Nombre: ______________________________

1	2	3	4	T

Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Jueves 28/10/10, 11 a.m. – 2 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

1. a) Demuestre que si i es un estado recurrente y $i \to j$ entonces j también es un estado recurrente y $\rho_{ij} = \rho_{ji} = 1$, donde $\rho_{ij} = P(T_j < \infty | X_0 = i)$ y $T_j = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n = j\}$.

   b) Sea j un estado transitorio y $N(j)$ el número de visitas al estado j. Demuestre que para cualquier $i \in \mathcal{E}$, $P_i(N(j) < \infty) = 1$ y

$$\mathrm{E}_i(N(j)) = \frac{\rho_{ij}}{(1 - \rho_{jj})}.$$

2. a) Dar la definición de estado recurrente y estado transitorio para una cadena de Markov. Verifique que la siguiente matriz es una matriz de transición. Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes. Determine cuáles clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

   b) P es la matriz de transición de una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Calcule la probabilidad de que la cadena sea absorbida por 0 si comienza en el estado i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Calcule también el tiempo medio para la absorción.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sean $(X_n, n \geq 1)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en $\mathbb{Z}$ y con función de probabilidad común $\pi(x) = P(X_1 = x)$ para $x \in \mathbb{Z}$. Construimos el paseo al azar asociado a esta sucesión: $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ para $n \geq 0$ y definimos el máximo de este proceso por $M_0 = 0$, y $M_{n+1} = \text{máx}\{M_n, S_{n+1}\}$.

a) Demuestre que el proceso definido por $Z_n = M_n - S_n$ es una cadena de Markov. Describa su espacio de estados $\mathcal{E}$ y su matriz de transición P.

b) Suponga que $\pi(1) = p$, $\pi(-1) = q = 1 - p$ con $0 < p < 1$; determine la matriz de transición en este caso y demuestre que la cadena es irreducible. Haga un esbozo de las trayectorias de S_n, M_n, Z_n sobre una misma gráfica.

c) Bajo las hipótesis de (b) sea $0 < k < N$; calcule $P(H_0 < H_N | X_0 = -k)$, donde $H_j = \text{mín}\{n \geq 0 : Z_n = j\}$.

d) Usando el resultado anterior halle $P(T_0 < \infty | X_0 = -k)$ para $k \geq 1$, con la notación usual $T_0 = \text{mín}\{n \geq 1 : Z_n = 0\}$.

4. a) Sea $Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ el tamaño total de una familia en un proceso de ramificación en el cual el número de descendientes por individuo tiene media $\mu = \mathrm{E}(\xi) < 1$. Suponiendo que $X_0 = 1$, demuestre que $\mathrm{E}(Z) = 1/(1-\mu)$.

   b) Considere un proceso de ramificación y sea ξ una variable aleatoria cuya distribución caracteriza la descendencia de los individuos de esta población. Suponga que con probabilidad $\alpha \geq 0$ los individuos no tienen descendencia. Aquellos que tienen descendencia generan $k > 0$ individuos con probabilidad

$$P(\xi = k | \xi > 0) = pq^{k-1}, \qquad \text{con } 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$$

   Halle la función de probabilidad de ξ y la función generadora de probabilidad correspondiente. Halle la probabilidad de que la población desaparezca. ¿Bajo qué condiciones es segura la extinción?