Modelos Estocásticos I

Tercer Examen Parcial

Respuestas

1. a) ¿Cuál es la diferencia entre un estado recurrente positivo y uno recurrente nulo? ¿Cómo se define el período de un estado? Demuestre que si el estado i es recurrente positivo y $i \to j$ entonces j también es recurrente positivo. Demuestre también que si $i \leftrightarrow j$ entonces ambos estados tienen el mismo período.

   b) Considere una cadena de Markov de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{i+2}\big) \qquad \text{para } i \geq 0,$$
$$P_{i,i-1} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{i+2}\big) \qquad \text{para } i \geq 1,$$

   y $P_{00} = 1 - P_{01} = 3/4$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

   Respuesta. Para la parte (a) ver notas del curso.

   b) Llamemos $p_i = P_{i,i+1}$ para $i \geq 0$ y $q_i = P_{i,i-1}$ para $i \geq 1$. Por las definiciones del problema tenemos

$$p_i = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{i+2}\Big) = \frac{i+1}{2(i+2)}, \quad i \geq 0,$$
$$q_i = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{i+2}\Big) = \frac{i+3}{2(i+2)}, \quad i \geq 1.$$

   Definimos

$$\gamma_i = \frac{q_1 q_2 \cdots q_i}{p_1 p_2 \cdots p_i}; \qquad \nu_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} \qquad \text{para } i \geq 1,$$

   con $\gamma_0 = \nu_0 = 1$. Por los resultados estudiados en el curso (ver sección 3.8.1 de las notas) sabemos que la cadena es transitoria si y sólo si $\sum \gamma_i = \infty$. Si la serie diverge la cadena es recurrente y es positiva si y sólo si $\sum \nu_i < \infty$. Por lo tanto tenemos que ver si estas series convergen o no para determinar las características de la cadena.

   Tenemos

$$\gamma_i = \frac{q_1 q_2 \cdots q_i}{p_1 p_2 \cdots p_i} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (i+1)(i+2)(i+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (i-1)i(i+1)} = \frac{(i+2)(i+3)}{6}$$

   y es inmediato que la serie $\sum \gamma_i$ diverge, de modo que la cadena es recurrente. Veamos ahora la otra serie,

$$\nu_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} = \frac{p_0}{q_i} \frac{p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_{i-1}} = \frac{1/4}{(i+3)/2(i+2)} \frac{6}{(i+1)(i+2)} = \frac{3}{(i+1)(i+3)}.$$

   y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{(j+1)(j+3)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{j^2} < \infty$$

   tenemos que la serie $\sum \nu_i$ es convergente y la cadena es recurrente positiva.

   Para la distribución estacionaria tenemos que $\pi(i) = \nu_i / \big(\sum \nu_j\big)$. Si llamamos $k = 1/\big(\sum \nu_j\big)$ entonces

$$\pi(i) = \frac{3k}{(i+1)(i+3)}.$$

   Es posible hallar el valor de la constante usando un desarrollo en series parciales para ν_i, aunque no era necesario hacerlo para el examen. La fracción $1/(i+1)(i+3)$ se puede escribir como

$$\frac{1}{(i+1)(i+3)} = \frac{A}{i+1} + \frac{B}{i+3}$$

   de donde obtenemos que $A = 1/2,\ B = -1/2$ y en consecuencia para $i \geq 1$

$$\nu_i = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+3}\Big).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty}\nu_i &= 1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{(j+1)(j+2)}\\ &= 1+\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\Big)\\ &= 1+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\Big)\\ &= 1+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

y entonces $k = 4/9$.

2. Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y con matriz de transición

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que la cadena es irreducible.

b) Calcule el período de la cadena.

c) Halle la distribución estacionaria.

d) Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz P.

Respuesta.

a) La figura 1 muestra el esquema de transiciones para esta cadena. Vemos que hay una sola clase de equivalencia y por lo tanto la cadena es irreducible.

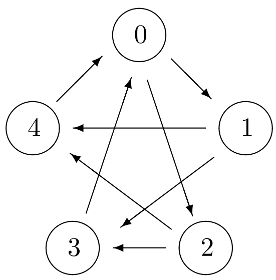

Figura 1

b) Vemos que, partiendo de 0 hay 4 'circuitos' posibles: $0 \to 1 \to 3 \to 0$; $0 \to 1 \to 4 \to 0$; $0 \to 2 \to 3 \to 0$; $0 \to 2 \to 4 \to 0$ y no es posible regresar al 0 en menos de tres pasos. Esto quiere decir que $P_{00}^{(3)} > 0$ y además que sólo podemos regresar al 0 en un número de pasos que sea múltiplo de 3, es decir, $P_{00}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow n = 3k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto el período de 0 (y de toda la cadena) es 3.

c) Para hallar la distribución estacionaria π debemos resolver el sistema de ecuaciones $\pi' P = \pi$, es decir

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_0\\ \pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\\ \pi_4\end{pmatrix}$$

y obtenemos las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\pi_3 + \pi_4 &= \pi_0 \\
\frac{1}{3}\pi_0 &= \pi_1 \\
\frac{2}{3}\pi_0 &= \pi_2 \\
\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2 &= \pi_3 \\
\frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 &= \pi_4
\end{aligned}
$$

con la condición adicional $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. Resolviendo este sistema obtenemos

$$\pi_0 = 1/3; \quad \pi_1 = 1/9; \quad \pi_2 = 2/9; \quad \pi_3 = 7/36; \quad \pi_4 = 5/36.$$

d) Como la cadena es aperiódica no se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$, porque los valores de las probabilidades de transición oscilan cuando n varía. Como el período es 3 tenemos que para cada par de estados i, j hay un entero r, $r = 0, 1, 2$ tal que $P_{ij}^{(3m+r)} \to 3\pi_j$ cuando $m \to \infty$.

3. Una sustancia radioactiva emite partículas α de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo con intensidad de $\lambda = 3$ por segundo.

a) Si en los primeros cinco segundos se han emitido 12 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellas fuesen emitidas en el primer segundo?

b) Las partículas emitidas son registradas por un contador Geiger con probabilidad 3/4. Si al cabo de 3 segundos el contador ha registrado 6 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que en realidad hayan sido emitidas 9?

A esta fuente radioactiva se le une otra que emite partículas α con intensidad de $\mu = 5$ por segundo.

c) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que se emita la primera partícula?

d) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que el contador registre la primera partícula?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera partícula detectada por el contador provenga de la segunda fuente radioactiva?

Demostración. En este problema tenemos dos fuentes radioactivas. Vamos a denotar con índice 1 a las variables asociadas a la primera fuente (de intensidad 3 partículas/seg.) y con índice 2 a las del segundo. Así $N_1(t), t \geq 0$ es un proceso de Poisson homogéneo de intensidad $\lambda = 3$ mientras que $N_2(t), t \geq 0$ es un proceso de Poisson homogéneo de intensidad $\mu = 5$. La suma de ambos procesos la denotaremos por M. Por otro lado tenemos los procesos de las partículas detectadas por el contador. Para estos vamos a usar la notación N_1', N_2' y M', respectivamente.

a) Queremos hallar

$$
\begin{aligned}
P(N(1) = 2 | N(5) = 12) &= \frac{P(N(1) = 2, N(5) = 12)}{P(N(5) = 12)} \\
&= \frac{P(N(1) = 2, N(5) - N(1) = 10)}{P(N(5) = 12)} \\
&= \frac{P(N(1) = 2)P(N(5) - N(1) = 10)}{P(N(5) = 12)} \\
&= \frac{e^{-3}3^2 e^{-3\cdot 4}(3\cdot 4)^{10} 12!}{2!\,10!\,e^{-3\cdot 5}(3\cdot 5)^{12}} \simeq 0.283
\end{aligned}
$$

También es posible usar un resultado que demostramos en el curso: Si conocemos el valor de $N(5)$, la variable $N(1)$ tiene distribución binomial con probabilidad de éxito igual a $1/5$ y el número de ensayos es igual a $N(5)$.

b) Nos interesa ahora el proceso $N_1'(t),\ t \geq 0$ de partículas detectadas por el contador, que es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda p = 3 \cdot 3/4 = 9/4$ partículas por segundo. Queremos hallar

$$\begin{aligned} P(N_1(3) = 9 | N_1'(3) = 6) &= \frac{P(N_1(3) = 9, N_1'(3) = 6)}{P(N_1'(3) = 6)} \\ &= \frac{P(N_1'(3) = 6 | N_1(3) = 9) P(N_1(3) = 9)}{P(N_1'(3) = 6)} \end{aligned}$$

Pero si sabemos que han sido emitidas 9 partículas y la probabilidad de detección es $p = 3/4$, el número de partículas detectadas tiene distribución binomial con parámetros 9 y $3/4$. Por lo tanto el primer factor del numerador es

$$\binom{9}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Usando esto en la expresión anterior

$$\begin{aligned} P(N_1(3) = 9 | N_1'(3) = 6) &= \frac{\binom{9}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^3 e^{-3\cdot 3}(3\cdot 3)^9 6!}{9!\, e^{-3\cdot 3\cdot \frac{3}{4}}(3\cdot 3\cdot 3/4)^6} \\ &= \frac{e^{-9/4}}{3!}\left(\frac{9}{4}\right)^3 \simeq 0.2 \end{aligned}$$

Otra manera de resolver esta parte es observar que el proceso de partículas no detectadas que llamaremos $N_1''(t) = N_1(t) - N_1'(t)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda(1-p) = 3/4$ partículas por segundo y además es independiente de $N_1'(t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(N_1(3) = 9 | N_1'(3) = 6) &= P(N_1'(3) + N_1''(3) = 9 | N_1'(3) = 6) \\ &= P(N_1''(3) = 3 | N_1'(3) = 6) \\ &= P(N_1''(3) = 3) \\ &= \frac{e^{-9/4}}{3!}\left(\frac{9}{4}\right)^3 \simeq 0.2 \end{aligned}$$

c) Como las dos fuentes son independientes, el proceso $M(t) = N_1(t) + N_2(t)$ es un proceso de Poisson cuya intensidad es la suma de las intensidades, es decir $3 + 5 = 8$. Por lo tanto, el tiempo de espera hasta que se emita la primera partícula de este proceso tiene distribución exponencial de parámetro 8.

d) El proceso de partículas detectadas es $M'(t) = N_1'(t) + N_2'(t)$, que tiene intensidad $8 \cdot 3/4 = 6$. Por lo tanto el tiempo de espera hasta que se detecte la primera partícula es exponencial de parámetro 6,

e) Sea T_1' el tiempo de espera hasta que la primera partícula proveniente de la primera fuente sea detectada y T_2' el tiempo hasta que la primera partícula de la segunda fuente sea detectada. Queremos hallar $P(T_2' < T_1')$ donde estas variables son independientes con distribución exponencial de parámetros $9/4$ y $15/4$, respectivamente.

Vimos en clase (ver notas del curso, sección 4.1.2) que si $S \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ y $T \sim \mathcal{E}xp(\mu)$ entonces

$$P(S < T) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

En consecuencia

$$P(T_2' < T_1') = \frac{5\frac{3}{4}}{3\frac{3}{4} + 5\frac{3}{4}} = \frac{5}{8}.$$

4. a) Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ y sea τ_k el instante en el cual ocurre el k-ésimo evento. Demuestre que para $0 < t_1 < t_2$,

$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = e^{-\lambda t_2}[1 + \lambda(t_2 - t_1)].$$

b) Derivando esta fórmula halle la densidad conjunta de (τ_1, τ_2).

c) Determine las densidades marginales de τ_1 y τ_2.

d) Determine la densidad condicional para τ_1 dado que $\tau_2 = t_2$.

Respuesta. a) Para $0 < t_1 < t_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) &= P(N(t_1) = 0, N(t_2) \in \{0, 1\}) \\
&= P(N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) \in \{0, 1\}) \\
&= P(N(t_1) = 0)P(N(t_2) - N(t_1) \leq 1) \\
&= e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \big(1 + \lambda(t_2 - t_1)\big) \\
&= e^{-\lambda t_2}[1 + \lambda(t_2 - t_1)].
\end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de los incrementos en el tercer paso.

b) Si (τ_1, τ_2) tiene densidad $f_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2)$ y $0 < t_1 < t_2$ entonces

$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = \int_{t_1}^{\infty} \int_{t_2}^{\infty} f_{\tau_1,\tau_2}(x, y)\, dydx$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
f_{\tau_1,\tau_2}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big(e^{-\lambda t} \big(1 + \lambda(t - s)\big) \Big|_{s=t_1, t=t_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big(-\lambda e^{-\lambda t} \Big|_{t=t_2} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda t_2}
\end{aligned}$$

para $0 < t_1 < t_2$.

c) Para hallar la densidad marginal de τ_1 integramos la densidad conjunta respecto a τ_2:

$$f_{\tau_1}(t_1) = \int_{t_1}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} dy = -\lambda e^{-\lambda y} \Big|_{t_1}^{\infty} = \lambda e^{-\lambda t_1}, \quad \text{para } t_1 > 0,$$

que es la densidad de una variable exponencial de parámetro λ. De manera similar tenemos

$$f_{\tau_2}(t_2) = \int_{0}^{t_2} \lambda^2 e^{-\lambda y} dx = \lambda^2 t_2 e^{-\lambda t_2}, \quad \text{para } t_2 > 0,$$

que es la densidad de una variable $\Gamma(2, \lambda)$.

d) Para $0 < t_1 < t_2$ la densidad condicional es

$$f_{\tau_1|\tau_2}(t_1|t_2) = \frac{f_{\tau_1,\tau_2}(t_1|t_2)}{f_{\tau_2}(t_2)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t_2}}{\lambda^2 t_2 e^{-\lambda t_2}} = \frac{1}{t_2}$$

que es la densidad de una distribución uniforme en $(0, t_2)$.