Modelos Estocásticos I

Problemas 6

Los problemas 4, 10, 13 y 14 son para entregar el martes 14/09/10

1. En el libro *Stochastic Processes with Applications*, de R. N. Bhattacharya & E. C. Waymire (Wiley, 1990), pag. 109, se da la siguiente definición:

   Definition 1.1 A stochastic process $\{X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots\}$ has the *Markov property* if, for each n and m, the conditional distribution of $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$ given $X_0, X_1, \ldots, X_n$ is the same as its conditional distribution given X_n alone. A process having the Markov property is called a *Markov Process*. If, in addition, the state space of the process is countable, then a Markov process is called a *Markov chain*.

   Por otro lado, Z. Brzezniak & T. Zastawniak en el libro *Basic Stochastic Processes* (Springer, 1999), pag. 88, se da esta otra definición

   Definition 5.1 Suppose that S is a finite or a countable set. Suppose also that a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is given. An S-valued sequence of random variables $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, is called an S-valued *Markov chain* or a Markov chain on S if for all $n \in \mathbb{N}$ and all $s \in S$

   $$P(\xi_{n+1} = s|\xi_0, \ldots, \xi_n) = P(\xi_{n+1} = s|\xi_n).$$

   ¿Qué diferencias importantes hay entre las dos definiciones? ¿Son equivalentes? Razone su respuesta.

2. Una cadena de Markov de tres estados: 0, 1 y 2 tiene la siguiente matriz de transición:

   $$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

   y su distribución inicial es $\pi(0) = P(X_0 = 0) = 0.2$; $\pi(1) = P(X_1 = 1) = 0.4$; $\pi(2) = P(X_0 = 2) = 0.4$. Calcule:

   a) $P(X_3 = 2|X_2 = 0)$, b) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$ c) $P(X_2 = 1, X_3 = 2|X_1 = 0)$

   d) $P(X_1 = 1)$ e) $P(X_{45} = 0|X_{44} = 1, X(1) = 0)$ f) $P(X_3 = 1|X_1 = 0)$.

3. Una cadena de Markov de tres estados: 0, 1 y 2 tiene la siguiente matriz de transición:

   $$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

   (a) Halle $P(X_2 = 1, X_3 = 1|X_1 = 0)$, $P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0)$ (b) Si sabemos que $X_0 = 1$, halle $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2)$. (c) Si la distribución inicial es $\pi(0) = \pi(1) = 0.5, \pi(2) = 0$, halle $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0)$ y $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$.

4. Una cadena de Markov de tres estados: 1, 2 y 3 tiene distribución inicial $\pi = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ y matriz de transición:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

   Calcule las siguientes probabilidades (a) $P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 3|X_0 = 1)$, (b) $P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1, X_5 = 2|X_0 = 3)$, (c) $P(X_1 = 2, X_3 = 1, X_4 = 3, X_6 = 2|X_0 = 1)$, (d) $P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1)$, (e) $P(X_2 = 2, X_5 = 2, X_6 = 2)$.

5. Sea (X_n) una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4\}$, distribución inicial uniforme en este espacio y matriz de transición

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

   Calcule las siguientes probabilidades (a) $P(X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 3, X_8 = 3|X_4 = i)$ para todo $i \in E$. (b) $P(X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 3, X_8 = 3)$.

6. Considere el problema de enviar un mensaje binario, 0 ó 1, a través de un canal que tiene varias etapas. La transmisión en cada etapa está sujeta a una probabilidad de error fija α. Suponga que $X_0 = 0$ es la señal que que se envía y sea X_n la señal que se recibe en la n-ésima etapa. Suponga que (X_n) es una cadena de Markov con probabilidades de transición $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha$ y $P_{01} = P_{10} = \alpha$, con $0 < \alpha < 1$.

   a) Determine la probabilidad de que no haya errores en las dos primeras etapas: $P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0)$. b) Determine la probabilidad de que se reciba la señal correcta en la etapa 2 (¡no es la misma que la probabilidad anterior!). c) Determine $P(X_5 = 0|X_0 = 0)$.

7. Sea $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli con probabilidad de éxito p. Para $n \geq 1$ definimos $X_n = Y_n + Y_{n-1}$. ¿Es $(X_n)_{n\geq 1}$ una cadena de Markov?

8. Un modelo simplificado para el desarrollo de una enfermedad es el siguiente: El tamaño de la población es $N = 5$, de los cuales algunos tienen la enfermedad y el resto está sano. Durante cada período de tiempo se seleccionan dos personas al azar de la población y se supone que ellas interactúan. La selección se hace al azar, de modo que cualquier par de personas en la población tiene igual probabilidad de ser escogido. Si una de estas personas está enferma y la otra no, con probabilidad 0.1 la enfermedad se transmite a la persona sana. En otro caso no hay transmisión. Sea X_n el número de personas enfermas en la población al final del período n. ¿Es este proceso una cadena de Markov? Si su respuesta es afirmativa, halle la matriz de transición de la cadena.

9. Las variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots$ son independientes y tienen función de probabilidad $P(\xi_i = 0) = 0.1$; $P(\xi_i = 1) = 0.3$; $P(\xi_i = 2) = 0.2$; $P(\xi_i = 3) = 0.4$. Sea $X_0 = 0$ y $X_n = \text{máx}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ la mayor observación hasta el instante n. Determine la matriz de transición para la cadena de Markov (X_n).

10. Suponga que la probabilidad de que llueva hoy es 0.3 si ninguno de los dos días anteriores llovió, pero es 0.6 si al menos en uno de los dos días anteriores llovió. Llamemos T_n al estado del tiempo en el día n, donde T_n vale 1 si llueve y 0 si no. T_n no es una cadena de Markov, pero el estado del tiempo para los últimos dos días $X_n = (T_{n-1}, T_n)$ si lo es, con espacio de estados $E = \{00, 01, 10, 11\}$. Halle la matriz de transición para esta cadena. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva el miércoles dado que no llovió ni el domingo ni el lunes?

11. Cinco bolas blancas y cinco negras se distribuyen en dos cajas de modo que cada caja contenga cinco bolas. En cada paso sacamos una bola de cada caja y las intercambiamos. Sea X_n el número de bolas blancas en la caja de la izquierda en el instante n. Obtenga la matriz de transición para X_n.

12. Un taxista presta servicio entre el aeropuerto A y dos hoteles B y C, según las siguientes reglas. Si está en el aeropuerto, se dirige a cualquiera de los dos hoteles con igual probabilidad. Si está en un hotel, regresa al aeropuerto con probabilidad 3/4 y va al otro hotel con probabilidad 1/4.

    a) Obtenga la matriz de transición para la cadena.

    b) Suponga que el taxista comienza en el aeropuerto en el instante 0. Halle la probabilidad de que se encuentre en cada una de las tres posibles ubicaciones en el instante 2 y la probabilidad de que esté en el hotel B en el instante 3.

13. La cadena de Markov asociada a un proceso de producción se describe a continuación. El proceso de producción de las piezas se inicia en el paso 1. Al concluir el paso 1, 20 % de las piezas manufacturadas deben ser reelaboradas, es decir, regresan al paso 1, 10 % son desechadas y 70 % continúan al paso 2. Al concluir el paso 2, 5 % de las piezas deben regresar al paso 1, 10 % al paso 2, 5 % son desechadas y el 80 % restantes pueden ser vendidas al mercado.

    a) Formule una cadena de Markov con 4 estados donde el estado 3 corresponde a las piezas desechadas y el 4 a las piezas que son vendidas.

    b) Calcule la probabilidad de que una pieza sea desechada en el proceso.

14. Demuestre que la propiedad de Markov no implica que para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$P(X_{n+1} \in C|X_n \in A, X_{n-1} \in B) = P(X_{n+1} \in C|X_n \in A)$$

    (este resultado no es cierto en general si A tiene más de un elemento).