consecuencias de la Propiedad de Markov

En esta sección veremos algunas consecuencias de la propiedad de Markov (2.1).

Proposición 2.1 *La propiedad de Markov es equivalente a la siguiente condición: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathcal{E}$, condicionalmente a $X_n = x$, la distribución de X_{n+1} es $(P_{xy}, y \in \mathcal{E})$ y es independiente de X_0, \dots, X_{n-1} .*

Demostración. Comenzamos por suponer cierta la propiedad de Markov. Para probar que la propiedad de Markov implica esta propiedad basta demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \\ = P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) P_{x_n, x_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En efecto, el lado izquierdo de la ecuación (2.9) se puede escribir como

$$\begin{aligned} LI &= \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ &\quad \times \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} \\ &= P_{x_n, x_{n+1}} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n), \end{aligned}$$

la última igualdad es consecuencia de la propiedad de Markov y de la homogeneidad de la cadena. Ahora demostraremos que la afirmación en la proposición implica la propiedad de Markov. Para ello basta demostrar que la probabilidad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n),$$

no depende de x_0, \dots, x_{n-1} . En efecto, el resultado se deduce de la siguiente serie de igualdades:

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0 | X_n = x_n)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n)} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) \times P_{x_n, x_{n+1}}}{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n)} \\ &= P_{x_n, x_{n+1}}. \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado refuerza la idea de que el pasado no tiene ninguna influencia en el comportamiento futuro de una cadena de Markov.

Proposición 2.2 Sean X una cadena de Markov (π, P) , con espacio de estados \mathcal{E} , $x, y, z \in \mathcal{E}$ y $0 \leq m \leq n-1$, $n, m \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_m = z) = P(X_{n+1} = y | X_n = x) = P_{x,y}.$$

Demostración. Para simplificar la notación haremos la prueba solamente en el caso en que $m = 0$, la prueba del caso general es muy similar. Usaremos el hecho que el conjunto Ω se puede escribir como la unión disjunta de los siguientes conjuntos:

$$\Omega = \bigcup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{E}} \{X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\},$$

y en particular $\Omega = \{X_i \in \mathcal{E}\}$, para calcular la probabilidad $P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_0 = z)$. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_m = z) &= \frac{P(X_{n+1} = y, X_n = x, X_{n-1} \in \mathcal{E}, \dots, X_1 \in \mathcal{E}, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{E}} \frac{P(X_{n+1} = y, X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{E}} P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = z) \\ &\quad \times \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{E}} P(X_{n+1} = y | X_n = x) \\ &\quad \times \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \\ &= P(X_{n+1} = y | X_n = x) \\ &\quad \times \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{E}} \frac{P(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \\ &= P(X_{n+1} = y | X_n = x) \frac{P(X_n = x, X_{n-1} \in \mathcal{E}, \dots, X_1 \in \mathcal{E}, X_0 = z)}{P(X_n = x, X_0 = z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_{n+1} = y | X_n = x) \\
&= P_{x,y},
\end{aligned}$$

para justificar estas igualdades utilizamos el hecho de que la probabilidad de la unión numerable de conjuntos disjuntos es igual a la suma de las probabilidades de dichos conjuntos y la propiedad de Markov. ■

De manera análoga se puede demostrar que al condicionar con respecto a cualquier evento del pasado la propiedad de Markov sigue siendo válida en el sentido siguiente.

Proposición 2.3 Sean $y, z \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \subseteq \mathcal{E}$. Se tiene que

$$P(X_{n+1} = y | X_n = z, X_{n-1} \in A, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} = y | X_n = z).$$

Otra forma de probar este resultado es utilizando la forma equivalente de la propiedad de Markov que fue enunciada en la Proposición 2.1. En efecto, basta con darse cuenta que el lado izquierdo de la identidad de la Proposición 2.3 puede ser escrita como sigue

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = y | X_n = z, X_{n-1} \in A, \dots, X_0 \in A_0) &= \frac{P(X_{n+1} = y, X_{n-1} \in A, \dots, X_0 \in A_0 | X_n = z)}{P(X_{n-1} \in A, \dots, X_0 \in A_0 | X_n = z)} \\
&= P(X_{n+1} = y | X_n = z),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de la ecuación (2.9).

Finalmente, la idea de que una cadena es homogénea en el tiempo será reforzada por el siguiente resultado que la ley de la cadena observada a partir del instante m es la misma que la de aquella observada al tiempo $n = 0$.

Proposición 2.4 Sean $m, k \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \dots, x_m, \dots, x_{m+k} \in \mathcal{E}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&P(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_{m+k} = x_{m+k} | X_m = x_m, \dots, X_0 = x_0) \\
&= P(X_1 = x_{m+1}, \dots, X_k = x_{m+k} | X_0 = x_m)
\end{aligned}$$

Demostración. Usando la ecuación (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
&P(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_{m+k} = x_{m+k} | X_m = x_m, \dots, X_0 = x_0) \\
&= \frac{P(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_{m+k} = x_{m+k}, X_m = x_m, \dots, X_0 = x_0)}{P(X_m = x_m, \dots, X_0 = x_0)} \\
&= \frac{P_{x_0, x_1} \cdots P_{x_{m-1}, x_m} P_{x_m, x_{m+1}} \cdots P_{x_{m+k-1}, x_{m+k}}}{P_{x_0, x_1} \cdots P_{x_{m-1}, x_m}} \\
&= P_{x_m, x_{m+1}} \cdots P_{x_{m+k-1}, x_{m+k}} \\
&= P(X_1 = x_{m+1}, \dots, X_k = x_{m+k} | X_0 = x_m)
\end{aligned}$$

2.2.2. Ejemplos

Ejemplo 2.3

Sea $\xi_i, i \geq 1$ v.a.i.i.d. con valores sobre los enteros positivos: $P(\xi_i = j) = p_j$ para $j \geq 0$. Construiremos varios ejemplos con base en esta sucesión.

a) El primer ejemplo es la sucesión (ξ_i) con ξ_0 fijo. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

El hecho de que todas las filas sea idénticas refleja la independencia de las variables.

b) Sea $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$ y $S_0 = 0$ por definición. Este proceso es una cadena de Markov:

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) &= P(S_n + \xi_{n+1} = k | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) \\ &= P(i_n + \xi_{n+1} = k | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) \\ &= P(i_n + \xi_{n+1} = k | S_n = i_n) \\ &= P(S_{n+1} = k | S_n = i_n). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = j | S_n = i) &= P(S_n + \xi_{n+1} = j | S_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i | S_n = i) \\ &= \begin{cases} p_{j-i}, & \text{para } j \geq i, \\ 0, & \text{para } j < i, \end{cases} \end{aligned}$$

y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

c) Si las variables ξ_i pueden tomar valores positivos y negativos entonces las sumas S_n toman valores en \mathbb{Z} y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ \cdots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \cdots & p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(d) Máximos Sucesivos.

Sea $M_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, para $n = 1, 2, \dots$ con $M_0 = 0$. El proceso M_n es una cadena de Markov y la relación

$$M_{n+1} = \max\{M_n, \xi_{n+1}\}$$

nos permite obtener la matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} Q_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & Q_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & Q_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $Q_k = p_0 + p_1 + \dots + p_k$ para $k \geq 0$.

▲

Ejemplo 2.4 (El Paseo al Azar Unidimensional)

Consideremos una sucesión de juegos de azar en los que en cada juego ganamos \$1 con probabilidad $p = 0.4$ y perdemos \$1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Supongamos que decidimos dejar de jugar si nuestro

capital llega a N o si nos arruinamos. El capital inicial es X_0 y X_n es nuestro capital al cabo de n juegos. Sea ξ_i el resultado del i -ésimo juego:

$$\xi_i = \begin{cases} +1, & \text{con probabilidad } p, \\ -1, & \text{con probabilidad } q, \end{cases}$$

entonces

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

y estamos en la situación del ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i) = P(\xi_{n+1} = j - i | X_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i) = \begin{cases} 0.4, & \text{si } j = i + 1, \\ 0.6, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz de transición en este caso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con mayor generalidad podemos pensar que una partícula describe el paseo al azar cuyos estados son un conjunto de enteros finito o infinito, por ejemplo $a, a + 1, \dots, b - 1, b$. Si la partícula se encuentra en el estado i , en una transición puede quedarse en i o pasar a los estados $i + 1$ o $i - 1$. Supongamos que las probabilidades de transición son estacionarias y llamémoslas r, p y q , respectivamente, con $r + p + q = 1$. Hay dos casos especiales en los extremos de la cadena. Si ponemos $a = 0$ y $b = N$ entonces

$$\begin{aligned} P(X_n = 0 | X_{n-1} = 0) &= r_0, & P(X_n = N | X_{n-1} = N) &= r_N, \\ P(X_n = 1 | X_{n-1} = 0) &= p_0, & P(X_n = N - 1 | X_{n-1} = N) &= q_N, \\ P(X_n = -1 | X_{n-1} = 0) &= 0, & P(X_n = N + 1 | X_{n-1} = N) &= 0, \end{aligned}$$

y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & r & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_N & r_N \end{pmatrix}$$

El paseo al azar simétrico corresponde al caso $r = 0, p = q = 1/2$ y representa una aproximación discreta de un Movimiento Browniano. Si $p_0 = 0, r_0 = 1$ decimos que el estado 0 es *absorbente* o que 0 es una *barrera absorbente*. Si en cambio $p_0 = 1, r_0 = 0$, al llegar al estado 0 la partícula regresa inmediatamente al estado 1. Decimos en este caso que 0 es un *estado reflector* o que es una *barrera reflectora*. Algo similar ocurre para el estado N . Si $0 < p_0, q_0 < 1$ el estado 0 es un *reflector parcial* o una *barrera parcialmente reflectora*. ▲

Ejemplo 2.5 (El Modelo de Ehrenfest)

Este modelo, propuesto inicialmente por Paul y Tatiana Ehrenfest, representa una descripción matemática simplificada del proceso de difusión de gases o líquidos a través de una membrana. El modelo consiste de dos cajas A y B que contienen un total de N bolas. Seleccionamos al azar una de las N bolas y la colocamos en la otra caja. Sea X_n el número de bolas en la caja A después de la n -ésima transición; X_n es una cadena de Markov:

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{N - i}{N},$$

ya que para aumentar el número de bolas en A hay que escoger una de las bolas en B . Similarmente,

$$P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{i}{N}.$$

Resumiendo, las probabilidades de transición son

$$P_{ii+1} = \frac{N - i}{N}, \quad P_{ii-1} = \frac{i}{N}.$$

Para el caso $N = 5$, por ejemplo, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▲

Ejemplo 2.6 (Modelo de Inventario)

Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema: Si al final del día el número de unidades disponibles es 1 ó 0, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea X_n el número de unidades disponibles al final del n -ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego es 0, 1, 2, ó 3 con probabilidades 0.3; 0.4; 0.2 y 0.1 respectivamente. Tenemos entonces la siguiente matrix de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Esta cadena es un ejemplo de una política de control de inventarios (s, S) con $s = 1$ y $S = 5$: cuando el stock disponible cae a s o por debajo de s , se ordena suficiente mercancía para llevar el stock a $S = 5$. Sea D_n la demanda en el n -ésimo día. Tenemos

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n > s, \\ (S - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n \leq s. \end{cases} \quad (2.10)$$

La descripción general de este esquema de inventario es la siguiente: se tiene un inventario de cierto producto con el fin de satisfacer la demanda. Suponemos que el inventario se repone al final de períodos

que etiquetamos $n = 0, 1, 2, \dots$ y suponemos que la demanda total durante un período n es una v.a. X_n cuya distribución es independiente del período (es decir, es estacionaria):

$$P(D_n = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$.

El nivel del inventario se verifica al final de cada período y la política (s, S) de reposición ($s < S$) estipula que si el nivel de inventario no está por encima de s , se ordena una cantidad suficiente para llevar el inventario a S . Si, en cambio, el inventario disponible es mayor que s , no se produce una orden. Llamemos X_n al inventario disponible al final del n -ésimo período.

Hay dos situaciones posibles cuando la demanda excede al inventario:

1. La demanda no satisfecha se pierde.

En este caso el nivel del inventario nunca puede ser negativo y vale la relación (2.10).

2. La demanda no satisfecha en un período se satisface inmediatamente después de renovar el inventario.

En este caso el nivel del inventario puede ser negativo y satisface

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_{n+1} & \text{si } X_n > s, \\ S - D_{n+1} & \text{si } X_n \leq s. \end{cases}$$

La sucesión $(X_n)_{n \geq 1}$ es una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} P(D_{n+1} = i - j) & \text{si } s < i < S, \\ P(D_{n+1} = S - j) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

▲

Ejemplo 2.7 (Rachas)

Realizamos una sucesión de juegos en idénticas condiciones con probabilidad de éxito (E) p y de fracaso (F) $q = 1 - p$. Decimos que ocurre una racha de longitud k en el juego n si han ocurrido k éxitos sucesivos en el instante n luego de un fracaso en el instante $n - k$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{F} & \underline{E} & \underline{E} & \underline{E} & \dots & \underline{E} \\ n-k & n-k+1 & n-k+2 & n-k+3 & & n \end{array}$$

Para estudiar este proceso como una cadena de Markov definimos los siguientes estados: Si el ensayo resulta en fracaso, el estado es 0. Si resulta en éxito, el estado es el número de éxitos que han ocurrido en sucesión. Por lo tanto, desde cualquier estado i puede haber una transición al estado 0 (si hay un fracaso en el próximo juego) con probabilidad p , mientras que si hay un éxito la racha continua y la transición es de i a $i + 1$. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

▲

Ejemplo 2.8

Sean X_0 una variable aleatoria que toma valores en \mathcal{E} , $\{Y_n : \Omega \rightarrow S, n \in \mathbb{N}\}$, una sucesión de variables aleatorias independientes y $F : \mathcal{E} \times S \rightarrow \mathcal{E}$. En general, cualquier fenómeno descrito por una relación en recurrencia aleatoria de la forma

$$X_{n+1} = F(X_n, Y_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

es una cadena de Markov. Verifiquemos la propiedad de Markov

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y \in \mathcal{E}$. Para ello observemos que existe una sucesión de funciones deterministas $g_n : \mathcal{E} \times S^n \rightarrow \mathcal{E}$, tal que $X_n = g_n(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$. En efecto, estas pueden ser definidas por la recurrencia $g_0(x) = x, x \in \mathcal{E}$, y para $z_0 \in \mathcal{E}$ y $z_1, \dots, z_n \in S$

$$g_n(z_0, z_1, \dots, z_n) = F(g_{n-1}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n), \quad n \geq 1.$$

Usando esto se tiene que

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x, X_{n+1} = y)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, Y_n) = x, F(x, Y_{n+1}) = y)}{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, Y_n) = x)} \\ &= \frac{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, Y_n) = x) P(F(x, Y_{n+1}) = y)}{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, Y_n) = x)} \\ &= P(F(x, Y_{n+1}) = y). \end{aligned}$$

Donde \tilde{x}_i representa los valores tales que $F(x_{i-1}, \tilde{x}_i) = x_{i+1}$. Por otro lado, usando la independencia se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \frac{P(F(X_n, Y_{n+1}) = y, X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= \frac{P(F(x, Y_{n+1}) = y, X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= \frac{P(F(x, Y_{n+1}) = y) P(X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= P(F(x, Y_{n+1}) = y). \end{aligned}$$

▲

2.3. Matrices de Transición

Una herramienta fundamental en el estudio de las cadenas de Markov lo constituyen las matrices de transición en n pasos: $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$, donde $P_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que el proceso pase del estado i al estado j en n pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j | X_m = i).$$

Recordamos que estamos trabajando con procesos cuyas matrices de transición son estacionarias.

Teorema 2.1 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov) Si $P = (P_{ij})$ es la matriz de transición (en un paso) de una cadena de Markov, entonces

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_k P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)} \quad (2.11)$$

para cualquier par fijo de enteros no-negativos r y s que satisfagan $r + s = n$, donde definimos

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demostración.

Para calcular $P_{ij}^{(n)}$ hacemos una partición según los valores posibles de la cadena en el instante r :

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j, X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_r = k, X_0 = i)} \frac{P(X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)}. \end{aligned}$$

Observamos que la relación (2.11) representa la multiplicación de las matrices $P^{(r)}$ y $P^{(s)}$, de modo que $P^{(n)}$ es simplemente la n -ésima potencia de P . Por esta razón eliminamos de ahora en adelante los paréntesis en la notación del exponente. ■

Si la probabilidad de que el proceso esté inicialmente en j es $\pi(j)$:

$$P(X_0 = j) = \pi(j)$$

entonces la probabilidad de que el proceso esté en el estado k en el instante n es

$$P(X_n = k) = P_k^{(n)} = \sum_j \pi(j) P_{jk}^n.$$

Notación. $P_i(A) = P(A | X_0 = i)$ y $E_i[\cdot] = E[\cdot | X_0 = i]$.

En general no es sencillo calcular las matrices de transición a n pasos. En el próximo ejemplo presentamos un caso particular en el cual esto se puede hacer explícitamente.

Ejemplo 2.9 (Cadena con dos Estados)

Consideremos una cadena con dos estados, 0 y 1, y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 1 - \beta$ las filas coinciden y se trata de v.a.i.i.d. con $P(X_n = 0) = \beta$, $P(X_n = 1) = \alpha$.

Para una cadena de estas dimensiones podemos calcular explícitamente la matriz de transición en n pasos:

$$P^n = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^n}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Usando la notación

$$A = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

tenemos

$$P^n = \frac{1}{\alpha + \beta} (A + (1 - \alpha - \beta)^n B).$$

Comenzamos por calcular los siguientes productos

$$AP = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{aligned} BP &= \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - \alpha^2 - \alpha\beta & -\alpha + \alpha^2 + \alpha\beta \\ -\beta + \alpha\beta + \beta^2 & \beta - \alpha\beta - \beta^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - \alpha - \beta)B \end{aligned}$$

Demostremos (2.12) por inducción. Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha(1 - \alpha - \beta) & \alpha - \alpha(1 - \alpha - \beta) \\ \beta - \beta(1 - \alpha - \beta) & \alpha + \beta(1 - \alpha - \beta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha - \alpha^2 - \alpha\beta & \alpha^2 + \alpha\beta \\ \alpha\beta + \beta^2 & \alpha + \beta - \alpha\beta - \beta^2 \end{pmatrix} = P \end{aligned}$$

Para completar la prueba por inducción supongamos cierta la fórmula para n , entonces

$$\begin{aligned} P^n P &= \frac{1}{\alpha + \beta} (A + (1 - \alpha - \beta)^n B) P \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} (A + (1 - \alpha - \beta)^{n+1} B) = P^{n+1} \end{aligned}$$

Observamos que $|1 - \alpha - \beta| < 1$ cuando $0 < \alpha, \beta < 1$ y, por lo tanto $(1 - \alpha - \beta)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha + \beta} & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta} & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$$

▲

En otros casos podemos utilizar el siguiente resultado de álgebra lineal, que enunciamos sin demostración.

Teorema 2.2 *Sea A una matriz de transición de $n \times n$ con n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores columna de \mathbb{R}^n tales que v_i es un vector propio correspondiente a λ_i para $i = 1, 2, \dots, n$. Sea C la matriz $n \times n$ que tiene a v_i como i -ésimo vector columna. Entonces C es invertible y $C^{-1}AC = D$, con D la matriz cuyas entradas están dadas por $d_{i,i} = \lambda_i$ y $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, la k -ésima potencia de A , esta dada por*

$$A^{(k)} = CD^{(k)}C^{-1},$$

y las entradas de $D^{(k)}$ están dadas por $d_{i,j}^{(k)} = d_{i,j}^k$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$A^{(k)}x = r_1\lambda_1v_1 + r_2\lambda_2v_2 + \cdots + r_n\lambda_nv_n,$$

donde $(r_i, i \in \{1, \dots, n\})$ están dados por

$$C^{-1}x = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$$

Ejemplo 2.10

Sea $X = \{X_n, n \geq 0\}$ una cadena con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

El objetivo de este ejercicio es encontrar la forma general de la entrada $(1, 1)$ de la matriz $P^{(n)}$, es decir $P_{1,1}^{(n)}$, para toda $n \geq 0$. Usando el teorema 2.2 calculemos la ecuación característica de P .

$$\begin{aligned} 0 &= \det\{P - xI\} \\ &= -x(1/2 - x)^2 + 1/4 \\ &= (-1)(x/4 - x^2 + x^3 - 1/4) \\ &= (-1)(x - 1)(x^2 + 1/4) \\ &= (-1)(x - 1)(x - i/2)(x + i/2). \end{aligned}$$

Los valores propios de P son todos distintos $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i/2, \lambda_3 = -i/2$. Se tiene entonces que:

$$P = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix} C^{-1} \quad \text{y} \quad P^n = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (i/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i/2)^n \end{pmatrix} C^{-1},$$

y por lo tanto que para algunos a, b, c números complejos

$$P_{11}^{(n)} = a + b(i/2)^n + c(-i/2)^n.$$

Recordemos que $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$ y

$$\left(\pm \frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\pm in\pi/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\pi/2) \pm i \sin(n\pi/2).$$

Usando esto podemos escribir a $P_{11}^{(n)}$ como

$$P_{11}^{(n)} = \alpha + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\pi/2) + \gamma \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n\pi/2), \quad n \geq 0.$$

donde $\alpha = a, \beta = b + c, \gamma = i(b - c)$. Para terminar determinemos a α, β, γ , (los cuales serán a fortiori números reales dado que $P_{11}^{(n)}$ es un número real). Basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= P_{11}^{(0)} = \alpha + \beta \\ 0 &= P_{11}^{(1)} = \alpha + \frac{1}{2}\gamma \\ 0 &= P_{11}^{(2)} = \alpha - \frac{1}{4}\beta, \end{aligned}$$

para ver que $\alpha = 1/5, \beta = 4/5, \gamma = -2/5$. De donde vemos que

$$P_{11}^{(n)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\pi/2) - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n\pi/2), \quad n \geq 0.$$

El mismo método puede ser empleado para calcular el resto de las entradas de la matriz $P^{(n)}$. ▲

2.4. Clasificación de los Estados

Definición 2.2 Sea \mathcal{E} el espacio de estados de una cadena de Markov y $A \subset \mathcal{E}$. El *tiempo de llegada* a A se define como

$$T_A = \min\{n \geq 1 : X_n \in A\} \quad (2.13)$$

si $X_n \in A$ para algún n y $T_A = \infty$ si $X_n \notin A$ para todo $n > 0$. Es decir, es el primer instante luego del inicio de la cadena, en el que la cadena visita al conjunto A . Si $A = \{a\}$ para algún $a \in \mathcal{E}$ escribimos T_a .

Una relación importante asociada a los tiempos de llegada es la siguiente:

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^n P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m}, \quad n \geq 1. \quad (2.14)$$

Observamos que

$$P_i(T_j = 1) = P_i(X_1 = j) = P_{ij}$$

y además

$$P_i(T_j = 2) = \sum_{k \neq j} P_i(X_1 = k, X_2 = j) = \sum_{k \neq j} P_{ik} P_{kj}.$$

Para valores mayores de n tenemos

$$P_i(T_j = n + 1) = \sum_{k \neq j} P_{ik} P_k(T_j = n), \quad n \geq 1. \quad (2.15)$$

Definición 2.3 Definimos

$$\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = P(T_j < \infty | X_0 = i), \quad (2.16)$$

la probabilidad de que una cadena que comienza en i visite el estado j . En particular, ρ_{jj} es la probabilidad de que una cadena que comienza en j , regrese a j .

Observamos que

$$\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(T_j = m). \quad (2.17)$$

Definición 2.4 Decimos que un estado j es *recurrente* si $\rho_{jj} = 1$ y *transitorio* si $\rho_{jj} < 1$.

Si j es recurrente, y la cadena comienza en j , entonces regresa a j con probabilidad 1. Si, en cambio, j es transitorio, hay una probabilidad positiva e igual a $1 - \rho_{jj}$ de que si la cadena comienza en j , nunca regrese a ese estado. Si j es un estado absorbente, $P_j(T_j = 1) = 1$ y por lo tanto $\rho_{jj} = 1$, de modo que un estado absorbente es necesariamente recurrente.

Ejemplo 2.11 (Paseo al Azar con $N=4$)

La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 4 son absorbentes, y por lo tanto son recurrentes. Veamos que los otros estados, 1, 2 y 3, son transitorios.

Si estamos en 1 y la cadena pasa a 0, nunca regresará a 1, de modo que la probabilidad de nunca regresar a 1 es

$$P_1(T_1 = \infty) = P(T_1 = \infty | X_0 = 1) \geq P_{10} = 0.6 > 0.$$

De manera similar, comenzando en 2, la cadena puede ir a 1 y luego a 0, de modo que

$$P_2(T_2 = \infty) = P(T_2 = \infty | X_0 = 2) \geq P_{21}P_{10} = 0.36 > 0.$$

Finalmente, si comenzamos en 3 observamos que la cadena puede ir inmediatamente a 4 y no regresar nunca con probabilidad 0.4:

$$P_3(T_3 = \infty) = P(T_3 = \infty | X_0 = 3) \geq P_{34} = 0.4 > 0.$$

▲

Sea $\mathbf{1}_j(x)$ la función indicadora del estado j , definida por

$$\mathbf{1}_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = j, \\ 0, & \text{si } x \neq j. \end{cases}$$

Sea $N(j)$ el número de veces que la cadena visita el estado j :

$$N(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_j(X_n). \quad (2.18)$$

Como el evento $\{N(j) \geq 1\}$ equivale al evento $\{T_j < \infty\}$, tenemos que

$$P_i(N(j) \geq 1) = P_i(T_j < \infty) = \rho_{ij}. \quad (2.19)$$

Proposición 2.5 *La probabilidad de que una cadena que comienza en i visite el estado j por primera vez en el instante m y que la próxima visita ocurra n unidades de tiempo después es*

$$P_i(T_j = m)P_j(T_j = n) \quad (2.20)$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} & P(X_{n+m} = j, X_{n+m-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j, X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\ &= P(X_{n+m} = j, X_{n+m-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j | X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i) \\ &\quad \times P(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\ &= P(X_{n+m} = j, X_{n+m-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j | X_m = j)P(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i) \\ &= P_j(T_j = n)P_i(T_j = m). \end{aligned}$$

■

Por lo tanto usando (2.20) y (2.17)

$$\begin{aligned} P_i(N(j) \geq 2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(T_j = m)P_j(T_j = n) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_i(T_j = m) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_j(T_j = n) \right) \\ &= \rho_{ij}\rho_{jj}. \end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que

$$P_i(N(j) \geq m) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (2.21)$$

Como

$$P_i(N(j) = m) = P_i(N(j) \geq m) - P_i(N(j) \geq m + 1)$$

obtenemos que

$$P_i(N(j) = m) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{m-1}(1 - \rho_{jj}), \quad m \geq 1, \quad (2.22)$$

y además

$$P_i(N(j) = 0) = 1 - P_i(N(j) \geq 1) = 1 - \rho_{ij}. \quad (2.23)$$

Recordemos que la notación $E_i[X]$ indica la esperanza de la variable aleatoria X dado que la cadena de Markov comienza en i . Entonces

$$E_i[\mathbf{1}_j(X(n))] = P_i(X_n = j) = P_{ij}^{(n)}. \quad (2.24)$$

Obtenemos a partir de (2.18) y (2.24) que

$$E_i[N(j)] = E_i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_j(X_n)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E_i[\mathbf{1}_j(X_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}.$$

En la expresión anterior podemos intercambiar la esperanza y la serie usando el Teorema de Tonelli ya que los sumandos son todos no-negativos. Llamemos

$$G(i, j) = E_i[N(j)] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}, \quad (2.25)$$

$G(i, j)$ denota el valor esperado del número de visitas a j de una cadena de Markov que comienza en i .

Teorema 2.3 a) Sea j un estado transitorio, entonces $P_i(N(j) < \infty) = 1$ y

$$G(i, j) = \frac{\rho_{ij}}{1 - \rho_{jj}}, \quad i \in \mathcal{E}, \quad (2.26)$$

que es finita para todo $i \in \mathcal{E}$.

b) Sea j un estado recurrente, entonces $P_j(N(j) = \infty) = 1$ y $G(j, j) = \infty$. Además

$$P_i(N(j) = \infty) = P_i(T_j < \infty) = \rho_{ij}, \quad i \in \mathcal{E}. \quad (2.27)$$

Si $\rho_{ij} = 0$ entonces $G(i, j) = 0$ mientras que si $\rho_{ij} > 0$, $G(i, j) = \infty$.

Demostración. a) Sea j un estado transitorio, como $0 \leq \rho_{jj} < 1$, sigue de (2.21) que

$$P_i(N(j) = \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_i(N(j) \geq m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{ij}\rho_{jj}^{m-1} = 0.$$

Usando ahora (2.22)

$$G(i, j) = E_i[N(j)] = \sum_{m=1}^{\infty} mP_i(N(j) = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m\rho_{ij}\rho_{jj}^{m-1}(1 - \rho_{jj}).$$

Por otro lado, podemos sumar la siguiente serie de potencias

$$\sum_{m=1}^{\infty} mt^{m-1} = \frac{1}{(1-t)^2}, \quad \text{para } |t| < 1,$$

y usando este resultado obtenemos que

$$G(i, j) = \frac{\rho_{ij}(1 - \rho_{jj})}{(1 - \rho_{jj})^2} = \frac{\rho_{ij}}{1 - \rho_{jj}} < \infty.$$

b) Supongamos que j es recurrente, entonces $\rho_{jj} = 1$ y de (2.21) sigue que

$$P_i(N(j) = \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_i(N(j) \geq m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{ij} = \rho_{ij}$$

y en particular, $P_j(N(j) = \infty) = 1$. Si una v.a. no negativa tiene probabilidad positiva de ser infinita, su valor esperado es infinito. Por lo tanto

$$G(j, j) = E_j[N(j)] = \infty$$

Si $\rho_{ij} = 0$ entonces $P_i(T_j = m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y por (2.14) obtenemos que $P_{ij}^n = 0$, $n \geq 1$. Por lo tanto $G(i, j) = 0$ en este caso. Si $\rho_{ij} > 0$ entonces $P_i(N(j) = \infty) = \rho_{ij} > 0$ y en consecuencia

$$G(i, j) = E_i[N(j)] = \infty.$$

■

Observación 2.1

1. Sea j un estado transitorio, como $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n = G(i, j) < \infty$, $i \in \mathcal{E}$, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0, \quad i \in \mathcal{E}. \quad (2.28)$$

2. Una cadena de Markov con espacio de estados finito debe tener al menos un estado recurrente: Si \mathcal{E} es finito y todos los estados son transitorios, por (2.28),

$$0 = \sum_{j \in \mathcal{E}} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{E}} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_i(X_n \in \mathcal{E}) = 1,$$

lo cual es una contradicción.

2.5. Descomposición del Espacio de Estados

Decimos que desde el estado i se llega o se accede al estado j si $P_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$. Es fácil ver que esto es cierto para $i \neq j$ sí y sólo sí $\rho_{ij} > 0$. Por lo tanto desde i se accede a j si hay una probabilidad positiva de que en un número finito de pasos, se pueda llegar al estado j partiendo del estado i . Notación: $i \rightarrow j$.

Si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$ decimos que los estados se comunican y escribimos $i \leftrightarrow j$. Si dos estados no se comunican, o bien $P_{ij}^{(n)} = 0$, $n \geq 0$, o bien $P_{ji}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$, o ambos. Esta es una relación de equivalencia:

a) $i \leftrightarrow i : P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

b) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$

c) Si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$ entonces $i \leftrightarrow k$.

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists n \text{ t. q. } P_{ij}^{(n)} > 0, \quad j \leftrightarrow i \Rightarrow \exists m \text{ t. q. } P_{ji}^{(m)} > 0,$$

y usando ahora las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_r P_{ir}^{(n)} P_{rk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$

Un argumento similar muestra que existe s tal que $P_{ki}^{(s)} > 0$.

Esta relación de equivalencia divide el espacio de estados \mathcal{E} en clases de equivalencia que también llamaremos *clases de comunicación*. Los estados de una clase de equivalencia son aquellos que se comunican entre sí.

Puede ocurrir que partiendo de una clase de equivalencia, la cadena entre en otra. Si esto ocurre, claramente la cadena no puede regresar a la clase inicial, pues si lo hiciera las dos clases se comunicarían y formarían una sola clase.

Definición 2.5 Decimos que la cadena es *irreducible* si hay una sola clase de equivalencia, es decir, si todos los estados se comunican entre sí.

Teorema 2.4 (a) Si $i \rightarrow j$ pero $j \not\rightarrow i$ entonces i es transitorio.

(b) Si i es recurrente e $i \rightarrow j$ entonces j es recurrente y $\rho_{ij} = \rho_{ji} = 1$.

Demostración. Supongamos que $i \rightarrow j$ y sea

$$\kappa = \min\{k : P_{ij}^{(k)} > 0\} \quad (2.29)$$

el menor número de pasos necesarios para ir de i a j . Como $P_{ij}^{(\kappa)} > 0$ existe una sucesión de estados $j_1, j_2, \dots, j_{\kappa-1}$ tal que

$$P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{\kappa-1} j} > 0$$

Como κ es el mínimo, todos los $j_r \neq i$, $1 \leq r < \kappa$, pues en caso contrario habría una sucesión más corta, y tenemos

$$P_i(T_i = \infty) \geq P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{\kappa-1} j} (1 - \rho_{ji}).$$

Si $j \not\rightarrow i$ tenemos $\rho_{ji} = 0$ y por lo tanto $P_i(T_i = \infty) > 0$, es decir $\rho_{ii} = P_i(T_i < \infty) < 1$, lo que implica que i es transitorio. Esto demuestra (a).

Supongamos ahora que i es recurrente, entonces el lado izquierdo es 0, de modo que si $\rho_{ji} < 1$ tendríamos una contradicción. Por lo tanto $\rho_{ji} = 1$ y $j \rightarrow i$. Para completar la demostración de (b) falta ver que j es recurrente y que $\rho_{ij} = 1$.

Como $\rho_{ji} = 1$ existe un entero positivo N tal que $P_{ji}^{(N)} > 0$ y tenemos

$$\begin{aligned} P_{jj}^{(N+n+\kappa)} &= P_j(X_{N+n+\kappa} = j) \\ &\geq P_j(X_N = i, X_{N+n} = i, X_{N+n+\kappa} = j) \\ &= P_{ji}^{(N)} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(\kappa)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} G(j, j) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{jj}^{(m)} \geq \sum_{m=N+n+\kappa}^{\infty} P_{jj}^{(m)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(N+n+\kappa)} \geq P_{ji}^{(N)} P_{ij}^{(\kappa)} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \\ &= P_{ji}^{(N)} P_{ij}^{(\kappa)} G(i, i) = \infty \end{aligned}$$

y vemos que j también es recurrente.

Ahora, como j es recurrente y $j \rightarrow i$, por lo que hemos demostrado vemos que $\rho_{ij} = 1$. ■

Corolario 2.1 Sea C una clase de comunicación. Entonces todos los elementos de C son recurrentes o todos son transitorios.

Ejemplo 2.12

Consideremos una cadena con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Veamos que todos los estados son recurrentes. En primer lugar observemos que no importa en cual estado estemos, siempre hay una probabilidad positiva de ir al estado 1 en el paso siguiente. Esta probabilidad es de, al menos, 0.1 y en consecuencia la probabilidad de no visitar el estado 1 en el paso siguiente es, a lo sumo, 0.9. En consecuencia, la probabilidad de no visitar el estado 1 en los próximos n pasos es, a lo sumo, $(0.9)^n$ y obtenemos

$$P_1(T_1 > n) = P(T_1 > n | X_0 = 1) \leq (0.9)^n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P_1(T_1 < \infty) &= P_1(\cup_{n=1}^{\infty} \{T_1 = n\}) = 1 - P_1((\cup_{n=1}^{\infty} \{T_1 = n\})^c) \\ &= 1 - P_1(\cap_{n=1}^{\infty} \{T_1 = n\}^c) \\ &= 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} P_1(\cap_{n=1}^k \{T_1 = n\}^c) \\ &= 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} P_1(T_1 > k) = 1. \end{aligned}$$

Un argumento similar funciona para el estado 2, sólo que ahora la probabilidad de hacer una transición desde cualquier estado al 2 es, al menos, 0.4.

Este argumento no funciona para el estado 3 ya que $P_{13} = 0$. Sin embargo, si efectuamos el producto de P por si misma, P^2 , obtenemos las probabilidades de transición a dos pasos:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.49 & 0.28 \\ 0.18 & 0.54 & 0.28 \\ 0.18 & 0.49 & 0.33 \end{pmatrix}$$

y vemos que para cualquier j , la probabilidad de pasar de j a 3 en dos pasos es mayor o igual a 0.28:

$$P_j(T_3 = 2) = P(X_{n+2} = 3 | X_n = j) \geq 0.28.$$

Si consideramos la cadena en los instantes pares $2, 4, \dots, 2k, \dots$ obtenemos que la probabilidad de no visitar el estado 3 antes del instante $2k$ es

$$P_3(T_3 > 2k) \leq (0.72)^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

de modo que el estado 3 también es recurrente. ▲

Ejemplo 2.13

Consideremos una cadena de Markov con $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y la siguiente matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transiciones posibles entre estados diferentes se presentan en la figura 2.1. Una gráfica de este tipo se conoce como la gráfica de transiciones de la cadena.

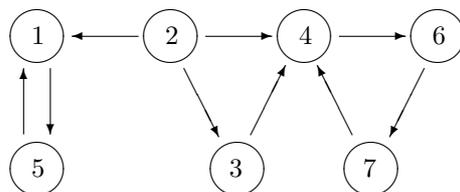


Figura 2.1

Observamos que $2 \rightarrow 4$ pero $4 \not\rightarrow 2$ y algo similar ocurre con 3, de modo que 2 y 3 son estados transitorios. El resto de los estados se separan en dos clases de equivalencia, $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$. Veremos luego que ambas son recurrentes. ▲

Definición 2.6 Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{E}$ es *cerrado* si desde ningún estado de C se tiene acceso a ningún estado fuera de C , es decir,

$$\rho_{ij} = 0 \quad \text{si } i \in C, j \notin C.$$

Equivalentemente, C es cerrado sí y sólo sí

$$P_{ij}^n = 0, \quad i \in C, j \notin C \text{ y } n \geq 1.$$

Si C es cerrado y la cadena comienza en C entonces, con probabilidad 1 se queda en C todo el tiempo. Si a es un estado absorbente entonces $\{a\}$ es cerrado.

Definición 2.7 Un conjunto cerrado es *irreducible* si todos sus estados se comunican.

Ejemplo 2.14

En el ejemplo 2.13 los conjuntos $\{1, 5\}$, $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ son cerrados, pero sólo el primero es irreducible.

De los resultados anteriores vemos que si C es cerrado e irreducible entonces todos los estados de C son recurrentes o todos son transitorios. El siguiente resultado es consecuencia del teorema 2.4.

Corolario 2.2 Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces $\rho_{ij} = 1$, $P_i(N(j) = \infty) = 1$ y $G(i, j) = \infty$ para cualesquiera $i, j \in C$.

Una cadena de Markov irreducible es una cadena en la cual cada estado se comunica consigo mismo y con cualquier otro estado. Una cadena de este tipo es necesariamente transitoria o recurrente.

Vimos anteriormente que si \mathcal{E} es finito, tiene al menos un estado recurrente. El mismo argumento muestra que cualquier conjunto cerrado finito C tiene al menos un estado recurrente. Por lo tanto, todos los estados de C lo son:

Teorema 2.5 Sea C un conjunto finito, irreducible y cerrado. Entonces todos los estados de C son recurrentes.

Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados finito. Por el teorema 2.5 si la cadena es irreducible entonces debe ser recurrente. Si la cadena no es irreducible, podemos usar el teorema 2.4 para determinar cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios.

Ejemplo 2.15

Determine cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios para la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica presenta las transiciones posibles (en un paso) entre estados diferentes para esta cadena

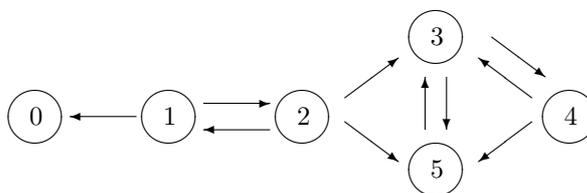


Figura 2.2

Vemos que hay tres clases de equivalencia $\{0\}$; $\{1, 2\}$ y $\{3, 4, 5\}$. La primera clase es recurrente porque 0 es un estado absorbente. La clase $\{1, 2\}$ es transitoria porque es posible salir de ella y no regresar nunca, por ejemplo, pasando de 1 a 0. Finalmente, la tercera clase es recurrente. ▲

Llamemos \mathcal{E}_T a la colección de los estados transitorios de \mathcal{E} y \mathcal{E}_R a la colección de estados recurrentes. En el ejemplo anterior $\mathcal{E}_T = \{1, 2\}$ y $\mathcal{E}_R = \{0, 3, 4, 5\}$. Esta última clase puede descomponerse en dos conjuntos cerrados irreducibles, $C_1 = \{0\}$ y $C_2 = \{3, 4, 5\}$.

Teorema 2.6 *Supongamos que el conjunto \mathcal{E}_R de estados recurrentes no es vacío. Entonces es la unión de una colección finita o numerable de conjuntos cerrados, disjuntos e irreducibles C_1, C_2, \dots .*

Demostración. Escogemos $i \in \mathcal{E}_R$ y sea C el conjunto de todos los estados $j \in \mathcal{E}_R$ tales que $i \rightarrow j$. Como i es recurrente, $\rho_{ii} = 1$ y por lo tanto $i \in C$. Veamos ahora que C es un conjunto cerrado e irreducible.

Supongamos que $j \in C$ y $j \rightarrow k$. Como j es recurrente, por el teorema 2.4 sabemos que k también es recurrente. Por transitividad $i \rightarrow k$ y por lo tanto $k \in C$. Esto muestra que C es cerrado.

Supongamos ahora que j y k están en C . Como i es recurrente y $i \rightarrow j$, por el teorema 2.4 vemos que $j \rightarrow i$. Como $j \rightarrow i \rightarrow k$ vemos que $j \rightarrow k$, de modo que C es irreducible.

Para completar la demostración necesitamos ver que si C y D son dos conjuntos cerrados irreducibles de \mathcal{E}_R , o bien son disjuntos o bien son idénticos. Supongamos que no son disjuntos y sea $i \in C \cap D$. Escojamos $j \in C$ entonces $i \rightarrow j$ porque $i \in C$ y C es irreducible. Como D es cerrado, $i \in D$, $i \rightarrow j$ entonces $j \in D$. Por lo tanto, todo estado de C también está en D . El recíproco también es cierto, de modo que C y D son idénticos. ■

2.6. Estudio de las Transiciones Iniciales

Comenzamos esta sección con un ejemplo para presentar las ideas básicas de esta técnica.

Ejemplo 2.16

Consideremos la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Si la cadena comienza en 1, permanece en este estado por un tiempo aleatorio y luego pasa al estado 0 o al estado 2, donde se queda para siempre. Nos hacemos las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de los dos estados, 0 ó 2, se queda la cadena?
2. ¿Cuánto tiempo toma, en promedio, alcanzar uno de estos estados?

Sea $A = \{0, 2\}$ el conjunto de los estados absorbentes y llamemos H_A el tiempo que transcurre hasta que la cadena es absorbida por 0 o por 2:

$$H_A = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ó } X_n = 2\}.$$

La diferencia entre H_A y T_A , que definimos anteriormente está en que H incluye al estado inicial.

Para responder las preguntas anteriores debemos hallar

$$\begin{aligned} u &= P(X_{H_A} = 0 | X_0 = 1), \\ \nu &= E[H_A | X_0 = 1]. \end{aligned}$$

Para hacer el análisis de la primera transición consideramos por separado lo que puede ocurrir en el primer paso:

$$X_1 = 0, \quad X_1 = 1 \quad \text{ó} \quad X_1 = 2,$$

con probabilidades respectivas α, β y γ . Consideremos u ,

- Si $X_1 = 0$ entonces $H_A = 1$ y $X_{H_A} = 0$. Esto ocurre con probabilidad α .
- Si $X_1 = 2$ entonces $H_A = 1$ y $X_{H_A} = 2$. Esto ocurre con probabilidad γ .
- Si $X_1 = 1$, el problema se repite y esto ocurre con probabilidad β .

Tenemos, por lo tanto,

$$P(X_{H_A} = 0 | X_1 = 0) = 1; \quad P(X_{H_A} = 0 | X_1 = 2) = 0; \quad P(X_{H_A} = 0 | X_1 = 1) = u,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} u &= P(X_{H_A} = 0 | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 P(X_{H_A} = 0 | X_0 = 1, X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^2 P(X_{H_A} = 0 | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = 1) \\ &= 1 \cdot \alpha + u\beta + 0 \cdot \gamma = \alpha + u\beta \end{aligned}$$

y obtenemos

$$u = \frac{\alpha}{1 - \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

que es la probabilidad condicional de ir a 0 dado que el proceso comienza en 1 y termina en A .

Regresemos a la determinación del tiempo medio hasta absorción $H_A \geq 1$. Si $X_1 = 0$ ó $X_1 = 2$, no hacen falta más pasos. Si, en cambio, $X_1 = 1$, el proceso se encuentra en la misma situación del comienzo y necesita en promedio, $\nu = E[H_A | X_0 = 1]$ pasos adicionales para ser absorbido. Tenemos entonces

$$\nu = 1 + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot \nu + \gamma \cdot 0 = 1 + \beta\nu$$

de donde

$$\nu = \frac{1}{1 - \beta}.$$

En el ejemplo que estamos estudiando es posible hacer un cálculo directo. Observemos que

$$P(H_A > k | X_0 = 1) = \beta^k \quad \text{para } k = 0, 1, \dots$$

y por lo tanto

$$E[H_A | X_0 = 1] = \sum_{k=0}^{\infty} P(H_A > k | X_0 = 1) = \frac{1}{1 - \beta}.$$

▲

Observación 2.2 Para calcular el valor esperado hemos usado la relación

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

que puede demostrarse como sigue,

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k \geq 0} k p_k \\ &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\ &\quad + p_2 + p_3 + p_4 + \dots \\ &\quad \quad + p_3 + p_4 + \dots \\ &\quad \quad \quad + p_4 + \dots \\ &\quad \quad \quad \quad \vdots \\ &= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.17

Consideremos ahora una cadena con 4 estados y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que 0 y 3 son absorbentes mientras que 1 y 2 son transitorios. La probabilidad de que la cadena sea absorbida en el estado 0, por ejemplo, depende ahora del estado transitorio en el cual comenzó la cadena.

Modificamos las definiciones del ejemplo anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H_A &= \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ó } X_n = 3\} \\ u_i &= P(X_{H_A} = 0 | X_0 = i) \quad i = 1, 2, \\ \nu_i &= E[H_A | X_0 = i], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Podemos extender las definiciones de u_i y ν_i poniendo $u_0 = 1$, $u_3 = 0$, $\nu_0 = \nu_3 = 0$.

Para el análisis de la primera transición tenemos que considerar los dos posibles estados iniciales $X_0 = 1$ y $X_0 = 2$ separadamente. Si $X_0 = 1$, en el primer paso podemos tener

$$\begin{aligned} u_1 &= P(X_{H_A} = 0 | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^3 P(X_{H_A} = 0 | X_0 = 1, X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^3 P(X_{H_A} = 0 | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = 1) \\ &= P_{10} + u_1 P_{11} + u_2 P_{12}. \end{aligned}$$

De manera similar

$$u_2 = P_{20} + u_1 P_{21} + u_2 P_{22}$$

y hay que resolver este sistema de ecuaciones. Veamos un ejemplo concreto, supongamos que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones son

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0.4 + 0.3u_1 + 0.2u_2 \\ u_2 &= 0.1 + 0.3u_1 + 0.3u_2 \end{aligned} \right\}$$

con soluciones

$$u_1 = \frac{30}{43}, \quad u_2 = \frac{19}{43}.$$

Así, si comenzamos en 2 hay probabilidad $19/43$ de ser absorbido por 0 y $1-19/43=24/43$ de ser absorbido por 3.

El tiempo promedio hasta la absorción también depende del estado de inicio. Las ecuaciones son

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 1 + P_{11}\nu_1 + P_{12}\nu_2 \\ \nu_2 &= 1 + P_{21}\nu_1 + P_{22}\nu_2 \end{aligned} \right\}$$

En el ejemplo concreto que estudiamos tenemos

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= 1 + 0.3\nu_1 + 0.2\nu_2 \\ \nu_2 &= 1 + 0.3\nu_1 + 0.3\nu_2 \end{aligned} \right\}$$

con soluciones $\nu_1 = 90/43$ y $\nu_2 = 100/43$. ▲

En general sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes y sea

$$\rho_C(i) = P_i(H_C < \infty)$$

la probabilidad de que una cadena de Markov que comienza en i llegue en algún momento a C . Decimos que $\rho_C(i)$ es la probabilidad de que una cadena que comienza en i sea absorbida por el conjunto C .

Es claro que $\rho_C(i) = 1$ si $i \in C$ y $\rho_C(i) = 0$ si i es recurrente y no está en C . Queremos calcular esta probabilidad cuando i es un estado transitorio.

Si sólo hay un número finito de estados transitorios, y en particular si \mathcal{E} es finito, siempre es posible calcular $\rho_C(i)$, $i \in \mathcal{E}_T$, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como incógnitas. Observemos que si $i \in \mathcal{E}_T$, la cadena que comienza en i puede entrar a C sólo si entra en el instante 1 o si permanece en \mathcal{E}_T en 1 y entra a C en algún instante futuro:

$$\rho_C(i) = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{k \in \mathcal{E}_T} P_{ik} \rho_C(k), \quad i \in \mathcal{E}_T.$$

Teorema 2.7 *Supongamos que el conjunto de estados transitorios \mathcal{E}_T es finito y sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces el sistema de ecuaciones*

$$f(i) = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{E}_T} P_{ij} f(j), \quad i \in \mathcal{E}_T, \quad (2.30)$$

tiene una única solución $f(i) = \rho_C(i)$, $i \in \mathcal{E}_T$.

Demostración

Si (2.30) vale entonces

$$f(j) = \sum_{k \in C} P_{jk} + \sum_{k \in \mathcal{E}_T} P_{jk} f(k), \quad j \in \mathcal{E}_T. \quad (2.31)$$

Sustituyendo (2.31) en (2.30) obtenemos

$$f(i) = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{E}_T} \sum_{k \in C} P_{ij} P_{jk} + \sum_{j \in \mathcal{E}_T} \sum_{k \in \mathcal{E}_T} P_{ij} P_{jk} f(k).$$

La suma de los dos primeros términos es $P_i(H_C \leq 2)$ y el tercero es

$$\sum_{k \in \mathcal{E}_T} P_{ik}^{(2)} f(k) = \sum_{j \in \mathcal{E}_T} P_{ij}^{(2)} f(j),$$

de modo que

$$f(i) = P_i(H_C \leq 2) + \sum_{j \in \mathcal{E}_T} P_{ij}^{(2)} f(j).$$

Repitiendo este argumento concluimos que para todo n ,

$$f(i) = P_i(H_C \leq n) + \sum_{j \in \mathcal{E}_T} P_{ij}^{(n)} f(j), \quad i \in \mathcal{E}_T. \quad (2.32)$$

Como los estados $j \in \mathcal{E}_T$ son transitorios,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \quad j \in \mathcal{E}_T. \quad (2.33)$$

Por hipótesis, \mathcal{E}_T es finito y por lo tanto de (2.33) se sigue que la suma de (2.32) tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, para $i \in \mathcal{E}_T$

$$f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_i(H_C \leq n) = P_i(H_C < \infty) = \rho_C(i).$$

■

2.7. Paseo al Azar

Consideramos de nuevo la situación del ejemplo 2.4. Tenemos una sucesión ξ_i , $i \geq 1$ de v.a.i.i.d. que toman valor 1 con probabilidad p y valor -1 con probabilidad $q = 1 - p$ y ponemos $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$. S_n es un paseo al azar simple. Vamos a estudiar en esta sección algunas propiedades importantes de este proceso.

Lema 2.1 *Un paseo al azar simple tiene las siguientes propiedades*

- *Propiedad de Markov*

$$P(S_{n+m} = j | S_0, S_1, \dots, S_n) = P(S_{n+m} = j | S_n).$$

- *Homogeneidad espacial*

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_n = j + b | S_0 = a + b).$$

- *Homogeneidad Temporal*

$$P(S_n = j | S_0 = a) = P(S_{n+m} = j | S_m = a).$$

Demostración. La propiedad de Markov ya fue demostrada.

- Homogeneidad espacial.

Se tiene que el lado izquierdo es igual a $P(\sum_{i=1}^n \xi_i = j - a)$ mientras que el lado derecho es igual a $P(\sum_{i=1}^n \xi_i = j + b - (a + b))$.

- Homogeneidad temporal.

Es una consecuencia fácil de la independencia y del hecho que las v. a. ξ_i son idénticamente distribuidas que el lado derecho es igual a:

$$\frac{P\left(S_0 + \sum_{i=1}^{n+m} \xi_i = j, S_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i = a\right)}{P\left(S_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i = a\right)} = P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} \xi_i = j - a\right) = P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = j - a\right);$$

un cálculo elemental prueba que el lado izquierdo es idéntico a esta cantidad. ■

Proposición 2.6 *Se tiene que para a, b enteros, $n \geq 0$ y $b - a \leq n$*

$$P(S_n = b | S_0 = a) = \begin{cases} \binom{n}{(n+b-a)/2} p^{(n+b-a)/2} q^{(n-b+a)/2} & \text{si } (n+b-a)/2 \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Se tiene que una trayectoria que lleva del punto $(0, a)$ al punto (n, b) tiene r pasos para arriba $(+1)$ y l pasos hacia abajo (-1) . Estos son tales que $r + l = n$ y $r - l = b - a$ (pues $S_n = r(+1) + l(-1) = b - a$). Estas ecuaciones determinan a l y r , lo que implica que $r = (n + b - a)/2$ y $l = (n - b + a)/2$. Cada trayectoria que lleva de a a b en n pasos tiene probabilidad $p^r q^l$, y hay $\binom{n}{(n+b-a)/2}$ trayectorias posibles. El resultado sigue. ■

Ahora vamos a considerar el problema de la ruina de un jugador que apuesta 1 peso en cada juego y tiene probabilidad p de ganar y $q = 1 - p$ de perder. Definamos

$$H_j = \min\{n \geq 0 : X_n = j\}, \quad h(i) = P_i(H_N < H_0).$$

La diferencia entre H_j y T_j que definimos anteriormente está en que H incluye el estado inicial; $h(i)$ es la probabilidad de que el jugador con capital inicial i alcance una fortuna N antes de arruinarse.

Proposición 2.7 *Sea $h(i)$ la probabilidad de que un paseo al azar que parte del estado i llegue al nivel N antes que al nivel 0. Entonces*

$$h(i) = \begin{cases} \frac{\theta^i - 1}{\theta^N - 1} & \text{si } p \neq q \\ \frac{i}{N} & \text{si } p = q = 0.5, \end{cases}$$

donde $\theta = q/p$.

Demostración. Por la definición de H_i tenemos $h(0) = 0$ y $h(N) = 1$. Para calcular $h(i)$ para $1 < i < N$ estudiamos la primera transición y obtenemos

$$h(i) = ph(i+1) + (1-p)h(i-1),$$

y rearreglando

$$p(h(i+1) - h(i)) = (1-p)(h(i) - h(i-1));$$

concluimos que

$$h(i+1) - h(i) = \frac{1-p}{p}(h(i) - h(i-1)). \quad (2.34)$$

Si $p = 1/2$ obtenemos

$$h(i+1) - h(i) = h(i) - h(i-1) = C \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

Entonces

$$1 = h(N) - h(0) = \sum_{i=1}^N (h(i) - h(i-1)) = NC$$

de modo que $C = 1/N$. Usando esto y el hecho de que $h(0) = 0$, tenemos

$$h(i) = h(i) - h(0) = \sum_{j=1}^i (h(j) - h(j-1)) = \frac{i}{N},$$

es decir, si $p = 1/2$,

$$P(H_N < H_0) = \frac{i}{N} \quad \text{para } 0 \leq i \leq N.$$

Como consecuencia la probabilidad de ruina es

$$P(H_0 < H_N) = 1 - \frac{i}{N} = \frac{N-i}{N}.$$

Si $p \neq 1/2$ los detalles son un poco más difíciles. Poniendo $C = h(i) - h(0)$, (2.34) implica que para $i \geq 1$,

$$h(i) - h(i-1) = C \left(\frac{1-p}{p} \right)^{i-1} = C\theta^{i-1},$$

con $\theta = q/p$. Sumando de $i = 1$ a N obtenemos

$$1 = h(N) - h(0) = \sum_{i=1}^N h(i) - h(i-1) = C \sum_{i=1}^N \theta^{i-1}$$

Recordemos que si $\theta \neq 1$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \theta^j = \frac{1 - \theta^N}{1 - \theta},$$

y vemos que

$$C = \frac{1 - \theta}{1 - \theta^N}.$$

Usando de nuevo que $h(0) = 0$ y sumando

$$h(j) = h(j) - h(0) = C \sum_{i=1}^j \theta^{i-1} = C \frac{1 - \theta^j}{1 - \theta} = \frac{1 - \theta^j}{1 - \theta^N}$$

Recordando la definición de $h(i)$ obtenemos que cuando $p \neq 1/2$,

$$P_i(H_N < H_0) = \frac{\theta^i - 1}{\theta^N - 1}, \quad P_i(H_0 < H_N) = \frac{\theta^N - \theta^i}{\theta^N - 1}$$

con $\theta = \frac{1-p}{p}$. ■

Ejemplo 2.18

En la siguiente tabla presentamos algunos valores de la probabilidad de ruina en diferentes circunstancias. p es la probabilidad de éxito en cada juego, i es el capital inicial, N el objetivo y P_R la probabilidad de ruina. Las probabilidades 0.4865 y 0.4737 representan la probabilidad de ganar en ruleta cuando se apuesta al color o a par-impar. En el primer caso la ruleta sólo tiene un 0 (ruleta europea) mientras que en el segundo tiene 0 y 00 (ruleta americana). La probabilidad 0.493 corresponde al juego de dados (craps).

$p = 0.474$			$p = 0.486$			$p = 0.493$		
i	N	P_R	i	N	P_R	i	N	P_R
1	10	0.94	1	10	0.92	1	10	0.91
10	100	0.99995	10	100	0.997	10	100	0.98
100	1000	1	100	1000	1	100	1000	1
5	10	0.63	5	10	0.569	5	10	0.535
50	100	0.995	50	100	0.942	50	100	0.8
500	1000	1	500	1000	1	500	1000	0.9999992
9	10	0.153	9	10	0.127	9	10	0.113
90	100	0.647	90	100	0.43	90	100	0.26
900	1000	0.99997	900	1000	0.996	900	1000	0.939



Corolario 2.3 *Se tiene que para todo $j \in \mathbb{N}$*

$$P(H_0 < \infty | S_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^j & \text{si } q < p. \end{cases}$$

Demostración. Para $n \geq 1$ sea A_n el evento $A_n = \{H_0 < H_n\}$. Observemos que si $n > j$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ puesto que $H_n \leq H_{n+1}$, para todo n . Es decir que la sucesión A_n es una sucesión creciente de eventos y además

$$\{H_0 < \infty\} = \cup_{n \geq 1} \{H_0 < H_n\},$$

y por la continuidad por debajo de la probabilidad se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n | S_0 = j) = P(H_0 < \infty | S_0 = j).$$



Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $N_n(a, b)$ al número de trayectorias que van de a a b en n pasos y a $N_n^0(a, b)$ a aquellas que van de a a b en n pasos pasando por 0 por lo menos una vez. Un resultado fundamental sobre el paseo al azar simple es el principio de reflexión.

Teorema 2.8 (Principio de Reflexión) *Para $a, b > 0$ se tiene que*

$$N_n^0(a, b) = N_n(-a, b).$$

Demostración. En la figura 2.3 vemos que cada trayectoria que lleva de $(0, -a)$ a (n, b) cruza el eje x por lo menos una vez; denotemos por $(k, 0)$ el punto en el cual ocurre por la primera vez. Reflejando el segmento de la trayectoria anterior a $(k, 0)$ respecto al eje x se obtiene una trayectoria lleva de $(0, a)$ a (b, n) y que intercepta al eje x al menos una vez.

Podemos hacer algo similar en sentido contrario para las trayectorias que inician en $(0, a)$ y pasan por 0. ■

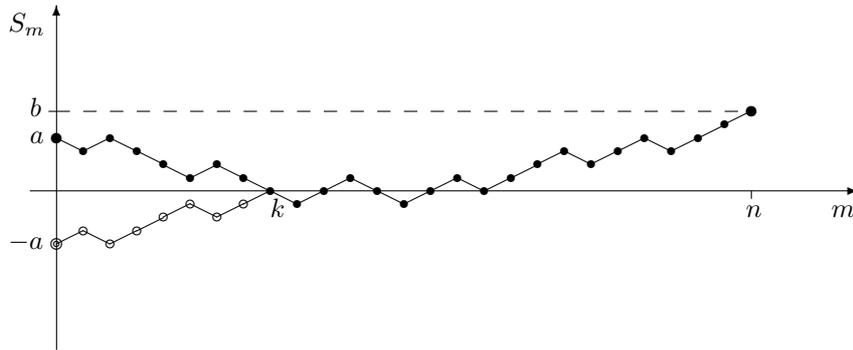


Figura 2.3

Lema 2.2 Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$N_n(a, b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}.$$

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la prueba de la proposición 2.6. ■

Como consecuencia importante del lema anterior y el principio de reflexión tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.9 (Teorema del Escrutinio (Ballot Theorem)) Si $b > 0$, entonces el número de trayectorias que llevan de $(0, 0)$ a (n, b) y que no visitan el eje x después del primer paso es igual a

$$\frac{b}{n} N_n(0, b).$$

Demostración Observemos que el primer paso de dichas trayectorias lleva a $(1, 1)$, por lo tanto el número que buscamos calcular está dado por

$$\begin{aligned} N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}^0(1, b) &= N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}(-1, b) \\ &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b}{2}\right)! \left(\frac{n+b-2}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b-2}{2}\right)! \left(\frac{n+b}{2}\right)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b}{2}\right)! \left(\frac{n+b}{2}\right)!} \left(\frac{n+b}{2} - \frac{n-b}{2} \right) \\ &= \frac{b}{n} N_n(0, b). \end{aligned}$$

¿Por qué se llama este resultado el teorema del escrutinio? Supongamos que tenemos dos candidatos A y B , y que A gana α votos, B gana β votos, y $\alpha > \beta$. ¿Cuál es la probabilidad de que A lleve la ventaja durante todo el escrutinio? Supongamos que $X_i = 1$ si el i -ésimo individuo vota por A y vale -1 si vota por B . Supongamos que cualquier combinación de votos es igualmente probable, es decir que cada una

tiene probabilidad $1/\binom{\alpha+\beta}{\alpha}$. La trayectoria que deben seguir los escrutinios para que A tenga la mayoría durante toda la jornada de votaciones va del punto $(0, 0)$ al punto $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ y no regresa al origen. Por lo tanto la probabilidad buscada está dada por

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N_{\alpha+\beta}(0, \alpha - \beta) \frac{1}{\binom{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

Veamos ahora una aplicación del teorema de las votaciones a las caminatas aleatorias.

Teorema 2.10 *Supongamos que $S_0 = 0$, entonces para $n \geq 1$*

$$P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n} P(S_n = b),$$

y por lo tanto

$$P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0) = \frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{n}.$$

Demostración. Supongamos que $S_0 = 0$ y que $b > 0$. Queremos calcular la probabilidad de que la caminata aleatoria parta de $(0, 0)$ y no visite el eje x en el intervalo $[1, n]$. Una trayectoria de este tipo tiene r pasos hacia arriba y l hacia abajo, y en consecuencia $r = (n + b)/2$ y $l = (n - b)/2$. Cada una de estas trayectoria tiene probabilidad $p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2}$ y por el teorema del escrutinio hay $\frac{b}{n} N_n(0, b)$ trayectorias de este tipo. La probabilidad que queremos calcular es igual a

$$P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{b}{n} \binom{n}{\frac{n+b}{2}} p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} = \frac{b}{n} P(S_n = b).$$

Un argumento similar vale para $b < 0$. ■

Otro resultado particularmente interesante concierne el valor máximo que alcanza la caminata aleatoria. Sea $M_n = \max\{S_j, 1 \leq j \leq n\}$, para $n \geq 0$ y supongamos que $S_0 = 0$. En particular se tiene que $M_n \geq 0$. Tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.11 *Supongamos que $S_0 = 0$. Entonces para $r \geq 1$,*

$$P(M_n \geq r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{si } b \geq r \\ \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} P(S_n = 2r - b) & \text{si } b < r. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $r \geq 1$ y que $b < r$. Sea $N_n^r(0, b)$ el número de trayectorias que van de $(0, 0)$ a (n, b) pasando por r en n pasos. Cualquiera de estas trayectorias visita el nivel r por lo menos una vez, denotemos por T_r el menor de estos instantes (ver figura 2.4). Reflejando la trayectoria entre T_r y n respecto a la recta r se obtiene una trayectoria que va de $(0, 0)$ a $(n, 2r - b)$. Recíprocamente, a una trayectoria de esta forma le aplicamos la transformación inversa y obtenemos una trayectoria que va de $(0, 0)$ a (n, b) pasando por el nivel r , de longitud n . Por lo tanto podemos afirmar que

$$N_n^r(0, b) = N_n(0, 2r - b).$$

Además cada una de estas trayectorias tiene probabilidad

$$p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2},$$

por lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned} P(M_n \geq r, S_n = b) &= N_n^r(0, b) p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} \\ &= N_n(0, 2r - b) p^{(n+b)/2} q^{(n-b)/2} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} N_n(0, 2r - b) p^{(n+2r-b)/2} q^{(n-2r+b)/2} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} P(S_n = 2r - b). \end{aligned}$$

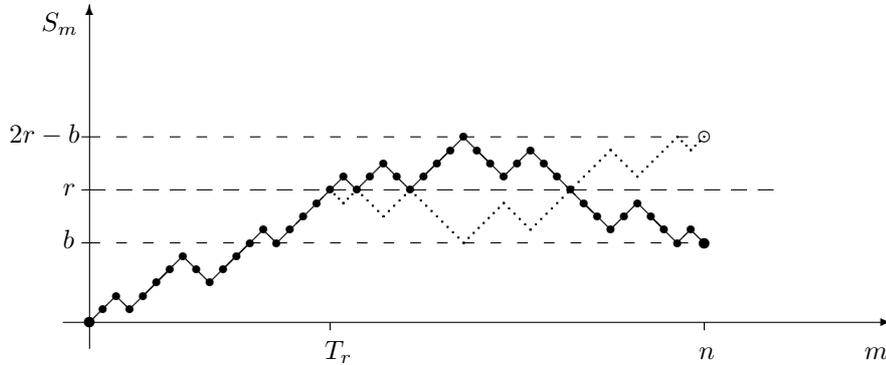


Figura 2.4

Observación 2.3 1. Una consecuencia del teorema anterior es la fórmula

$$\begin{aligned} P(M_n \geq r) &= P(S_n \geq r) + \sum_{b=-\infty}^{r-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b} P(S_n = 2r - b) \\ &= P(S_n = r) + \sum_{l=r+1}^{\infty} P(S_n = l) \left(1 + (q/p)^{l-r}\right) \end{aligned}$$

2. Observemos que en particular si la caminata aleatoria es simétrica

$$P(M_n \geq r, S_n = b) = P(S_n = 2r - b).$$

¿Cuál es la probabilidad de que una caminata aleatoria alcance un máximo en un instante n dado? Más precisamente, ¿cuál es la probabilidad de que una caminata aleatoria que parte de 0 alcance un nivel b por la primera vez al tiempo n ? Denotemos por $f_b(n)$ a esta probabilidad. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.12 *La probabilidad de que una caminata aleatoria simple alcance el nivel b por la primera vez al tiempo n habiendo empezado de 0 está dada por*

$$f_b(n) = \frac{|b|}{n} P(S_n = b), \quad n \geq 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_b(n) &= P(M_{n-1} = S_{n-1} = b - 1, S_n = b) \\ &= P(S_n = b | M_{n-1} = S_{n-1} = b - 1) P(M_{n-1} = S_{n-1} = b - 1) \\ &= p (P(M_{n-1} \geq b - 1, S_{n-1} = b - 1) - P(M_{n-1} \geq b, S_{n-1} = b - 1)) \\ &= p \left(P(S_{n-1} = b - 1) - \frac{q}{p} P(S_{n-1} = b + 1) \right) \\ &= \frac{b}{n} P(S_n = b). \end{aligned}$$

El mismo razonamiento es valido si $b < 0$.

2.8. Procesos de Ramificación

Consideremos una partícula (neutrones, bacterias, virus informático, etc.) que pueden generar nuevas partículas del mismo tipo. El grupo inicial de individuos pertenece a la generación 0 y suponemos que cada individuo produce una cantidad aleatoria ξ de descendientes con distribución de probabilidad

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.35}$$

donde $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$. Suponemos que todos los individuos actúan de manera independiente, que todos viven el mismo período de tiempo y todos siguen la misma ley (2.35) para generar su descendencia. El proceso $(X_n)_{n \geq 1}$ donde X_n representa el tamaño de la n -ésima generación, es una cadena de Markov y se conoce como un *proceso de ramificación*.

El espacio de estados de esta cadena es $\{0, 1, 2, \dots\}$. 0 es un estado absorbente. Por otro lado, si $X_n = k$, los k miembros de esta generación producen

$$\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)} = X_{n+1} \tag{2.36}$$

descendientes, que forman la siguiente generación, de modo que

$$P_{kj} = P(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_k^{(n)} = j | X_n = k). \tag{2.37}$$

Si una partícula produce $\xi = 0$ descendientes, lo interpretamos como que la partícula muere o desaparece. Puede ocurrir que luego de varias generaciones todos los descendientes de la partícula inicial hayan muerto o desaparecido. Decimos entonces que todos los descendientes de la partícula inicial se extinguieron. Un problema interesante es calcular la probabilidad de extinción U_∞ de un proceso de ramificación que comienza con una sola partícula. Una vez que resolvamos este problema, podemos hallar la probabilidad de que una cadena que comienza con k partículas se extinga, pues como las partículas actúan independientemente, esta probabilidad es $(U_\infty)^k$.

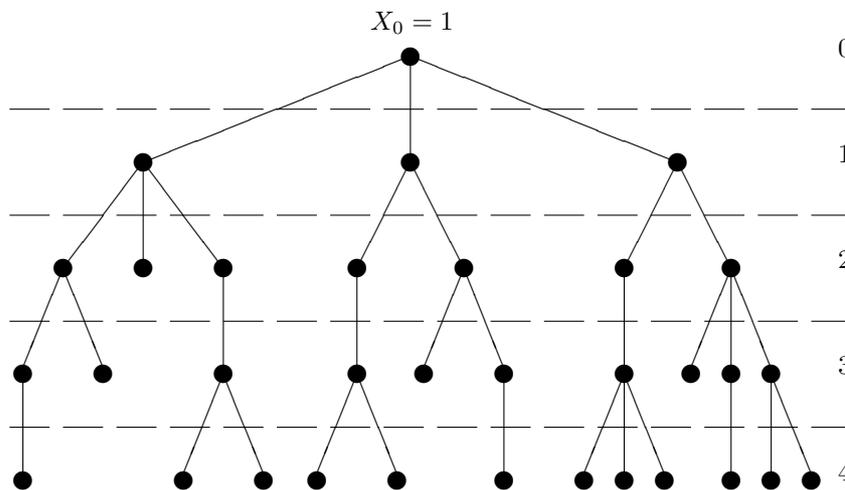


Figura 2.5

Media y Varianza de un Proceso de Ramificación.

La ecuación (2.36) caracteriza la evolución del proceso de ramificación y se puede escribir como una suma aleatoria:

$$X_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n)}$$

Supongamos que $E[\xi] = \mu$, $\text{Var}[\xi] = \sigma^2$ y sean $M(n)$ y $V(n)$ la media y varianza de la n -ésima generación X_n bajo la condición inicial $X_0 = 1$, $M(n) = E_1[X_n]$, $V(n) = \text{Var}_1[X_n]$. Usando las propiedades de sumas aleatorias tenemos

$$M(n+1) = \mu M(n), \quad (2.38)$$

$$V(n+1) = \sigma^2 M(n) + \mu^2 V(n). \quad (2.39)$$

La condición inicial $X_0 = 1$ hace que las relaciones recursivas (2.38) y (2.39) comiencen con $M(0) = 1$ y $V(0) = 0$. A partir de (2.38) obtenemos $M(1) = \mu \cdot 1 = \mu$, $M(2) = \mu M(1) = \mu^2$, y en general

$$M(n) = \mu^n \quad \text{para } n = 0, 1, \dots \quad (2.40)$$

Por lo tanto, el tamaño medio de la población crece geométricamente si $\mu > 1$, decrece geométricamente si $\mu < 1$ y es constante si $\mu = 1$.

Sustituyendo $M(n) = \mu^n$ en (2.39) obtenemos $V(n+1) = \sigma^2 \mu^n + \mu^2 V(n)$, y con $V(0) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} V(1) &= \sigma^2 \\ V(2) &= \sigma^2 \mu + \mu^2 V(1) = \sigma^2 \mu + \sigma^2 \mu^2 \\ V(3) &= \sigma^2 \mu^2 + \mu^2 V(2) = \sigma^2 \mu^2 + \sigma^2 \mu^3 + \sigma^2 \mu^4 \end{aligned}$$

y en general

$$\begin{aligned} V(n) &= \sigma^2 (\mu^{n-1} + \mu^n + \dots + \mu^{2n-2}) \\ &= \sigma^2 \mu^{n-1} (1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}) \\ &= \sigma^2 \mu^{n-1} \times \begin{cases} n & \text{si } \mu = 1, \\ \frac{1-\mu^n}{1-\mu} & \text{si } \mu \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Probabilidades de Extinción.

La población se extingue cuando el tamaño de la población es 0. El instante (aleatorio) de extinción N es el primer índice n para el cual $X_n = 0$ y luego, obviamente, $X_k = 0$ para todo $k \geq N$. 0 es un estado absorbente y podemos calcular la probabilidad de extinción haciendo un análisis de la primera transición. Llamemos

$$U_n = P_1(N \leq n) = P_1(X_n = 0) \quad (2.42)$$

la probabilidad de extinción antes de n o en n . El único miembro inicial de la población produce $\xi_1^{(0)} = k$ descendientes. Por su parte, cada uno de estos descendientes generará una población de descendientes y cada una de estas líneas de descendencias debe desaparecer en $n-1$ generaciones o antes.

Las k poblaciones generadas por el miembro inicial son independientes entre sí y tienen las mismas propiedades estadísticas que la población inicial. Por lo tanto, la probabilidad de que una cualquiera de ellas desaparezca en $n-1$ generaciones es U_{n-1} por definición, y la probabilidad de que las k subpoblaciones mueran en $n-1$ generaciones es $(U_{n-1})^k$ por independencia.

Por la ley de la probabilidad total

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (U_{n-1})^k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

con $U_0 = 0$ y $U_1 = p_0$.

Funciones Generadoras de Probabilidad

Consideremos una v.a. ξ con valores enteros positivos y distribución de probabilidad

$$P(\xi = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

La función generadora de probabilidad (f.g.p.) $\phi(s)$ asociada a la v.a. ξ (o equivalentemente a su distribución (p_k)) se define por

$$\phi(s) = E[s^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (2.44)$$

Tenemos los siguientes resultados fundamentales, algunos de los cuales estudiamos en el capítulo 1. Supondremos que $p_0 + p_1 < 1$, para evitar trivialidades:

1. *La relación entre funciones de probabilidad y funciones generadoras es 1-1.* Es posible obtener las probabilidades (p_k) a partir de ϕ usando la siguiente fórmula

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \phi(s)}{ds^k} \right|_{s=0}. \quad (2.45)$$

2. *Si ξ_1, \dots, ξ_n son v.a.i. con funciones generadoras $\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s)$ respectivamente, la f. g. p. de su suma $X = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ es el producto de las funciones generadoras respectivas*

$$\phi_X(s) = \phi_1(s)\phi_2(s) \cdots \phi_n(s). \quad (2.46)$$

3. *Los momentos de una variable que toma valores en los enteros no-negativos se pueden obtener derivando la función generadora y evaluando en 1:*

$$\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = E[\xi]. \quad (2.47)$$

Para la segunda derivada tenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k \\ &= E[\xi(\xi-1)] = E[\xi^2] - E[\xi] \end{aligned} \quad (2.48)$$

de modo que

$$E[\xi^2] = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + E[\xi] = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1},$$

y en consecuencia

$$\text{Var}[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 = \left. \frac{d^2 \phi(s)}{ds^2} \right|_{s=1} + \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} - \left(\left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} \right)^2.$$

4. *ϕ es estrictamente convexa y creciente en $[0, 1]$.* Esto es una consecuencia inmediata del hecho que ϕ es una serie de potencias.
5. *Si $\text{Var}(\xi) = 0$, entonces $\phi(s) = s$.*

Funciones Generadoras y Probabilidades de Extinción.

Regresamos ahora a la consideración de los procesos de ramificación. La función generadora de probabilidad para el número de descendientes ξ de cada individuo es

$$\phi(s) = E[s^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Podemos ahora escribir la relación (2.43) en términos de la función generadora:

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (U_{n-1})^k = \phi(U_{n-1}) \quad (2.49)$$

es decir, si conocemos la función generadora de probabilidades $\phi(s)$, podemos calcular iterativamente las probabilidades de extinción U_n comenzando con $U_0 = 0$: $U_1 = \phi(U_0) = \phi(0)$, $U_2 = \phi(U_1)$, etc.

Ejemplo 2.19

Un individuo no tiene descendientes con probabilidad $1/4$ o tiene dos descendientes con probabilidad $3/4$. La relación recursiva (2.43) es en este caso

$$U_n = \frac{1 + 3(U_{n-1})^2}{4}.$$

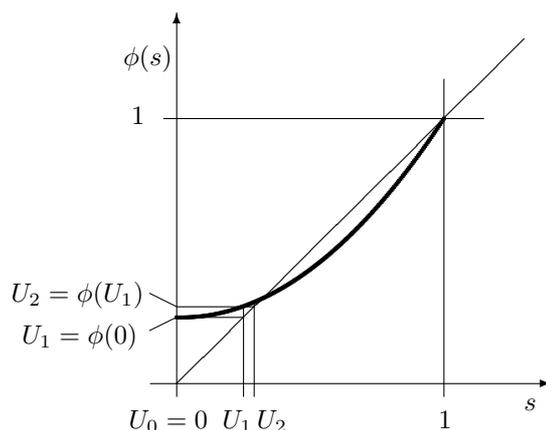


Figura 2.6

La función generadora es

$$\phi(s) = E[s^\xi] = 1 \cdot \frac{1}{4} + s^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 + 3s^2}{4}$$

y vemos que $U_n = \phi(U_{n-1})$.

Representamos esta función en la Figura 2.6. Podemos ver que las probabilidades de extinción convergen de manera creciente a la menor solución de la ecuación $u = \phi(u)$.

Esto también ocurre en el caso general: Si U_∞ es la menor solución de la ecuación $u = \phi(u)$, entonces U_∞ es la probabilidad de que la población se extinga en algún momento finito. La alternativa es que la población crezca indefinidamente, lo que ocurre con probabilidad $1 - U_\infty$.

En este ejemplo la ecuación $u = \phi(u)$ sería

$$u = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}u^2,$$

con soluciones 1 y $1/3$, y la menor solución es $1/3$. ▲

Puede ocurrir que $U_\infty = 1$, en cuyo caso es seguro que la población desaparece en algún momento.

Ejemplo 2.20

Si las probabilidades son ahora $p_0 = 3/4$ y $p_2 = 1/4$, la función generadora es

$$\phi(s) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}s^2.$$

La ecuación $u = \phi(u)$ es ahora

$$u = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u^2$$

con soluciones 1 y 3. Como la menor solución es 1, $U_\infty = 1$.

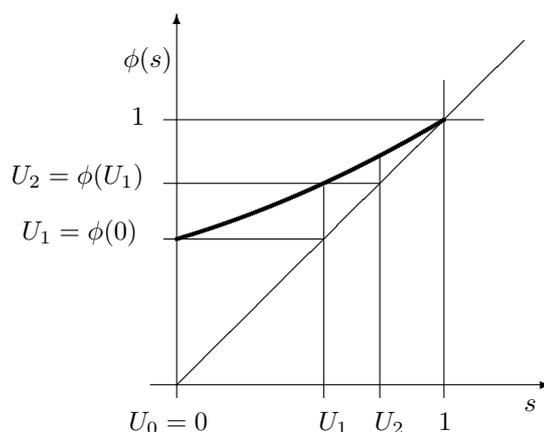


Figura 2.7

▲

Para determinar en cuál caso nos encontramos hay que ver si la curva de la función generadora $\phi(s)$ cruza la recta $y = x$ por debajo de 1, y esto se puede determinar por la pendiente de ϕ en 1:

$$\phi'(1) = \left. \frac{d\phi(s)}{ds} \right|_{s=1} = E(\xi) = \mu.$$

Si $0 < \mu \leq 1$ entonces $\phi(t) > t$, para todo $t \in [0, 1)$. Para probarlo, definimos una función $g(t) = \phi(t) - t$, esta función satisface que $g(0) = \phi(0)$, $g(1) = 0$ y es estrictamente decreciente puesto que su derivada $g'(t) = \phi'(t) - 1$ es estrictamente negativa, y esto se debe al hecho que ϕ' es estrictamente creciente y $\phi'(1) = \mu \leq 1$. Entonces, $g(t) > 0$, para $0 \leq t < 1$. En particular, la ecuación $\phi(t) = t$, no tiene raíces en $(0, 1)$.

Si $\mu > 1$, entonces la ecuación $\phi(t) = t$ tiene una única solución en $[0, 1)$. Esto implica que $\lim_{t \uparrow 1} \phi'(t) = \phi'(1) = \mu > 1$. Por continuidad existe un $t_0 < 1$, tal que $\phi'(t) > 1$ para todo $t_0 < t \leq 1$, por el teorema del valor intermedio vemos que

$$\frac{\phi(1) - \phi(t_0)}{1 - t_0} = \frac{1 - \phi(t_0)}{1 - t_0} = \phi'(t') > 1, \quad \text{para algún } t' \in (t_0, 1),$$

de donde sigue que $g(t_0) = \phi(t_0) - t_0 < 0$, y puesto que g es continua y $g(0) = P(\xi = 0) > 0$, podemos afirmar que existe un $0 < \eta < 1$ con $g(\eta) = 0$. Por la convexidad estricta de ϕ es claro que g no puede tener ninguna otra raíz en $(\eta, 1)$, ni en $(0, \eta)$.

Sea η la raíz más pequeña a la ecuación $\phi(t) = t$, en $[0, 1]$. Los hechos anteriores implican que esta solución existe y además: si $\mu \leq 1$, entonces $\eta = 1$; si $\mu > 1$, entonces $\eta < 1$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \phi'(1) < 1 & \quad \text{no hay cruce} & \quad U_\infty = 1, \\ \phi'(1) > 1 & \quad \text{hay cruce} & \quad U_\infty < 1. \end{aligned}$$

Pero hemos visto que $\phi'(1) = E[\xi]$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[\xi] < 1 & \quad \Rightarrow & \quad U_\infty = 1, \\ E[\xi] > 1 & \quad \Rightarrow & \quad U_\infty < 1. \end{aligned}$$

El caso límite corresponde a $E[\xi] = 1$. En este caso $E[X_n | X_0 = 1] = 1$ para todo n de modo que el tamaño promedio de la población es constante pero la población desaparece con seguridad, a menos que la varianza sea 0, es decir, que con probabilidad 1 todo individuo tenga exactamente un descendiente, en cuyo caso la población no se extingue nunca.

Ejemplo 2.21

Supongamos que el tamaño de las familias se distribuye según una ley geométrica con parámetro q ,

$$P(\xi = k) = qp^k, \quad k \geq 0, \quad \text{para algún } p \in (0, 1).$$

Es fácil de calcular la función generadora ϕ ,

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} qs^n p^n = \frac{q}{1 - ps}, \quad |s| < p^{-1}.$$

La media vale $\mu = \frac{p}{q}$. Se puede verificar usando un argumento de inducción que la n -ésima composición de ϕ consigo misma puede ser escrita como

$$\phi_n(s) = \begin{cases} \frac{n - (n-1)s}{n+1 - ns} & \text{si } p = q = 1/2, \\ \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de extinción en este caso? Usaremos la forma explícita de ϕ_n para responder a esta pregunta. Recordemos que

$$P(X_n = 0) = \phi_n(0) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{si } p = q = 1/2, \\ \frac{q(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}} & \text{si } p \neq q, \end{cases}$$

por lo que al hacer tender $n \rightarrow \infty$, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ \frac{q}{p}, & \text{si } p > q. \end{cases}$$

Observemos que si para algún $n \geq 1$ $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+k} = 0$, para toda $k \geq 0$. Es decir que la población se extingue en un tiempo anterior o igual a n . Tenemos que

$$\begin{aligned} P(\text{extinción en un tiempo finito}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{extinción antes del instante } n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n+k} = 0, k \geq 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ \frac{q}{p}, & \text{si } p > q. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusión: La extinción ocurre con probabilidad 1, solamente en el caso en que $p/q = \mu = E(X_1) \leq 1$; la cual es una condición bastante natural, puesto que $E(X_n) = E(X_1)^n \leq 1$, y es entonces de esperarse que $Z_n = 0$ tarde o temprano.

Veremos que el resultado de los ejercicios anteriores es consecuencia de un resultado más general.

Teorema 2.13 Si $X_0 = 1$ tenemos que

$$U_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(X_n = 0) = P(\text{extinción en un tiempo finito}) = \eta,$$

donde η es la solución más pequeña a la ecuación, $t = \phi(t)$. Además, $\eta = 1$, si $\mu < 1$, (el caso subcrítico) y $\eta < 1$, si $\mu > 1$ (caso super-crítico), mientras que en el caso en que $\mu = 1$, (el caso crítico) $\eta = 1$ si el tamaño de las familias tiene varianza estrictamente positiva.

Demostración. Sea $U_n = P_1(X_n = 0)$. Sabemos que

$$U_n = \phi(U_{n-1}).$$

Es claro que $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\}$, para todo $n \geq 1$, entonces U_n es una sucesión creciente y acotada; por la continuidad el límite de U_n existe y debe de satisfacer

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq 1, \quad \eta = \phi(\eta).$$

Veamos ahora que si ν es otra raíz positiva de la ecuación, entonces $\eta \leq \nu$. Dado que ϕ es una función estrictamente creciente, tenemos que

$$U_1 = \phi(0) \leq \phi(\nu) = \nu,$$

y se sigue que

$$U_2 = \phi(U_1) \leq \phi(\nu) = \nu,$$

y por inducción se ve que $U_n \leq \nu$, para todo $n \geq 1$, y por lo tanto que $\eta \leq \nu$. En consecuencia, η es la menor solución de la ecuación $t = \phi(t)$.

Ya vimos que si $\mu > 1$ entonces la ecuación $t = \phi(t)$, tiene una única solución en $[0, 1)$, y de hecho otra solución a la ecuación es $t = 1$. La menor solución es $\eta < 1$. Por otro lado, en el caso en que $\mu < 1$, vemos que $\phi(t) > t$ para todo $t \in [0, 1)$, y es claro que $\phi(1) = 1$, por lo tanto la solución positiva más pequeña a la ecuación $\phi(t) = t$ es $\eta = 1$. En el caso especial en que $\mu = 1$, el caso crítico, necesitamos distinguir entre el caso en que $\sigma^2 = 0$, donde $\phi(s) = s$ y por lo tanto $\eta = 0$, y el caso $\sigma^2 > 0$, donde $\phi(s) > s$, $s \in [0, 1)$ y por lo tanto $\eta = 1$. ■

2.9. Cadenas de Nacimiento y Muerte.

Sean $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ con $N \leq \infty$, y $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con espacio de estados \mathcal{E} y matriz de transición

$$P_{i,j} = \begin{cases} q_i & \text{si } j = i - 1 \\ r_i & \text{si } j = i \\ p_i & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con $0 \leq p_i, r_i, q_i \leq 1$ y $q_i + r_i + p_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{E}$ y $q_0 = 0$ y $p_N = 0$ si $N < \infty$. Diremos que una cadena de Markov con espacio de estados y matriz de transición de esta forma pertenece a la clase de Cadenas de Nacimiento y Muerte. Dado que se tiene mucha libertad en los valores que pueden tomar los parámetros p_i, r_i y q_i , varias cadenas de Markov entran en esta familia, como por ejemplo la cadena de Ehrenfest, la ruina del jugador, la caminata aleatoria con barreras absorbentes, etc..

En esta sección daremos métodos para calcular las probabilidades de que el primer tiempo de salida de la cadena fuera de una región $[a, b]$ ocurra por la barrera superior o inferior.

Proposición 2.8 Sea H_j el primer tiempo de llegada al estado j

$$H_j = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}, \quad i \in \mathcal{E}.$$

Supongamos que $p_j > 0$ y $q_j > 0$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ y que $p_0 > 0$ y $q_N > 0$ si $N < \infty$. Se tiene que la cadena es recurrente y para todo $a < b$, $a, b \in \mathcal{E}$, $a < k < b$,

$$P_k(H_a < H_b) = \frac{\sum_{j=k}^{b-1} \gamma_j}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j}, \quad P_k(H_b < H_a) = \frac{\sum_{j=a}^{k-1} \gamma_j}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j},$$

con

$$\gamma_j = \prod_{i=1}^j \left(\frac{q_i}{p_i} \right), \quad j > 0, \text{ y } \gamma_0 = 1.$$

Demostración. Denotaremos por

$$h(j) = P_j(H_a < H_b), \quad \text{para todo } j \in [a, b].$$

Es claro que $h(a) = 1$ y $h(b) = 0$. Haciendo un estudio de las transiciones iniciales se demuestra que la función h satisface

$$h(j) = q_j h(j-1) + r_j h(j) + p_j h(j+1), \quad j \in (a, b).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} h(j) &= P_j(H_a < H_b) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} P(H_a < H_b | X_1 = i, X_0 = j) P_{j,i} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} P(H_a < H_b | X_1 = i) P_{j,i} \\ &= q_j h(j-1) + r_j h(j) + p_j h(j+1). \end{aligned}$$

Dado que $r_j = 1 - p_j - q_j$ se tiene que h satisface el siguiente sistema de ecuaciones

$$h(j) = q_j h(j-1) + r_j h(j) + p_j h(j+1) \Leftrightarrow p_j (h(j+1) - h(j)) = q_j (h(j) - h(j-1)),$$

para todo $j \in (a, b)$, multiplicando y dividiendo por γ_{j-1} se ve que el sistema anterior es equivalente a

$$h(j+1) - h(j) = \frac{\left(\frac{q_j}{p_j}\right) \gamma_{j-1}}{\gamma_{j-1}} (h(j) - h(j-1)), \quad \forall j \in (a, b),$$

que es lo mismo que

$$h(j+1) - h(j) = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} (h(j) - h(j-1)), \quad \forall j \in (a, b).$$

Iterando este razonamiento se tiene que

$$h(j+1) - h(j) = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_{j-2}} \dots \frac{\gamma_{a+1}}{\gamma_a} (h(a+1) - h(a)), \quad \forall j \in (a, b),$$

esto implica que

$$h(j+1) - h(j) = \frac{\gamma_j}{\gamma_a} (h(a+1) - h(a)), \quad \forall j \in (a, b).$$

Sumando sobre $j = a + 1, \dots, b - 1$ se obtiene

$$h(b) - h(a + 1) = \sum_{j=a+1}^{b-1} (h(j + 1) - h(j)) = \frac{1}{\gamma_a} \left(\sum_{j=a+1}^{b-1} \gamma_j \right) (h(a + 1) - h(a)),$$

usando que $h(b) = 0$ llegamos a

$$h(a + 1) \left(\frac{\sum_{j=a+1}^{b-1} \gamma_j}{\gamma_a} \right) = h(a) \left(\frac{\sum_{j=a+1}^{b-1} \gamma_j}{\gamma_a} \right)$$

de donde se obtiene que

$$h(a + 1) = \frac{\sum_{j=a+1}^{b-1} \gamma_j}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j} h(a) \Leftrightarrow h(a + 1) - h(a) = \frac{-\gamma_a}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j}$$

Recordemos que

$$h(j + 1) - h(j) = \frac{\gamma_j}{\gamma_a} (h(a + 1) - h(a)) = \frac{\gamma_j}{\gamma_a} \left(\frac{-\gamma_a}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j} \right) = \frac{-\gamma_j}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j}, \quad a < j < b.$$

Finalmente, se tiene que

$$P_k(H_a < H_b) = h(k) = \sum_{j=k}^{b-1} (h(j) - h(j + 1)) = \frac{\sum_{j=k}^{b-1} \gamma_j}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j}.$$

y la probabilidad de que $P_z(H_b < H_a)$ se calcula usando que $P_z(H_b < H_a) = 1 - P_z(H_a < H_b)$. ■

Corolario 2.4 Bajo la hipótesis de la proposición anterior y si $a < k < b$

$$P_k(H_a < H_b) = P_k(T_a < T_b),$$

con la notación usual.

Corolario 2.5 Bajo las hipótesis de la proposición anterior y si $N = \infty$,

$$P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}.$$

Demostración. Supongamos que $X_0 = 1$, después de un minuto de meditación es fácil convencerse de que $P_1(T_n \geq n - 1) = 1$ y por lo tanto $P_1(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty) = 1$, ya que la medida de probabilidad P_1 es continua, es decir que si B_n es una sucesión creciente de eventos y $B = \cup_{n=0}^{\infty} B_n$ entonces

$$P_1(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(B_n).$$

En este caso $B_n = \{\omega \in \Omega : T_n \geq n - 1\}$. Ahora, sean $C_n = \{\omega \in \Omega : T_0 < T_n\}$, es claro que $C_n \subseteq C_{n+1}$, y que

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \{\omega \in \Omega : T_0 < \infty\},$$

y usando de nuevo la continuidad de la probabilidad P_1 llegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < \infty),$$

y dado que

$$P_1(T_0 < T_{n+1}) = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_j}{\sum_{j=0}^n \gamma_j} = 1 - \frac{\gamma_0}{\sum_{j=0}^n \gamma_j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j},$$

ya que $\gamma_0 = 1$. ■