Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Respuestas

1. a) Demuestre que si i es un estado recurrente y $i \to j$ entonces j también es un estado recurrente y $\rho_{ij} = \rho_{ji} = 1$, donde $\rho_{ij} = P(T_j < \infty | X_0 = i)$ y $T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$.

   b) Sea j un estado transitorio y $N(j)$ el número de visitas al estado j. Demuestre que para cualquier $i \in \mathcal{E}$, $P_i(N(j) < \infty) = 1$ y
$$\mathrm{E}_i(N(j)) = \frac{\rho_{ij}}{(1 - \rho_{jj})}.$$

   Respuesta. Ver notas del curso.

2. a) Dar la definición de estado recurrente y estado transitorio para una cadena de Markov. Verifique que la siguiente matriz es una matriz de transición. Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes. Determine cuáles clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

   b) P es la matriz de transición de una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Calcule la probabilidad de que la cadena sea absorbida por 0 si comienza en el estado i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Calcule también el tiempo medio para la absorción.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Respuesta. Para las definiciones ver notas del curso. Es sencillo verificar que todas las filas de la matriz suman 1 y todos los términos son positivos, de modo que la matriz es una matriz de transición.

   a) La figura 1 muestra el esquema de transiciones posibles para esta cadena, sin incluir las transiciones al mismo estado. Vemos que hay tres clases de equivalencia, $\{0, 1\}$; $\{2, 3\}$ y $\{4, 5\}$. Para clasificarlas observamos que desde el estado 5 podemos ir al estado 0 y nunca regresar y por lo tanto la clase $\{4, 5\}$ es transitoria. De manera similar desde el estado 3 podemos ir al estado 0 y nunca regresar, así que la clase $\{3, 4\}$ también es transitoria. La clase restante, $\{0, 1\}$ debe ser recurrente porque toda cadena de Markov con espacio de estados finito debe tener al menos un estado recurrente, y si alguno de estos dos estados es recurrente el otro también debe serlo, porque pertenecen a la misma clase de equivalencia. Además $\{0, 1\}$ es la única clase cerrada.

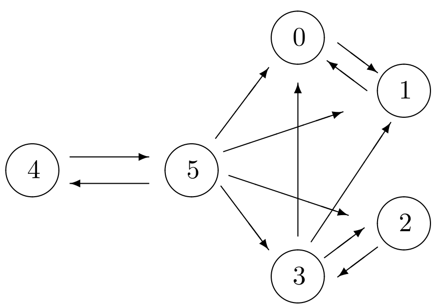

Figura 1

b) Observamos que esta cadena tiene dos estados absorbentes, 0 y 4 (ver figura 2). Sea $A = \{0, 4\}$ el conjunto de los estados absorbentes y definimos el tiempo hasta la absorción por

$$H_A = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n \in A\} \tag{1}$$

y para $i = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$\alpha_i = P(X_{H_A} = 0|X_0 = i),$$

que es la probabilidad de que la cadena sea absorbida por 0 si comienza en el estado i. Es inmediato que $\alpha_0 = 1, \alpha_4 = 0$. Para hallar α_i para $i = 1, 2, 3$ hacemos una análisis de la primera transición.

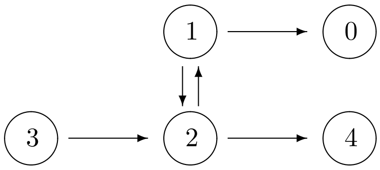

Figura 2

Si iniciamos en el estado 1, la primera transición puede ser a 0, con probabilidad 1/2 o a 2, también con probabilidad 1/2. Por lo tanto,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_2. \tag{2}$$

Si iniciamos en el estado 2 la primera transición puede ser al estado 1 con probabilidad 1/2 o al estado 4, con igual probabilidad. Tenemos entonces la ecuación

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_1. \tag{3}$$

Finalmente, si iniciamos en el estado 3 con probabilidad 1 vamos al estado 2, de modo que $\alpha_3 = \alpha_2$. Sustituyendo (3) en (2) obtenemos $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$.

Para hallar el tiempo medio de absorción definimos, para $i = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$\beta_i = \mathrm{E}(H_A|X_0 = i),$$

y vemos que $\beta_0 = \beta_4 = 0$. Haciendo de nuevo un análisis de la primera transición obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(\beta_2 + 1) = \frac{\beta_2}{2} + 1 \\
\beta_2 &= \frac{1}{2}(\beta_1 + 1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\beta_1}{2} + 1 \\
\beta_3 &= \beta_2 + 1.
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$.

3. Sean $(X_n, n \geq 1)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en $\mathbb{Z}$ y con función de probabilidad común $\pi(x) = P(X_1 = x)$ para $x \in \mathbb{Z}$. Construimos el paseo al azar asociado a esta sucesión: $S_0 = 0$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ para $n \geq 0$ y definimos el máximo de este proceso por $M_0 = 0$, y $M_{n+1} = \text{máx}\{M_n, S_{n+1}\}$.

   a) Demuestre que el proceso definido por $Z_n = M_n - S_n$ es una cadena de Markov. Describa su espacio de estados $\mathcal{E}$ y su matriz de transición P.

   b) Suponga que $\pi(1) = p$, $\pi(-1) = q = 1 - p$ con $0 < p < 1$; determine la matriz de transición en este caso y demuestre que la cadena es irreducible. Haga un esbozo de las trayectorias de S_n, M_n, Z_n sobre una misma gráfica.

   c) Bajo las hipótesis de (b) sea $0 < k < N$; calcule $P(H_0 < H_N|X_0 = k)$, donde $H_j = \text{mín}\{n \geq 0 : Z_n = j\}$.

d) Usando el resultado anterior halle $P(T_0 < \infty | X_0 = k)$ para $k \geq 1$, con la notación usual $T_0 = \min\{n \geq 1 : Z_n = 0\}$.

Respuesta. (a) Tenemos

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= M_{n+1} - S_{n+1} = \max\{M_n, S_{n+1}\} - S_n - X_{n+1} \\ &= \max\{M_n - S_n, S_{n+1} - S_n\} - X_{n+1} \\ &= \max\{M_n - S_n - X_{n+1}, 0\} \\ &= \max\{Z_n - X_{n+1}, 0\} \\ &= F(Z_n, X_{n+1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Por el ejemplo 2.8 de las notas vemos que Z_n es una cadena de Markov. Observamos que $S_n \leq M_n$ y por lo tanto $Z_n = M_n - S_n \geq 0$, de modo que el espacio de estados de este proceso es $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Veamos cuáles son sus probabilidades de transición.

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = P(\max\{Z_n - X_{n+1}, 0\} = j | Z_n = i) \\ &= P(\max\{i - X_{n+1}, 0\} = j). \end{aligned}$$

Si $j = 0$ entonces necesitamos que $i - X_{n+1} \leq 0$, es decir $X_{n+1} \geq i$ y la probabilidad de este evento es

$$P_{i0} = P(X_{n+1} \geq i) = \sum_{k \geq i} \pi(k).$$

Si en cambio $j \geq 1$ entonces $P_{ij} = P(X_{n+1} = i - j) = \pi(i - j)$. Resumiendo

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \geq i} \pi(k) & \text{si } j = 0, \\ \pi(i - j) & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

(b) Observamos que la cadena Z_n no toma valores negativos, y por (4) si $Z_n = 0$, $Z_{n+1} = \max\{-X_{n+1}, 0\}$. Por lo tanto si estamos en el estado 0 en el instante n las transiciones pueden ser a 0, si $X_{n+1} = 1$, lo que ocurre con probabilidad p, o a 1 si $X_{n+1} = -1$, lo que ocurre con probabilidad q. Por lo tanto $P_{00} = p, P_{0,1} = q$.

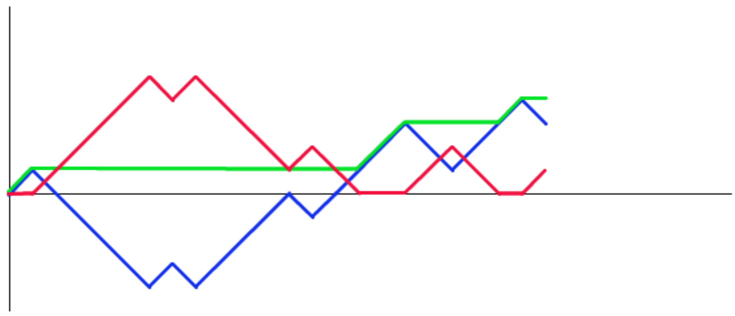

Figura 3. Gráfica de los procesos S_n (azul), M_n (verde) y Z_n (rojo).

Si la cadena se encuentra en un estado $i > 0$, podemos pasar al estado $i - 1$ si $X_{n+1} = 1$, con probabilidad p, o al estado $i + 1$ si $X_{n+1} = -1$, con probabilidad q: Para $i > 0$

$$P_{ij} = \begin{cases} p & \text{si } j = i - 1 \\ q & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para ver que la matriz es irreducible observamos que todos los estados se comunican: Si $0 \leq i < j$ con $j = i + k$ entonces es posible ir de i a j en k pasos si todas las variables $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$ valen -1, y esto ocurre con probabilidad q^k:

$$P_{ij}^{(k)} = q^k > 0.$$

Si en cambio $i > j \geq 0$, con $i = j + k$ podemos ir de i a j en k pasos si todas las variables $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$ valen 1, y esto ocurre con probabilidad p^k:

$$P_{ij}^{(k)} = p^k > 0.$$

Finalmente, si $j = i \geq 0$ podemos regresar a i en dos pasos si una de las variables X_{n+1}, X_{n+2} vale $+1$ y la otra -1, y esto tiene probabilidad $2pq$:

$$P_{ii}^2 = 2pq > 0.$$

c) Sea $0 \leq k \leq N$ y definimos

$$h(k) = P(H_0 < H_N | X_0 = k).$$

Entonces $h(0) = 1$ y $h(N) = 0$. Haciendo un análisis de la primera transición obtenemos $h(k) = qh(k+1) + ph(k-1)$ de donde se obtiene que

$$h(k) - h(k+1) = \frac{p}{q}\big(h(k-1) - h(k)\big) \tag{5}$$

Si $p = q = 0.5$ tenemos que $h(k) - h(k+1) = h(k-1) - h(k) = C$. Para determinar el valor de esta constante sumamos sobre $k = 1, \dots, N$:

$$1 = h(0) - h(N) = \sum_{k=1}^{N} \big(h(k-1) - h(k)\big) = CN,$$

de modo que $C = 1/N$. Ahora para hallar el valor de $h(k)$ sumamos (5) desde k hasta $N - 1$:

$$h(k) = h(k) - h(N) = \sum_{j=k+1}^{N} \big(h(j-1) - h(j)\big) = (N-k)C = 1 - \frac{k}{N}. \tag{6}$$

Si $p \neq q$ a partir de (5) obtenemos

$$\begin{aligned} h(k) - h(k+1) &= \frac{p}{q}\big(h(k-1) - h(k)\big) \\ &= \Big(\frac{p}{q}\Big)^2 \big(h(k-2) - h(k-1)\big) \\ &= \Big(\frac{p}{q}\Big)^k \big(h(0) - h(1)\big) \\ &= C\Big(\frac{p}{q}\Big)^k \end{aligned} \tag{7}$$

con $C = 1 - h(1)$. Para hallar el valor de esta constante sumamos la expresión anterior de 0 a $N - 1$:

$$1 = h(0) - h(N) = \sum_{j=0}^{N-1} \big(h(j) - h(j+1)\big) = C \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\frac{p}{q}\Big)^j = C \frac{1 - \big(\frac{p}{q}\big)^N}{1 - \frac{p}{q}}$$

de donde obtenemos que

$$C = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \big(\frac{p}{q}\big)^N}.$$

Finalmente, para obtener el valor de $h(k)$ sumamos (7) desde 0 hasta $k-1$ y obtenemos

$$\begin{aligned}1-h(k)=h(0)-h(k)&=\sum_{j=0}^{k-1}\big(h(j)-h(j+1)\big)\\&=C\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{p}{q}\Big)^j=C\frac{1-\big(\frac{p}{q}\big)^i}{1-\frac{p}{q}}\\&=\frac{1-\big(\frac{p}{q}\big)^i}{1-\big(\frac{p}{q}\big)^N}\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$h(k)=1-\frac{1-\big(\frac{p}{q}\big)^i}{1-\big(\frac{p}{q}\big)^N}=\frac{\big(\frac{p}{q}\big)^i-\big(\frac{p}{q}\big)^N}{1-\big(\frac{p}{q}\big)^N}.$$

(d) Observamos que la cadena comienza en $k\geq 1$, T_0 coincide con H_0 y podemos usar la fórmula anterior. Por lo tanto

$$P(T_0<\infty|X_0=k)=\lim_{N\to\infty}P(T_0<T_N|X_0=k)=\begin{cases}\big(\frac{p}{q}\big)^k & \text{si } p<q,\\ 1 & \text{si } p\geq q.\end{cases}$$

4. a) Sea $Z=\sum_{n=0}^{\infty}X_n$ el tamaño total de una familia en un proceso de ramificación en el cual el número de descendientes por individuo tiene media $\mu=\mathrm{E}(\xi)<1$. Suponiendo que $X_0=1$, demuestre que $\mathrm{E}(Z)=1/(1-\mu)$.

   b) Considere un proceso de ramificación y sea ξ una variable aleatoria cuya distribución caracteriza la descendencia de los individuos de esta población. Suponga que con probabilidad $\alpha\geq 0$ los individuos no tienen descendencia. Aquellos que tienen descendencia generan $k>0$ individuos con probabilidad

$$P(\xi=k|\xi>0)=pq^{k-1},\qquad \text{con } 0<p<1,\ q=1-p.$$

Halle la función de probabilidad de ξ y la función generadora de probabilidad correspondiente. Halle la probabilidad de que la población desaparezca. ¿Bajo qué condiciones es segura la extinción?

Respuesta. (a) Vimos en clase (ver pag. 78 de las notas) que si $X_0=1$ el tamaño promedio de la n-ésima generación es $\mathrm{E}_1(X_n)=\mu^n$. Como $X_n\geq 0$ podemos intercambiar esperanzas y sumas y obtenemos

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}X_n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}(X_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n=\frac{1}{1-\mu}.$$

(b) Tenemos que $P(\xi=0)=\alpha=1-P(\xi>0)$ y por lo tanto para $k>1$,

$$P(\xi=k)=P(\xi=k|\xi>0)P(\xi>0)=(1-\alpha)pq^{k-1}.$$

Esto describe la función de probabilidad de ξ. Para hallar la probabilidad de extinción calculamos la función generadora de probabilidad para ξ:

$$\phi(s)=\mathrm{E}(s^\xi)=s^0\alpha+(1-\alpha)p\sum_{k=1}^{\infty}s^kq^{k-1}=\alpha+\frac{(1-\alpha)ps}{1-qs}.$$

Para hallar la probabilidad de extinción debemos resolver la ecuación $\phi(s)=s$

$$\begin{aligned}s=\alpha+\frac{(1-\alpha)ps}{1-qs}&\Leftrightarrow(1-qs)s=(1-qs)\alpha+(1-\alpha)ps\\&\Leftrightarrow s^2+\frac{p-\alpha}{q}s-\frac{1-\alpha}{q}=0.\end{aligned}$$

Una manera sencilla de resolver esta ecuación es la siguiente. Sabemos (y además es muy fácil de verificar) que 1 es solución de esta ecuación de segundo grado. Por lo tanto, para hallar la segunda raíz s_0, tenemos la siguiente expresión:

$$(s-1)(s-s_0) = s^2 - \frac{q+\alpha}{q}s + \frac{\alpha}{q}$$

de donde obtenemos que $s_0 = \frac{\alpha}{q}$. Sabemos también que la probabilidad de extinción para la población es la menor solución de la ecuación $\phi(s) = s$. Por lo tanto esta probabilidad vale 1 si $\alpha \geq q$. En caso contrario la probabilidad de extinción es α/q.