Capítulo 3

Propiedades Asintóticas

3.1. Distribuciones Estacionarias

Definición 3.1 Sea $X_n, n \geq 1$, una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y matriz de transición P. Sea $\pi(i),\ i \in \mathcal{E}$, una distribución de probabilidad, es decir,

$$\pi(i) \geq 0, \quad \text{para todo } i \in \mathcal{E}, \qquad \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi(i) = 1.$$

Si

$$\sum_i \pi(i) P(i,j) = \pi(j), \quad j \in \mathcal{E}, \tag{3.1}$$

decimos que π es una *distribución estacionaria* o una *medida invariante* para la cadena X_n.

Para una cadena con espacio de estados finito, observamos que si P es la matriz de transición y π es el vector que representa la distribución estacionaria, podemos escribir matricialmente la relación (3.1) como $\pi' P = \pi$, donde π es un vector columna y π' es su traspuesto.

Dada una cadena de Markov, no siempre es posible encontrar una distribución estacionaria, como veremos más adelante.

Sea π una distribución estacionaria, entonces, usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned}
\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(2)} &= \sum_i \pi(i) \sum_k P_{ik} P_{kj} \\
&= \sum_k \big(\sum_i \pi(i) P_{ik}\big) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi(k) P_{kj} = \pi(j).
\end{aligned}$$

De manera similar, por inducción obtenemos que para todo n,

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad j \in \mathcal{E}. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, si la distribución del estado inicial X_0 es π, (3.2) implica que para todo n,

$$P(X_n = j) = \pi(j), \quad j \in \mathcal{E},$$

y en consecuencia la distribución de X_n es independiente de n. Esto quiere decir que la distribución estacionaria representa una distribución de equilibrio del proceso: si el proceso se inicia con una distribución estacionaria entonces es estrictamente estacionario.

Supongamos ahora que la distribución de X_n es independiente de n, entonces la distribución inicial π_0 debe satisfacer

$$\pi_0(j) = P(X_0 = j) = P(X_1 = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}$$

y en consecuencia π_0 satisface la condición (3.1) de una distribución estacionaria. Resumiendo, la distribución de X_n es independiente de n si y sólo si la distribución inicial es una distribución estacionaria.

Ejemplo 3.1
Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Veamos que esta cadena tiene una única distribución estacionaria π. La relación que debe satisfacer esta distribución es $\pi P = \pi$, es decir,

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos las tres ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} &= \pi_0, \\ \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} &= \pi_1, \\ \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} &= \pi_2, \end{aligned}$$

junto con la condición adicional de que el vector π represente una distribución de probabilidad, es decir

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$\pi_0 = \frac{6}{25}, \qquad \pi_1 = \frac{2}{5}, \qquad \pi_2 = \frac{9}{25},$$

que son positivos y satisfacen las cuatro ecuaciones, de modo que representan la única distribución estacionaria para la cadena. ▲

Dada una cadena de Markov, supongamos ahora que existe una distribución ν tal que para todo $i \in \mathcal{E}$,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \nu(j), \quad j \in \mathcal{E}. \tag{3.3}$$

Entonces la distribución de X_n se aproxima a ν cuando $n \to \infty$, sin importar cual sea la distribución inicial de la cadena. En este caso decimos que la cadena tiene una distribución asintótica.

Supongamos que (3.3) vale y sea π_0 la distribución inicial de la cadena, entonces

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^{(n)}.$$

Suponiendo que podemos intercambiar límites con sumas infinitas, haciendo $n \to \infty$ y usando (3.3) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i)\nu(j),$$

y como $\sum_i \pi_0(i) = 1$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \nu(j), \quad j \in \mathcal{E}. \tag{3.4}$$

Esta fórmula indica que, sin importar cual sea la distribución inicial, para valores grandes de n la distribución de X_n es aproximadamente igual a la distribución asintótica ν.

Si la cadena tiene una distribución estacionaria π entonces, necesariamente, $\pi = \nu$, porque podemos iniciar la cadena con la distribución π y entonces

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad j \in S.$$

Comparando con (3.4) vemos que ambas distribuciones tienen que coincidir.

Por lo tanto, de acuerdo a este argumento, si una cadena de Markov tiene una distribución estacionaria y una distribución asintótica, ambas deben coincidir.

Teorema 3.1 *Sea $X = \{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con espacio de estados finito y matriz de transición P. Supongamos que para algún $i \in \mathcal{E}$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} := \pi(j), \qquad \forall j \in \mathcal{E}, \tag{3.5}$$

Entonces, el vector $(\pi(j), j \in E)$ es un vector de probabilidad invariante.

Demostración. Es inmediato que $0 \leq \pi(j) \leq 1$, para todo $j \in \mathcal{E}$ pues esto se vale para las potencias de la matriz de transición P, $0 \leq P_{i,j}^{(n)} \leq 1$, para todo $n \geq 1$ y $i, j \in \mathcal{E}$. Veamos que en efecto π es un vector de probabilidad, puesto que $\mathcal{E}$ es finito los siguientes intercambios de suma y límite los podemos hacer sin correr riesgo a equivocación

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi(j) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\mathcal{E}} P_{i,j}^{(n)} = 1.$$

Para finalizar veamos que π es un vector de probabilidad invariante. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov tenemos que para todo $j \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
\pi(j) &= \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{E}} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{E}} \lim_{n\to\infty} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j} = \sum_{k\in\mathcal{E}} \pi(k) P_{k,j}
\end{aligned}$$

■

Observación 3.1

1. Observemos que en el teorema anterior se tiene que $\pi(k) > 0$ para algún $k \in \mathcal{E}$ pues π es un vector de probabilidad. En el caso en que $\mathcal{E}$ es infinito esto no se puede garantizar. Por ejemplo tomemos una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ infinito y tal que todos sus estados son transitorios, como la caminata aleatoria no simétrica. Puesto que todos los estados son transitorios se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0 = \pi(j), \qquad \forall j \in \mathcal{E}.$$
El vector π es sin duda invariante, $0P = 0$, pero no es un vector de probabilidad pues la suma de sus entradas es 0.

2. En el enunciado del teorema no se pide que la relación (3.5) se cumpla para todos los estados iniciales $i \in \mathcal{E}$, se pide que el límite exista para algún $i \in \mathcal{E}$. Si este límite existe para todo $i \in \mathcal{E}$ y no depende del valor incial, entonces π es a la vez, una distribución asintótica y una distribución estacionaria, y por lo tanto es única. Sin embargo, hay casos en los cuales la distribución límite depende del estado inciial.

3.2. Visitas a un Estado Recurrente

Veamos qué cosas pueden ocurrir para que una cadena no tenga distribución asintótica. Consideremos una cadena de Ehrenfest con tres bolas. En este caso la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la matriz de transición en dos pasos, la disposición de los ceros en la matriz cambia,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Para ver que esta situación se mantiene para valores mayores de n, observamos que si inicialmente tenemos un número impar de bolas en la caja de la izquierda, no importa si añadimos o quitamos una, el resultado será un número par. De manera similar, si hay un número par de bolas inicialmente, en el próximo paso habrá un número impar. Esta situación de alternancia entre números pares e impares indica que es imposible regresar al estado inicial después de un número impar de pasos, es decir, si n es impar, $P_{ii}^n = 0$ para todo i.

Hay una manera de manejar esta situación en la cual no existe el límite de P_{ij}^n cuando $n \to \infty$. Sea a_n, $n \geq 0$, una sucesión de números. Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \tag{3.6}$$

para algún L finito, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = L. \tag{3.7}$$

Si (3.7) es cierto decimos que (a_n) converge a L en el sentido de Cesáro. Este tipo de convergencia es más general que la convergencia usual: es posible que (3.7) sea cierta sin que lo sea (3.6). Por ejemplo, si $a_n = 0$ para n par y $a_n = 1$ para n impar, entonces la sucesión no tiene límite cuando $n \to \infty$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = \frac{1}{2}.$$

Veremos a continuación que para cualquier par de estados i, j de cualquier cadena de Markov, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)}$$

existe.

Recordemos que $N_n(j) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_j(X_m)$ representa el número de visitas de la cadena al estado j durante $m = 1, \dots, n$. El valor esperado del número de visitas para una cadena que comienza en i está dado por

$$\mathrm{E}_i[N_n(j)] = G_n(i,j) = \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)}.$$

Sea j un estado transitorio, entonces hemos visto que $\lim_{n\to\infty} N_n(j) = N(j) < \infty$ con probabilidad 1, y $\lim_{n\to\infty} G_n(i,j) = G(i,j) < \infty$ para todo $i \in \mathcal{E}$. En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = 0 \quad \text{con probabilidad 1,}$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(i,j)}{n} = 0 \quad \text{para todo } i \in \mathcal{E}. \tag{3.8}$$

Observamos que $N_n(j)/n$ es la proporción de las primeras n unidades de tiempo que la cadena está en el estado j y que $G_n(i,j)/n$ es el valor esperado de esta proporción para una cadena que comienza en i.

Sea ahora j un estado recurrente y llamemos $m_j = \mathrm{E}_j[T_j]$ al tiempo medio de regreso a j para una cadena que comienza en j, si este tiempo de regreso tiene esperanza finita, y ponemos $m_j = \infty$ si no.

Para probar el próximo teorema, necesitamos la Ley Fuerte de los Grandes Números y el Teorema de Convergencia Acotada:

Teorema 3.2 (Ley Fuerte de los Grandes Números) *Sea ξ_i, $i \geq 1$ una sucesión de v.a.i.i.d. Si estas variables tienen media finita μ, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \mu$$

con probabilidad 1. Si $\xi_i \geq 0$ y las variables no tienen esperanza finita, el resultado vale si ponemos $\mu = +\infty$.

Teorema 3.3 (Teorema de Convergencia Acotada) *Sea ξ_i, $i \geq 1$, una sucesión de v.a. Si existe una constante K tal que $|\xi_i| < K$ para todo $i \geq 1$, y si $\xi_i \to \xi$ cuando $i \to \infty$, entonces $\mathrm{E}(\xi_i) \to \mathrm{E}(\xi)$.*

Sea X_n, $n \geq 1$ una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias que comienza en un estado recurrente j. Con probabilidad 1 la cadena regresa a j infinitas veces. Para $r \geq 1$ sea T_j^r el instante de la r-ésima visita a j:

$$T_j^r = \min\{n \geq 1 : N_n(j) = r\}.$$

Ponemos $W_j^1 = T_j^1 = T_j$ y para $r \geq 2$ sea $W_j^r = T_j^r - T_j^{r-1}$, el tiempo de espera entre la $(r-1)$-ésima visita a j y la r-ésima visita. Claramente,

$$T_j^r = W_j^1 + \cdots + W_j^r.$$

Lema 3.1 *Sea X_n, $n \geq 1$ una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias que comienza en un estado recurrente j. Las variables W_j^r, $r \geq 1$, son i.i.d.*

Demostración. Veamos en primer lugar que

$$P_j(W_j^{r+1} = z_{r+1} | W_j^1 = z_1, \dots, W_j^r = z_r) = P_j(W_j^1 = z_{r+1}). \tag{3.9}$$

Definimos $t_1 = z_1$, $t_i = t_{i-1} + z_i = \sum_{q=1}^{i} z_q$ para $1 \leq i \leq r+1$ y sea

$$A_r = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$$

el conjunto de los instantes en los cuales el proceso realiza las primeras r visitas al estado j. Por lo tanto, para $1 \leq s \leq t_r$, $X_s = j$ si $s \in A_r$, $X_s \neq j$ si $s \notin A_r$.

Usando esta notación vemos que el evento

$$\{W_j^1 = z_1,\ W_j^2 = z_2, \dots, W_j^r = z_r\}$$

se puede escribir como

$$\{X_s = j \text{ para } s \in A_r,\ X_s \neq j \text{ para } s \notin A_r,\ 1 \leq s \leq t_r\}.$$

Por lo tanto el lado izquierdo de (3.9) es ahora

$$\begin{aligned} P_j(X_{t_{r+1}} = j,\ X_s \neq j \text{ para } t_r + 1 \leq s < t_{r+1} | X_s = j \text{ para } s \in A_r,& \\ X_s \neq j \text{ para } s \notin A_r,\ 1 \leq s \leq t_r),& \end{aligned}$$

por la propiedad de Markov esto es

$$P_j(X_{t_{r+1}} = j,\ X_s \neq j \text{ para } t_r + 1 \leq s < t_{r+1} | X_{t_r} = j)$$

y teniendo en cuenta la definición de los t_i y la homogeneidad de la cadena, esto es igual a

$$P_j(W_j^1 = z_{r+1})$$

de modo que hemos probado (3.9).

Ahora, por inducción, se prueba fácilmente que

$$P_j(W_j^1 = z_1, \dots, W_j^r = z_r) = P_j(W_j^1 = z_1) \cdots P_j(W_j^r = z_r),$$

y esto muestra que las variables W_j^k son independientes. Para ver que todas tienen la misma distribución veamos la distribución de W_j^2:

$$\begin{aligned} P_j(W_j^2 = z) &= \sum_{s=1}^{\infty} P_j(W_j^2 = z | W_j^1 = s) P(W_j^1 = s) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} P_j(W_j^1 = z) P(W_j^1 = s) = P_j(W_j^1 = z) \end{aligned}$$

y el resultado se obtiene por inducción. ■

Teorema 3.4 *Sea j un estado recurrente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{\mathbf{1}_{\{T_j<\infty\}}}{m_j} \quad \textit{con probabilidad } 1, \tag{3.10}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(i,j)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)} = \frac{\rho_{ij}}{m_j} \quad \textit{para todo } i \in \mathcal{E}. \tag{3.11}$$

Demostración. Consideremos una cadena de Markov que comienza en un estado recurrente j. Con probabilidad 1 regresa a j infinitas veces. Por el lema 3.1, las variables $W_j^1, W_j^2, \dots$ son i.i.d. y tienen media común $\mathrm{E}_j(W_j^1) = E_j(T_j) = m_j$. Por la LFGN tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(W_j^1 + W_j^2 + \cdots + W_j^k) = m_j \quad \text{c. p. 1},$$

es decir, que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_j^k}{k} = m_j \quad \text{c. p. 1.} \tag{3.12}$$

Sea $N_n(j) = k$, entonces, al instante n la cadena ha hecho exactamente k visitas a j. Por lo tanto, la visita k ocurre en o antes del instante n, mientras que la visita $k+1$ ocurre después de n. Esto lo expresamos en la siguiente desigualdad

$$T_j^{N_n(j)} \leq n < T_j^{N_n(j)+1},$$

y por lo tanto,

$$\frac{T_j^{N_n(j)}}{N_n(j)} \leq \frac{n}{N_n(j)} < \frac{T_j^{N_n(j)+1}}{N_n(j)},$$

siempre que $N_n(j) \geq 1$. Como $N_n(j) \to \infty$ con probabilidad 1 cuando $n \to \infty$, estas desigualdades y (3.12) implican que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{N_n(j)} = m_j \quad \text{c. p. 1.}$$

Sea, de nuevo, j un estado recurrente pero supongamos ahora que X_0 tiene distribución arbitraria, entonces es posible que la cadena nunca llegue a j. Si llega, el argumento anterior es válido y (3.10) es cierta. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{\mathbf{1}_{\{T_j<\infty\}}}{m_j} \quad c.p.1.$$

Por definición $0 \leq N_n(j) \leq n$, y en consecuencia

$$0 \leq \frac{N_n(j)}{n} \leq 1.$$

Usando el Teorema de Convergencia Acotada tenemos

$$\lim_{n\to\infty} E_i\Big[\frac{N_n(j)}{n}\Big] = E_i\Big[\frac{\mathbf{1}_{\{T_j<\infty\}}}{m_j}\Big] = \frac{P_i(T_j < \infty)}{m_j} = \frac{\rho_{ij}}{m_j}$$

y por lo tanto (3.11) vale. ■

El teorema anterior tiene la siguiente interpretación. Supongamos que estamos considerando una cadena de Markov irreducible y finita, de modo que todos los estados son recurrentes y se comunican. Entonces, con probabilidad 1 todos los estados serán visitados y $\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = 1$ para cualesquiera i, j. Por lo tanto, el tiempo promedio que la cadena pasa en el estado j cuando n es grande es, aproximadamente, $1/m_j = 1/\operatorname{E}_j(T_j)$, es decir, el inverso del tiempo medio de retorno.

Ejemplo 3.2 (Cadena con dos estados)
Consideremos una cadena de Markov con dos estados posibles y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $0 < \alpha, \beta \leq 1$, entonces tenemos una fórmula explícita para las potencias de la matriz de transición

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + (1-\alpha-\beta)^n \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}\right].$$

Si $\alpha + \beta < 2$, haciendo $n \to \infty$ el factor $(1-\alpha-\beta)^n \to 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo tenemos convergencia de las potencias de las probabilidades de transición P_{ij}^n cuando $n \to \infty$ y como consecuencia también hay convergencia en el sentido de Cesáro.

En el caso límite $\alpha = \beta = 1$, la cadena sigue siendo recurrente, pero ahora no hay convergencia de P_{ij}^n cuando $n \to \infty$ ya que

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^m = \frac{1}{2},$$

que es consistente con el resultado anterior (si $\alpha = \beta = 1,\ \alpha/(\alpha+\beta) = 1/2$ para $i = 1, 2$).

Una interpretación de este resultado es que, a largo plazo, la cadena estará en el estado 1 una fracción de tiempo $\beta/(\alpha+\beta)$ y en el otro estado la fracción complementaria $\alpha/(\alpha+\beta)$. ▲

3.3. Estados Recurrentes

Definición 3.2 Un estado recurrente j es *recurrente nulo* si $m_j = \infty$.

Por el teorema 3.4 vemos que si j es recurrente nulo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(i,j)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{E}. \tag{3.13}$$

Es posible mostrar un resultado más fuerte: Si j es recurrente nulo entonces $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$ para $i \in \mathcal{E}$.

Definición 3.3 Un estado recurrente j es *recurrente positivo* si $m_j < \infty$.

Por el teorema 3.4 vemos que si j es recurrente positivo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(j,j)}{n} = \frac{1}{m_j} > 0.$$

Consideremos una cadena que comienza en un estado recurrente j. A partir del teorema 3.4 vemos que si j es recurrente nulo entonces, con probabilidad 1, la proporción del tiempo que la cadena está en el estado j durante las primeras n unidades de tiempo tiende a cero cuando $n \to \infty$, mientras que si j es recurrente positivo, con probabilidad 1 esta proporción tiende al límite positivo $1/m_j$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 3.5 *Sea i un estado recurrente positivo y supongamos que desde i podemos acceder a j. Entonces j es recurrente positivo.*

Demostración. Ya vimos que en este caso desde j también se accede a i. Por lo tanto existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que

$$P_{ji}^{(n_1)} > 0 \quad \text{y} \quad P_{ij}^{(n_2)} > 0.$$

Tenemos

$$P_{jj}^{(n_1+m+n_2)} \geq P_{ji}^{(n_1)} P_{ii}^{(m)} P_{ij}^{(n_2)},$$

sumando sobre $m = 1, 2, \dots, n$ y dividiendo por n concluimos que

$$\frac{1}{n}(G_{n_1+n+n_2}(j,j) - G_{n_1+n_2}(j,j)) \geq P_{ji}^{(n_1)} P_{ij}^{(n_2)} \frac{1}{n} G_n(i,i).$$

Haciendo $n \to \infty$, el lado izquierdo de la desigualdad converge a $1/m_j$ y el lado derecho converge a

$$\frac{P_{ji}^{(n_1)} P_{ij}^{(n_2)}}{m_i}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{m_j} \geq \frac{P_{ji}^{(n_1)} P_{ij}^{(n_2)}}{m_i} > 0,$$

y en consecuencia $m_j < \infty$. Esto muestra que j es recurrente positivo. ∎

A partir de este teorema y los resultados que vimos anteriormente, sabemos ahora que si $C \subset \mathcal{E}$ es un conjunto cerrado e irreducible, entonces o bien todos los estados de C son transitorios o todos son recurrentes nulos o todos son recurrentes positivos.

Si $C \subset \mathcal{E}$ es finito y cerrado, entonces tiene al menos un estado recurrente positivo: Como

$$\sum_{j \in C} P_{ij}^{(m)} = 1, \quad i \in C,$$

sumando sobre $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n obtenemos que

$$\sum_{j \in C} \frac{G_n(i,j)}{n} = 1, \quad i \in C.$$

Si C es finito y todos los estados de C fuesen transitorios o recurrentes nulos, entonces (3.8) valdría y tendríamos

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j \in C} \frac{G_n(i,j)}{n} = \sum_{j \in C} \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(i,j)}{n} = 0$$

lo cual es una contradicción.

Teorema 3.6 *Sea $C \subset \mathcal{E}$ finito, cerrado e irreducible. Entonces todos los estados de C son recurrentes positivos.*

Demostración. Como C es finito y cerrado, hay al menos un estado recurrente positivo. Como es irreducible, todos los estados se comunican y por el teorema 3.5 deben ser recurrentes positivos. ∎

Corolario 3.1 *Una cadena de Markov irreducible con un número finito de estados es recurrente positiva.*

Corolario 3.2 *Una cadena de Markov con un número finito de estados no tiene estados recurrentes nulos.*

Demostración. Si j es un estado recurrente, está contenido en un conjunto cerrado e irreducible C de estados recurrentes. Como C es finito, por el teorema anterior todos los estados en C, incluyendo a j, son recurrentes positivos. Por lo tanto no hay estados recurrentes nulos. ∎

3.4. Existencia y Unicidad de Distribuciones Estacionarias.

Vamos a necesitar la siguiente versión del Teorema de Convergencia Acotada para series.

Teorema 3.7 (Teorema de Convergencia Acotada) *Sea $a_i \geq 0$, $i \in \mathcal{E}$, una sucesión de números con $\sum a_i < \infty$ y sean $b_{i,n}$, $i \in \mathcal{E}$ y $n \geq 1$ tales que $|b_{i,n}| \leq 1$ para $i \in \mathcal{E}$ y $n \geq 1$, y*

$$\lim_{n\to\infty} b_{i,n} = b_i,$$

para todo $i \in \mathcal{E}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i a_i b_{i,n} = \sum_i a_i b_i.$$

Sea π una distribución estacionaria y sea $m \in \mathbb{N}$. Por la ecuación (3.2) tenemos

$$\sum_k \pi(k) P_{ki}^{(m)} = \pi(i), \quad i \in \mathcal{E}.$$

Sumando sobre $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n concluimos que

$$\sum_k \pi(k) \frac{G_n(k,i)}{n} = \pi(i), \quad i \in \mathcal{E}. \tag{3.14}$$

Teorema 3.8 *Sea π una distribución estacionaria. Si i es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces $\pi(i) = 0$.*

Demostración. Si i es un estado transitorio o recurrente nulo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(k,i)}{n} = 0, \quad k \in \mathcal{E} \tag{3.15}$$

por (3.8) y (3.13). Por las ecuaciones (3.14) y (3.15) y el teorema 3.7,

$$\pi(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \pi(k) \frac{G_n(k,i)}{n} = 0.$$

■

Como consecuencia del teorema anterior vemos que una cadena sin estados recurrentes positivos no tiene una distribución estacionaria.

Teorema 3.9 *Una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria dada por*

$$\pi(i) = \frac{1}{m_i}, \quad i \in \mathcal{E}. \tag{3.16}$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso en el cual el espacio de estados $\mathcal{E}$ es finito. De las hipótesis del teorema y del teorema 3.4 vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(k,i)}{n} = \frac{1}{m_i}, \quad i, k \in \mathcal{E}. \tag{3.17}$$

Supongamos que π es una distribución estacionaria. A partir de la ecuaciones (3.14), (3.17) y el teorema 3.7 vemos que

$$\pi(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \pi(k) \frac{G_n(k,i)}{n} = \frac{1}{m_i} \sum_k \pi(k) = \frac{1}{m_i}.$$

Por lo tanto, si el proceso tiene una distribución estacionaria, debe estar dada por (3.16).

Para completar la demostración del teorema tenemos que mostrar que la función $\pi(i)$, $i \in \mathcal{E}$ definida por (3.16) es una distribución estacionaria. Es claro que es no-negativa, así que sólo tenemos que verificar que

$$\sum_i \frac{1}{m_i} = 1 \tag{3.18}$$

y que

$$\sum_i \frac{1}{m_i} P_{ij} = \frac{1}{m_j}, \quad j \in \mathcal{E}. \tag{3.19}$$

Observemos inicialmente que

$$\sum_i P_{ki}^{(m)} = 1.$$

Sumando sobre $m = 1, \dots, n$ y dividiendo por n, concluimos que

$$\sum_i \frac{G_n(k,i)}{n} = 1, \quad k \in \mathcal{E}. \tag{3.20}$$

Si $\mathcal{E}$ es finito, haciendo $n \to \infty$ en (3.20) y usando (3.17), obtenemos que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_i \frac{G_n(k,i)}{n} = \sum_i \frac{1}{m_i},$$

es decir, que (3.18) vale.

Por otro lado, por la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$\sum_i P_{ki}^{(m)} P_{ij} = P_{kj}^{(m+1)}.$$

Sumando de nuevo sobre $m = 1, \dots n$ y dividiendo por n, obtenemos que

$$\sum_i \frac{G_n(k,i)}{n} P_{ij} = \frac{G_{n+1}(k,j)}{n} - \frac{P_{kj}}{n}. \tag{3.21}$$

Haciendo $n \to \infty$ en (3.21) concluimos que (3.19) vale. Esto completa la demostración cuando $\mathcal{E}$ es finito. ■

A partir de los dos últimos teoremas obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.3 *Una cadena de Markov irreducible es recurrente positiva sí y sólo sí tiene una distribución estacionaria.*

Corolario 3.4 *Si una cadena de Markov con espacio de estados finito es irreducible, tiene una única distribución estacionaria.*

Corolario 3.5 *Consideremos una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva con distribución estacionaria π. Entonces con probabilidad 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(i)}{n} = \pi(i), \quad i \in \mathcal{E}. \tag{3.22}$$

Ejemplo 3.3 (Cadena con dos estados)
Consideremos una cadena de Markov con dos estados posibles y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

donde $0 < \alpha, \beta < 1$, $i = 1, 2$. Las ecuaciones para hallar la distribución estacionaria son

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\pi_1 + \beta\pi_2 &= \pi_1 \\ \alpha\pi_1 + (1-\beta)\pi_2 &= \pi_2 \end{aligned}$$

que son la misma ecuación. Tenemos además la condición para que π sea una distribución de probabilidad: $\pi_1 + \pi_2 = 1$. La solución es

$$\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

que coincide con la distribución asintótica que hallamos en el ejemplo 3.2. ▲

3.5. Cadenas Reducibles

Definición 3.4 Sea π una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{E}$ y sea $C \subset \mathcal{E}$. Decimos que π está concentrada en C si $\pi(i) = 0$ siempre que $i \notin C$.

Los resultados que hemos demostrado anteriormente implican el siguiente teorema.

Teorema 3.10 *Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes positivos. Entonces la cadena de Markov tiene una única distribución estacionaria π concentrada en C que está dada por*

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{1}{m_i}, & \text{si } i \in C, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \tag{3.23}$$

Supongamos ahora que C_0 y C_1 son dos conjuntos distintos, cerrados e irreducibles de estados recurrentes positivos. Por el teorema anterior sabemos que la cadena tiene una distribución estacionaria π_0 concentrada en C_0 y otra distribución estacionaria π_1 concentrada en C_1. Entonces, es posible demostrar que las distribuciones π_α, definidas para $0 \leq \alpha \leq 1$ por

$$\pi_\alpha(i) = (1-\alpha)\pi_0(i) + \alpha\pi_1(i), \quad i \in \mathcal{E},$$

son distribuciones estacionarias distintas. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado,

Corolario 3.6 *Sea $\mathcal{E}_P$ el conjunto de los estados recurrentes positivos de una cadena de Markov.*

1. *Si $\mathcal{E}_P$ es vacío, la cadena no tiene ninguna distribución estacionaria.*

2. *Si $\mathcal{E}_P$ es un conjunto irreducible no vacío, la cadena tiene una única distribución estacionaria.*

3. *Si $\mathcal{E}_P$ no es vacío pero tampoco es irreducible, la cadena tiene un número infinito de distribuciones estacionarias distintas.*

Ejemplo 3.4 (Cadena con dos estados)
Consideremos de nuevo la cadena de Markov con dos estados y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

y supongamos ahora que $\alpha = \beta = 0$, de modo que P es la matriz identidad. El espacio de estados tiene ahora dos conjuntos cerrados irreducibles: $\{0\}$ y $\{1\}$ y hay una distribución estacionaria concentrada en cada uno de ellos: Para $\{0\}$ es $(1,0)$ mientras que para $\{1\}$ es $(0,1)$. Cualquier combinación convexa de ellas es también una distribución estacionaria de la cadena y por lo tanto hay infinitas distribuciones estacionarias. ▲

3.6. Convergencia a la Distribución Estacionaria

Hasta ahora hemos visto que si X_n, $n \geq 0$ es una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva con distribución estacionaria π, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(i,j)}{n} = \pi(j), \quad i,j \in \mathcal{E}.$$

Estudiaremos en esta sección cuándo vale el resultado más fuerte

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad i,j \in \mathcal{E}$$

y qué ocurre cuando no vale.

Definición 3.5 Sea i un estado de la cadena con $P_{ii}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 1$, es decir, tal que $\rho_{ii} = P_i(T_i < \infty) > 0$. Llamemos $\mathcal{C}_i = \{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$. Definimos el *período* del estado i, d_i o $d(i)$ por

$$d_i = m.c.d.\ \{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\} = m.c.d.\ \mathcal{C}_i,$$

donde $m.c.d.$ denota al máximo común divisor del conjunto.

Como consecuencia de la definición tenemos que

$$1 \leq d_i \leq \min \mathcal{C}_i.$$

y si $P_{ii} > 0$, entonces $d_i = 1$.

Lema 3.2 *Si i y j son dos estados que se comunican, entonces $d_i = d_j$.*

Demostración. Para ver esto sean n_1 y n_2 enteros positivos tales que

$$P_{ij}^{(n_1)} > 0 \quad \text{y} \quad P_{ji}^{(n_2)} > 0.$$

Entonces

$$P_{ii}^{(n_1+n_2)} \geq P_{ij}^{(n_1)} P_{ji}^{(n_2)} > 0,$$

y por lo tanto d_i divide a $n_1 + n_2$. Si $n \in \mathcal{C}_j$ tenemos que $P_{jj}^n > 0$ y en consecuencia

$$P_{ii}^{(n_1+n+n_2)} \geq P_{ij}^{(n_1)} P_{jj}^{(n)} P_{ji}^{(n_2)} > 0,$$

de modo que d_i es divisor de $n_1 + n + n_2$. Como d_i es divisor de $n_1 + n_2$ también debe ser divisor de n. Por lo tanto d_i es divisor de todos los números en el conjunto $\mathcal{C}_j$. Como d_j es el mayor de todos esos divisores, concluimos que $d_i \leq d_j$. De manera similar se muestra que $d_j \leq d_i$ y en consecuencia $d_1 = d_j$. ■

Hemos mostrado que los estados en una cadena de Markov irreducible tienen período común d.

Definición 3.6 Decimos que una cadena irreducible es *periódica* con período d si $d > 1$ y *aperiódica* si $d = 1$.

Una condición suficiente sencilla para que una cadena irreducible sea aperiódica es que $P_{ii} > 0$ para algún $i \in \mathcal{E}$.

Ejemplo 3.5
Consideremos una cadena con matriz de transición

	−2	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**
−2	0	0	1	0	0	0
−1	1	0	0	0	0	0
0	0	0.5	0	0.5	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0

Veamos el diagrama de transiciones para esta cadena

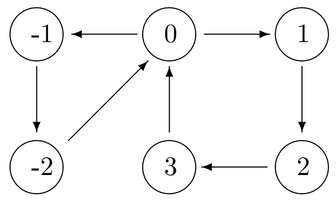

Figura 3.1

Considerando el estado 0, hay dos maneras de regresar a él: $0 \to -1 \to -2 \to 0$, que requiere tres pasos, y $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$, que requiere 4. Por lo tanto 3 y 4 están en $\mathcal{C}_0$ y el m.c.d. de este conjunto es 1. En consecuencia esta cadena es aperiódica. ▲

Ejemplo 3.6 (Paseo al azar simple con barreras reflectoras)
Consideremos un paseo al azar simple con barreras reflectoras en los extremos 0 y $N = 4$. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Vemos que todos los estados de esta cadena se comunican y que $P_{00} > 0$, de modo que 0 tiene período 1 y, en consecuencia, todos los otros estados también.

▲

Teorema 3.11 *Sea X_n, $n \geq 0$, una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva con distribución estacionaria π. Si la cadena es aperiódica,*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad i, j \in \mathcal{E}. \tag{3.24}$$

Si la cadena es periódica con período d, entonces para cada par de estados i, j en $\mathcal{E}$ existe un entero r, $0 \leq r < d$, tal que $P_{ij}^{(n)} = 0$ a menos que $n = md + r$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{m\to\infty} P_{ij}^{(md+r)} = d\pi(j), \quad i, j \in \mathcal{E}. \tag{3.25}$$

Demostración. Ver Hoel, Port & Stone, pags. 75-79.

■

Ejemplo 3.7
En el problema 7 de la lista de problemas 7 se pedía calcular las potencias 2, 4, 8, 16, 17, 32 y 33 de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

La última de estas potencias es

$$P^{33} = \begin{pmatrix} 0.22353 & 0.56471 & 0.21177 \\ 0.22353 & 0.56471 & 0.21177 \\ 0.22353 & 0.56471 & 0.21177 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la distribución estacionaria para esta matriz, resolviendo el sistema de ecuaciones $\pi P = \pi$:

$$\begin{aligned}-0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 &= 0\\ 0.6\pi_1 - 0.5\pi_2 + 0.7\pi_3 &= 0\\ 0.3\pi_2 - 0.8\pi_3 &= 0\end{aligned}$$

y la ecuación adicional $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, obtenemos

$$\pi_1 = \frac{19}{85} = 0.22353; \quad \pi_2 = \frac{48}{85} = 0.56471; \quad \pi_3 = \frac{18}{85} = 0.21177.$$

Vemos que en este ejemplo no sólo hay convergencia a la distribución estacionaria, sino que esta convergencia ocurre rápidamente. ▲

3.7. Teorema Ergódico

Una versión más general de la ley fuerte para cadenas de Markov es el Teorema Ergódico, que presentamos a continuación.

Teorema 3.12 (Teorema Ergódico) *Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov irreducible, recurrente positiva y distribución estacionaria π. Sea $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, una función acotada, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) = \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi(i) f(i) = \mathrm{E}_\pi(f), \qquad \textit{c. p. 1.} \tag{3.26}$$

Demostración. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $|f| \leq 1$. Tenemos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) = \sum_{i\in\mathcal{E}} \frac{N_n(i)}{n} f(i).$$

Por lo tanto

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi(i) f(i)\Big| = \Big|\sum_{i\in\mathcal{E}} \big(\frac{N_n(i)}{n} - \pi(i)\big) f(i)\Big|$$

Para cualquier $S \subset \mathcal{E}$ tenemos

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi(i) f(i)\Big| &= \Big|\Big(\sum_{i\in S} + \sum_{i\notin S}\Big)\big(\frac{N_n(i)}{n} - \pi(i)\big) f(i)\Big|\\ &\leq \sum_{i\in S}\Big|\frac{N_n(i)}{n} - \pi(i)\Big| + \sum_{i\notin S}\Big|\frac{N_n(i)}{n} - \pi(i)\Big| \end{aligned} \tag{3.27}$$

Ahora bien, el segundo término en (3.27) es

$$\begin{aligned}\sum_{i\notin S}\Big|\frac{N_n(i)}{n} - \pi(i)\Big| &\leq \sum_{i\notin S}\frac{N_n(i)}{n} + \sum_{i\notin S}\pi(i) = 1 - \sum_{i\in S}\frac{N_n(i)}{n} + \sum_{i\notin S}\pi(i)\\ &= \sum_{i\in S}\pi(i) - \sum_{i\in S}\frac{N_n(i)}{n} + 2\sum_{i\notin S}\pi(i)\\ &\leq \sum_{i\in S}\Big|\pi(i) - \frac{N_n(i)}{n}\Big| + 2\sum_{i\notin S}\pi(i)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi(i)f(i)\Big| \leq 2\sum_{i\in S}\Big|\pi(i) - \frac{N_n(i)}{n}\Big| + 2\sum_{i\notin S}\pi(i)$$

Dado $\varepsilon > 0$ escogemos $S \subset \mathcal{E}$ finito de modo que $\sum_{i\notin S}\pi(i) < \varepsilon/4$ y luego escogemos $M(\omega)$ tal que, para todo $n \geq N(\omega)$,

$$\sum_{i\in S}\Big|\pi(i) - \frac{N_n(i)}{n}\Big| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto para $n \geq M(\omega)$ tenemos

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \sum_{i\in\mathcal{E}} \pi(i)f(i)\Big| \leq \varepsilon.$$

■

3.8. Ejemplos

Definición 3.7 Una matriz de transición P es *doblemente estocástica* si sus columnas suman 1, es decir, si

$$\sum_i P_{ij} = 1, \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}.$$

Para una matriz de transición doblemente estocástica, la distribución estacionaria es sencilla.

Teorema 3.13 *Si la matriz de transición P de una cadena de Markov con N estados es doblemente estocástica, entonces la distribución uniforme $\pi(i) = 1/N$ para todo i, es una distribución estacionaria.*

Demostración. Observamos que

$$\sum_i \pi(i)P_{ij} = \frac{1}{N}\sum_i P_{ij} = \frac{1}{N}$$

de modo que la distribución uniforme satisface la condición $\pi' P = \pi$ que define una distribución uniforme.

Vemos además, que si la distribución estacionaria es uniforme, necesariamente la matriz P es doblemente estocástica. ■

Ejemplo 3.8 (Paseo al azar simple con barreras reflectoras)
Consideremos de nuevo el paseo al azar simple simétrico con barreras reflectoras (ver ejemplo 3.6). Es inmediato en el caso particular $N = 4$ considerado antes que la matriz es doblemente estocástica, y en consecuencia $\pi(i) = 1/5$ es una distribución estacionaria. En general, si consideramos un paseo de este tipo con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, \dots, N\}$, la distribución estacionaria será $\pi(i) = 1/(N + 1)$. ▲

Ejemplo 3.9 (Paseo al azar en la circunferencia)
Colocamos $N + 1$ puntos, que llamamos $0, 1, \dots, N$ sobre la circunferencia. En cada paso la cadena se mueve a la derecha o a la izquierda un paso, con probabilidades respectivas p y $1 - p$, incluyendo los extremos 0 y N, es decir, la cadena pasa de N a 0 con probabilidad p y de 0 a N con probabilidad $1 - p$. Para el caso particular $N = 4$ la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que todas las columnas suman 1, y lo mismo es cierto en el caso general, de modo que la distribución estacionaria es uniforme $\pi(i) = 1/(N + 1)$. ▲

3.8.1. Cadenas de Nacimiento y Muerte

En el capítulo anterior consideramos las cadenas de Nacimiento y Muerte. A continuación queremos obtener una condición que nos permita determinar, en el caso de una cadena irreducible con espacio de estados infinito, cuándo la cadena es transitoria y cuándo es recurrente. Consideraremos cadenas de nacimiento y muerte irreducibles sobre los enteros no-negativos, por lo tanto

$$p_i > 0 \quad \text{para } i \geq 0, \qquad q_i > 0 \quad \text{para } i \geq 1.$$

Hemos visto que

$$P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j}, \quad n > 1, \tag{3.28}$$

con $\gamma_j = \prod_{i=1}^{j}(q_i/p_i)$. Supongamos ahora que la cadena es recurrente, entonces $P_1(T_0 < \infty) = 1$ y necesariamente

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = \infty. \tag{3.29}$$

Para ver que esta condición también es suficiente, observemos que $P_{0j} = 0$ para $j \geq 2$ y en consecuencia

$$P_0(T_0 < \infty) = P_{00} + P_{01}P_1(T_0 < \infty). \tag{3.30}$$

Supongamos que (3.29) vale, por (3.28)

$$P_1(T_0 < \infty) = 1,$$

y usando esto en (3.30) concluimos que

$$P_0(T_0 < \infty) = P_{00} + P_{01} = 1,$$

de modo que 0 es un estado recurrente. Como la cadena es irreducible, debe ser una cadena recurrente.

Resumiendo, hemos mostrado que una cadena de nacimiento y muerte irreducible sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ es recurrente sí y sólo sí

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_j}{p_1 \cdots p_j} = \infty.$$

Ejemplo 3.10
Consideremos la cadena de nacimiento y muerte sobre los enteros no negativos con probabilidades de transición

$$p_i = \frac{i+2}{2(i+1)}, \quad \text{y} \quad q_i = \frac{i}{2(i+1)}, \quad i \geq 0.$$

En este caso

$$\frac{q_i}{p_i} = \frac{i}{i+2},$$

y obtenemos que

$$\gamma_i = \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} = \frac{1 \cdot 2 \cdots i}{3 \cdot 4 \cdots (i+2)} = \frac{2}{(i+1)(i+2)} = 2\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = 2\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\Big) = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\Big) = 1,$$

y concluimos que la cadena es transitoria. ▲

Finalmente, veamos cual es la distribución estacionaria para una cadena irreducible con espacio de estados infinito. Las ecuaciones (3.1) que definen la distribución estacionaria, son en este caso

$$\pi(0)r_0 + \pi(1)q_1 = \pi(0),$$
$$\pi(i-1)p_{i-1} + \pi(i)r_i + \pi(i+1)q_{i+1} = \pi(i), \quad i \geq 1,$$

y teniendo en cuenta la relación $p_i + r_i + q_i = 1$, las ecuaciones anteriores son

$$p_0\pi(0) = q_1\pi(1),$$
$$q_{i+1}\pi(i+1) - p_i\pi(i) = q_i\pi(i) - p_{i-1}\pi(i-1), \quad i \geq 1.$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos por inducción que

$$q_{i+1}\pi(i+1) = p_i\pi(i), \quad i \geq 0. \tag{3.31}$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación de balance detallado

$$\pi(i)P_{ij} = \pi(j)P_{ji}$$

para el caso de las cadenas de nacimiento y muerte. La condición de balance detallado es más fuerte que (3.1), como es fácil de verificar, y no siempre es válida. La ecuación (3.31) también vale en el caso de un espacio de estados finito.

Ejemplo 3.11 (Cadena de Ehrenfest con tres estados)
En este caso la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y vemos que para todo i, $r_i = 0$. Las ecuaciones (3.31) son en este caso

$$1 \cdot \pi(0) = \frac{1}{3}\pi(1); \quad \frac{2}{3}\pi(1) = \frac{2}{3}\pi(2); \quad \frac{1}{3}\pi(2) = 1 \cdot \pi(3).$$

Poniendo $\pi(0) = \lambda$ y resolviendo obtenemos $\pi(1) = \pi(2) = 3\lambda$, $\pi(3) = \lambda$. Como la suma debe ser 1, obtenemos que $\lambda = 1/8$ y la distribución estacionaria en este caso es

$$\pi(0) = \frac{1}{8}, \qquad \pi(1) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(2) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(3) = \frac{1}{8}.$$

▲

Veamos ahora como se obtiene la distribución estacionaria para una cadena general de nacimiento y muerte. A partir de la ecuación (3.31) obtenemos

$$\pi(i+1) = \frac{p_i}{q_{i+1}}\pi(i), \quad i \geq 0 \tag{3.32}$$

y en consecuencia

$$\pi(i) = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}\pi(0), \quad i \geq 1. \tag{3.33}$$

Definamos $\nu_0 = 1$ y

$$\nu_i = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}, \quad i \geq 1, \tag{3.34}$$

entonces podemos escribir (3.33) como

$$\pi(i) = \nu_i \pi(0), \quad i \geq 0. \tag{3.35}$$

Supongamos ahora que

$$\sum_i \nu_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty, \tag{3.36}$$

a partir de (3.35) concluimos que la cadena tiene una única distribución estacionaria dada por

$$\pi(i) = \frac{\nu_i}{\sum_{j=0}^{\infty} \nu_j}, \quad i \geq 1. \tag{3.37}$$

Si en cambio (3.36) no vale, es decir, si la serie diverge, la relación (3.35) dice que la solución de (3.1) es idénticamente igual a 0 (si $\pi(0) = 0$) o tiene suma infinita (si $\pi(0) > 0$) y en consecuencia no existe distribución estacionaria.

Vemos que una cadena de nacimiento y muerte tiene distribución estacionaria sí y sólo sí (3.36) vale, y que la distribución estacionaria, cuando existe, está dada por (3.34) y (3.37). Observamos que como la cadena es irreducible, tiene una distribución estacionaria sí y sólo sí es recurrente positiva.

Resumiendo, podemos dar condiciones necesarias y suficientes para cada una de las tres posibilidades en una cadena de nacimiento y muerte sobre los enteros no negativos.

- La cadena es transitoria sí y sólo sí
$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j < \infty.$$
- La cadena es recurrente positiva sí y sólo sí
$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j < \infty.$$
- La cadena es recurrente nula sí y sólo sí
$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j = \infty.$$

Ejemplo 3.12
Consideremos una cadena de nacimiento y muerte sobre los enteros no negativos con las siguientes probabilidades de transición

$$p_0 = 1, \quad p_i = p, \quad q_i = q = 1 - p, \quad i \geq 1,$$

con $0 < p < 1$. Para determinar en cuál de las tres clases se encuentra la cadena tenemos que estudiar el comportamiento de las series $\sum \gamma_i$ y $\sum \nu_i$. En este caso es fácil ver que

$$\gamma_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i, \qquad \nu_i = \frac{p^{i-1}}{q^i}$$

para $i \geq 1$. En consecuencia vemos que hay tres casos:

- $0 < p < 1/2$. $\sum \gamma_i = \infty$, por lo tanto la cadena es recurrente. Para ver si es nula o positiva calculamos $\sum \nu_i$, que es convergente en este caso y en consecuencia la cadena es recurrente positiva.
- $p = 1/2$. Un análisis similar muestra que ambas series divergen y la cadena es recurrente nula.

- $1/2 < p < 1$. En este caso $\sum \gamma_i < \infty$ y la cadena es transitoria.

▲

Ejemplo 3.13
Consideremos una empresa que tiene tres máquinas que se dañan de manera independiente, con probabilidad 0.1 cada día. Cuando hay al menos una máquina dañada, con probabilidad 0.5 el técnico puede reparar una de ellas para que esté funcionando el próximo día. Para simplificar, suponemos que es imposible que dos máquinas se dañen el mismo día. El número de máquinas en funcionamiento en un día dado puede ser modelado como una cadena de nacimiento y muerte con la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Para ver como se obtiene esta matriz, consideremos la segunda fila, que corresponde a un día que se inicia con una máquina en buen estado. Al día siguiente estaremos en el estado 0 si una máquina se daña y el técnico no puede arreglar la máquina en la que está trabajando, lo cual ocurre con probabilidad 0.1×0.5. Por otro lado, pasamos al estado 2 sólo si el técnico logra reparar la máquina en la que está trabajando y la que está en uso no se daña. Esto ocurre con probabilidad (0.5)(0.9). Un razonamiento similar muestra que $P_{21} = (0.2)(0.5)$ y $P_{23} = (0.5)(0.8)$.

Para obtener la distribución estacionaria usamos la fórmula (3.32) y poniendo $\pi(0) = \lambda$ entonces

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(0)\frac{p_0}{q_1} = \ \lambda\ \frac{0.5}{0.05} = 10\lambda, \\ \pi(2) &= \pi(1)\frac{p_1}{q_2} = 10\lambda\ \frac{0.45}{0.1} = 45\lambda, \\ \pi(3) &= \pi(2)\frac{p_2}{q_3} = 45\lambda\ \frac{0.4}{0.3} = 60\lambda. \end{aligned}$$

La suma de las π es 116λ, haciendo $\lambda = 1/116$ obtenemos

$$\pi(3) = \frac{60}{116}, \quad \pi(2) = \frac{45}{116}, \quad \pi(1) = \frac{10}{116}, \quad \pi(0) = \frac{1}{116}.$$

▲

Ejemplo 3.14 (Paseo al azar sobre grafos.)
Un grafo es una estructura compuesta por dos partes: Un conjunto de vértices V, que supondremos finito, y una matriz de estructura $A = A(i,j)$ en la cual $A(i,j)$ vale 1 si i y j están conectados por un arco (diremos que i y j son vecinos) y 0 si no. Por convención ponemos $A(i,i) = 0$ para todo $i \in V$.

El grado de un vértice i es igual al número de vecinos que tiene:

$$d(i) = \sum_j A(i,j)$$

ya que cada vecino contribuye una unidad a la suma. Por lo tanto

$$P_{ij} = \frac{A(i,j)}{d(i)}$$

define una probabilidad de transición. Si $X_n = i$, la cadena salta a alguno de los vecinos de i con distribución uniforme.

A partir de la definición de la probabilidad P vemos que que si λ es una constante positiva, $\pi(i) = \lambda d(i)$ satisface la condición de balance detallado:

$$\pi(i)P_{ij} = \lambda A(i,j) = \lambda A(j,i) = \pi(j)P_{ji}$$

Por lo tanto, si tomamos $\lambda = 1/\sum_i d(i)$, tenemos una distribución estacionaria.

▲

Ejemplo 3.15 (Rachas)
Sea $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov sobre $\{0, 1, 2, \ldots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{i,i+1} = p_i, \qquad P_{i,0} = 1 - p_i.$$

¿Bajo que condiciones la matriz de transición de X admite alguna medida invariante?

Para responder a la pregunta planteada arriba estudiaremos cuando el sistema $\pi P = \pi$, es decir,

$$\pi_0 = \sum_{i \geq 0} (1 - p_i)\pi_i, \qquad \pi_i = p_{i-1}\pi_{i-1}, \forall i \geq 1,$$

tiene solución no trivial. Usando un argumento de recursión vemos que el sistema anterior es equivalente a

$$\pi_i = \prod_{j=0}^{i-1} \pi_0, \ \forall i \geq 1,$$

y

$$\pi_0 = (1 - p_i)\pi_0 + \sum_{i \geq 1} (1 - p_i) \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_j \right) \pi_0.$$

Esta ultima ecuación es la que nos permitirá estudiar la existencia de vectores invariantes. Para evitar casos no interesantes supondremos de aquí en adelante que $0 < \pi_0 < \infty$. Entonces, se tiene la siguiente sucesión de igualdades:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= (1 - p_0)\pi_0 + \sum_{i \geq 1} (1 - p_i) \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_j \right) \pi_0 \\
&= (1 - p_0)\pi_0 + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i) \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_j \right) \pi_0 \\
&= (1 - p_0)\pi_0 + \pi_0 \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_j \right) - pi_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_j \right) \\
&= (1 - p_0)\pi_0 + \pi_0 \left(\lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n-1} p_j - p_0 \right)
\end{aligned}$$

Deducimos de esto que una condición necesaria para que π_0 sea $0 < \pi_0 < \infty$ es que

$$\prod_{i=0}^{\infty} \pi_i = 0.$$

Pero eso no es suficiente para garantizar la existencia del vector de probabilidad π, ya que necesitamos saber cuando

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i < \infty,$$

y esto ocurre si y solamente si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n} p_i < \infty.$$

En este caso se tiene que

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{n} p_j}, \qquad \pi_j = \pi_0 \prod_{i=0}^{j-1} p_i, \qquad j \geq 1.$$

Podemos concluir que la cadena es positiva recurrente si y solamente si

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{n} p_i\right) < \infty.$$

Mientras que en el caso en que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} p_j = p \in (0,1],$$

no existe vector invariante diferente del vector $\vec{0}$. ▲

Ejemplo 3.16
Supongamos que en el ejercicio anterior todas las $\{p_i, i \geq 0\}$, son iguales a un valor $p \in]0,1[$. Calcular las n-ésimas potencias de la matriz de transición P. Estudiar el comportamiento asintótico de estas cuando $n \to \infty$.

Observemos que la cadena de Markov que nos interesa se puede usar para simular la fortuna de un jugador muy avaricioso, que apuesta toda su fortuna cada vez que juega en un juego que le permite ganar un peso con probabilidad p o perder todo el dinero apostado con probabilidad $1-p$; y en compensación el casino le da crédito, en el sentido que le da la oportunidad de seguir jugando aunque su fortuna sea cero. Denotaremos por X_n la fortuna del jugador al tiempo n; se tiene que en un paso la cadena se comporta como

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-p=q \end{cases}.$$

Mientras que en n-pasos, se tienen dos posibilidades, sea el jugador no pierde ni una sola vez, o bien pierde alguna vez. Esto se refleja en las probabilidades de transición como

$$P^{(n)}_{i,k} = p^n, \qquad \text{si } k = i+n,$$

esto ocurre cuando el jugador no pierde, mientras que si el jugador pierde en alguno de los n juegos:

$$P^{(n)}_{i,k} = qp^k, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

La primera afirmación es evidente, para ver la segunda veamos primero como calcular esa probabilidad en el caso en que $k=0$, por la ecuación de Chapman-Kolmogorov,

$$P^{(n)}_{i,0} = \sum_{z\geq 0} P^{(n-1)}_{i,z} P_{z,0} = q \sum_{z\geq 0} P^{(n-1)}_{i,z} = q, \quad \forall n \geq 2,$$

ahora bien, el evento $\{X_n = k\}$ dado que $X_0 = i$, ocurre cuando hay una racha"de k juegos ganados, antecedidos de una sucesión de $n-k$ juegos que se terminan por un juego perdido, $(\underbrace{i,\ldots,0}_{n-k \text{ juegos}})$. Esto se puede ver con la ecuación de Chapman-Kolmogorov, para $n \geq 2$ y $0 \leq k \leq n-1$

$$P^{(n)}_{i,k} = \sum_{z\geq 0} P^{(n-k)}_{i,z} P^{(k)}_{z,k} = P^{(n-k)}_{i,0} P^{(k)}_{0,k} = qp^k,$$

ya que la única manera de ir al estado k en exactamente k pasos es: partir de 0 y no perder ningún juego, lo cual ocurre con probabilidad p^k y además vimos arriba que de cualquier estado se va a cero en j pasos con probabilidad q.

Ahora veamos lo que pasa con dichas probabilidades cuando n tiende a infinito. Gracias al calculo anterior es fácil ver que para cualquier estado $i \geq 0$ y $k \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,k}^{(n)} = qp^k.$$

Observemos lo siguiente: 1. Este limite no depende del estado i del cual parte la cadena, y 2. Usando el resultado del ejercicio anterior podemos asegurar que la cadena es positivo recurrente y que el vector de probabilidad invariante π esta dado por $\pi_k = qp^k, k \geq 0$. Dicho de otro modo las entradas de las potencias de la matriz de transición convergen al vector invariante.