Nombre: ____

1	2	3	4	5	T

Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Viernes 2/11/12, 10 a.m. – 1 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 4 de las siguientes preguntas.

1. a) Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y determine cuáles son transitorias y cuáles recurrentes. Determine cuáles clases son cerradas. En cada caso enuncie claramente el criterio utilizado.

b) Sea P una matriz de transición de una cadena de Markov con espacio de estados numerable $\mathcal{E}$. Demuestre que $i \to j$ para $i, j \in \mathcal{E}$, $i \neq j$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ y estados $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ tales que

$$P_{ik_1} > 0, \; P_{k_1k_2} > 0, \dots, P_{k_{n-1}j} > 0.$$

Demuestre que podemos suponer que los estados $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ son distintos.

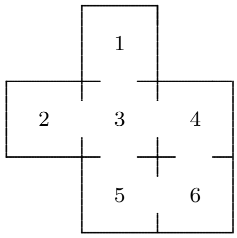
c) Sea $X_n, \; n \geq 1$ una cadena de Markov con matriz de transición P y espacio de estados $\mathcal{E}$ y sea $Y_n, \; n \geq 1$ otra cadena de Markov con matriz de transición Q y el mismo espacio de estados $\mathcal{E}$. Suponga que

$$P_{ij} > 0 \Rightarrow Q_{ij} > 0 \quad \text{para todo par } i, j \in \mathcal{E}, i \neq j.$$

Demuestre que si $i \to j$ en la cadena X_n entonces $i \to j$ en la cadena Y_n. Obtenga como consecuencia que si X_n es una cadena irreducible, Y_n también lo es.

2. Se coloca una rata en un laberinto como el que se indica en la figura. La rata se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay k salidas posibles de un compartimiento, la rata escoge entre ellas con probabilidad uniforme $1/k$.

a) Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov y demuestre que la cadena es irreducible.



b) Si la rata es colocada incialmente en el compartimiento 1, halle la probabilidad de que llegue al compartimiento 2 antes que al compartimiento 5.

c) Si la rata es colocada incialmente en el compartimiento 1, halle el valor esperado del número de pasos hasta llegar al compartimiento 5 por primera vez.

3. a) Sea S_n un paseo al azar simple: $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, donde las variables $\xi_i, i \geq 1$ son i.i.d. con distribución $P(\xi_i = +1) = p = 1 - P(\xi_i = -1)$. Definimos los siguientes procesos a partir de S_n:

$$X_n = S_{2n}, \qquad Z_n = e^{S_n}, \quad n \geq 0$$

Demuestre que ambos procesos son cadenas de Markov, identifique sus espacios de estado y calcule sus probabilidades de transición.

b) Sea $S_n, n \geq 0$ un paseo al azar simple y simétrico que inicia en $S_0 = 0$ y sea $a > 0$. Demuestre que

$$P_0(T_a \leq n) = 2P_0(S_n \geq a) - P_0(S_n = a)$$

donde $T_a = \min\{n \geq 1 : S_n = a\}$.

4. Considere un proceso de ramificación y sea X_n el tamaño de la n-ésima generación si $X_0 = 1$. Sea ξ una v.a. con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ que representa el número de descendientes de un individuo y suponga que su ley está dada por $P(\xi = k) = C(2/3)^k$ para $k = 1, 2, \dots$.

(a) Determine el rango de valores que puede tomar C y la probabilidad de que un individuo de la población no tenga descendencia (en términos de C).

(b) Halle una fórmula para $\mathrm{E}(X_n)$ en términos de C y n.

(c) Determine una condición sobre C para que la probabilidad de extinción sea menor que 1.

(d) Suponiendo que C es tal que la probabilidad de extinción es 1, sea N el número total de todos los individuos de la población, sumando todas las generaciones. Demuestre que $E(N)$ satisface $\mathrm{E}(N) = 1 + \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(N)$ y en consecuencia determine $\mathrm{E}(N)$.

5. a) Sea X_n una cadena de Markov con matriz de transición estacionaria P y sea $T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$, demuestre que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m},$$

para $n \geq 1$. Demuestre que si a es un estado absorbente, $P_{ia}^n = P_i(T_a \leq n)$, para $n \geq 1$.

b) Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Se seleccionan las bolas al azar, una a una. Si se selecciona una bola roja, se deja fuera de la caja. Si, por el contrario, se selecciona una bola negra, se vuelve a colocar en la caja. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido sacadas de la caja. ¿Cuál es la duración promedio del proceso?