Modelos Estocásticos I

Primer Examen Parcial

Respuestas

1. Sea X el número de **fracasos** que ocurren hasta obtener el primer éxito en una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito α.

   a) Halle la función generadora de probabilidad de X y con ella obtenga la media y varianza de X.

   b) Sea N el número de veces que una persona visita una tienda en un año y suponga que N sigue la distribución de la parte (a), pero con probabilidad de éxito igual a $1-\theta$. Durante cada visita la persona compra algo con probabilidad p. Supongamos que en las distintas visitas que realiza la persona las compras son independientes y también son independientes del número de visitas que la persona realiza a la tienda. Sea S el número de veces que la persona compra algo de la tienda durante un año. Usando funciones generadoras de probabilidad demuestre que S tiene la misma distribución que N pero con el parámetro θ cambiado por $Q = p\theta/(1-q\theta)$, donde $q = 1-p$. ¿Cuál es el valor esperado del número de veces que la persona compra algo en la tienda durante un año?

   Respuesta. a) Llamemos $\beta = 1-\alpha$, la función de probabilidad de X es $P(X = k) = \alpha(1-\alpha)^k = \alpha\beta^k$, para $k \geq 0$ y la f.g.p. correspondientes es

$$\begin{aligned}\phi_X(s) = \mathrm{E}(s^X) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \alpha\beta^k \\ &= \frac{\alpha}{1-\beta s}\end{aligned}$$

   Para obtener la media de esta distribución derivamos esta expresión

$$\phi'(s) = \frac{\alpha\beta}{(1-\beta s)^2}$$

   y evaluamos el resultado en $s = 1$,

$$\phi'(1) = \frac{\alpha\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

   Por lo tanto $\mathrm{E}(X) = \beta/\alpha$. Hallamos ahora la segunda derivada de ϕ

$$\phi'(s) = \frac{2\alpha\beta^2}{(1-\beta s)^3}$$

   Evaluando esta expresión en $s = 1$ obtenemos el segundo momento factorial $\mathrm{E}(X(X-1))$:

$$\phi''(1) = \frac{2\alpha\beta^2}{(1-\beta)^3} = \frac{2\beta^2}{\alpha^2}.$$

   Por lo tanto

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X) = \frac{2\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta(\beta+\alpha)}{\alpha^2}\\ &= \frac{\beta}{\alpha^2}\end{aligned}$$

(b) Cambiando α por $1-\theta$ obtenemos la f.g.p. de N:

$$\phi_N(s) = \frac{1-\theta}{1-\theta s}$$

y la f.g.p. de una variable Bernoulli es $\phi_B(s) = q + ps$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi_S(s) = \phi_N(\phi_B(s)) &= \frac{1-\theta}{1-\theta(q+ps)}\\ &= \frac{(1-\theta)/(1-\theta q)}{(1-\theta q-\theta ps)/(1-\theta q)}\\ &= \frac{\frac{1-\theta q+\theta q-\theta}{1-\theta q}}{1-\frac{\theta ps}{1-\theta q}} = \frac{1-\frac{\theta(1-q)}{1-\theta q}}{1-Qs}\\ &= \frac{1-Q}{1-Qs}\end{aligned}$$

donde $Q = \theta p/(1-\theta q)$. Por los resultados de la primera parte, el valor esperado de S es $Q/(1-Q) = \theta p/(1-\theta)$.

2. Sean X, Y v.a. con densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)}, & 0 < x < \infty, 0 \le y \le x\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

¿Son independientes estas variables? Halle la densidad condicional de X dado Y. Calcule $\mathrm{E}[X|Y=y]$ y $\mathrm{E}[X|Y]$.

Respuesta. Buscamos la densidad marginal de Y integrando la densidad conjunta respecto de x. Observamos que para y fijo, la densidad es distinta de 0 para $x \ge y$.

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^{\infty} 4y(x-y)e^{-(x+y)}\,dx\\ &= 4ye^{-y}\int_y^{\infty} xe^{-x}\,dx - 4y^2e^{-y}\int_y^{\infty} e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

La primera integral se puede calcular integrando por partes y la segunda es inmediata. Obtenemos para $y \ge 0$

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= 4ye^{-y}\big(ye^{-y} + e^{-y}\big) - 4y^2e^{-2y}\\ &= 4ye^{-2y}\end{aligned}$$

Si las variables fuesen independientes, la densidad conjunta tendría que ser el producto de las densidades marginales, pero si dividimos la densidad conjunta por la densidad de Y que acabamos de calcular, el resultado todavía depende de y y pro lo tanto las variables no son independientes.

Para hallar la densidad condicional de X dado Y dividimos la densidad conjunta por la densidad de Y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4y(x-y)e^{-(x+y)}}{4ye^{-2y}} = (x-y)e^{-(x-y)}$$

para $x > y \geq 0$. Haciendo el cambio de variables $x - y = w$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X|Y=y] &= \int_y^\infty x(x-y)e^{-(x-y)}\,dx = \int_0^\infty (w+y)we^{-w}\,dw \\ &= \int_0^\infty w^2 e^{-w}\,dw + y\int_0^\infty we^{-w}\,dw \\ &= 2 + y, \end{aligned}$$

donde las dos últimas integrales fueron calculadas por partes. En consecuencia $\mathrm{E}[X|Y = y] = 2 + y$ y $\mathrm{E}[X|Y] = 2 + Y$.

3. (a) Explique cómo funciona el método de rechazo para generar variables aleatorias discretas. Demuestre que el método produce variables con la distribución deseada.

   (b) Describa un algoritmo para simular valores de una variable aleatoria con la siguiente densidad:
   $$f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   Respuesta. Para la parte (a), ver notas del curso.

   (b) Una manera de hacer esto es usar el método de la transformada inversa. Calculamos la f.d. asociada a f:
   $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{e-1}\int_0^x e^t\,dt = \frac{e^x - 1}{e-1}.$$

   La función inversa de F es
   $$F^{-1}(x) = \log(x(e-1)+1)$$

   y por lo tanto basta generar una variable uniforme U en $(0,1)$ y calcular $\log(U(e-1)+1)$.

4. Demuestre que, para una sucesión de variables aleatorias X_n definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, convergencia en L^p implica convergencia en probabilidad y que convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución. Dé ejemplos que demuestren que las implicaciones recíprocas son falsas.

   Respuesta. Ver notas del curso.