Modelos Estocásticos I

Problemas 10

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 17/10/12

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad P_8 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante n está en el estado m, en el siguiente instante su posición se distribuye uniformemente en los estados $0, 1, \ldots, m-1$. Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en m.

2. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i(T)$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$. Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i(T)$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:
$$\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}.$$

3. Se propone el siguiente método secuencial para estimar el tamaño de una población finita, por ejemplo, una población de peces en un lago. Se captura un miembro de la población al azar, se etiqueta y se regresa a su medio ambiente. Se captura otro ejemplar al azar, se etiqueta y se regresa. Se repite el procedimiento hasta que se captura un miembro de la población que haya sido capturado anteriormente. Cuando esto ocurre, digamos en el ensayo T, se detiene el proceso. Basado en el valor observado de T queremos estimar el tamaño N de la población.

   Sea X_n el número de miembros de la población sin etiqueta que han sido capturados en sucesión. Entonces $X_n = n$ para $n = 0, 1, \ldots, T-1$ pero $X_T = 0$, de modo que T es el instante de la primera visita a 0: $T = \min\{n \geq 1 : X_n = 0\}$.

   a) Para N fijo, muestre que (X_n) es una cadena de Markov de rachas pero con probabilidades de transición p_n y q_n no estacionarias. Obtenga las probabilidades p_n y q_n. (b) Calcule $P(T = t | X_0 = 0)$ para $t = 2, \ldots, N$.

4. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición P_1. (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 2. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_2. (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

6. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y probabilidad de transición P_3: Si comienza en el estado 1, halle la probabilidad de que el proceso termine en el estado 0. Compare esta probabilidad con la entrada $(1, 0)$ en las matrices $P_3^2,\ P_3^4,\ P_3^8,\ P_3^{16},\ P_3^{32},\ P_3^{64}$.

7. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 para una cadena de Markov con matriz de transición P_4. Puede suponer que el estado inicial se escoge entre $\{0, 1, 2\}$ de manera uniforme.

8. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_5 (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

9. En promedio, ¿qué requiere menos lanzamientos, lanzar una moneda hasta obtener por primera vez el patrón AAS, es decir, hasta observar dos águilas seguidas de un sol, o lanzar una moneda hasta obtener ASA? ¿Puedes explicar por qué son diferentes?

10. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_6. Comenzando en el estado 1, determine el tiempo promedio que el proceso pasa en el estado 1 antes de la absorción y el tiempo promedio que pasa en el estado 2 antes de la absorción. Verifique que la suma de estas cantidades es igual al tiempo promedio hasta la absorción.

11. Considere una cadena de Markov cuya matriz de transición es P_7. Si la cadena comienza en 1, determine la probabilidad de que el proceso nunca visite el estado 2.

12. Una cadena de Markov tiene matriz de transición P_8 y comienza en el estado 0. Sabemos que el proceso terminará en el estado 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la última transición ocurra desde el estado 1? (Ayuda: Sea $T_2 = \min\{n \geq 0 : X_n = 2\}$ y sea $\eta_i = P(X_{T-1} = 1|X_0 = i)$ para $i = 0, 1$ Haciendo un razonamiento con la primera transición halle ecuaciones para η_0, η_1 y resuélvalas).

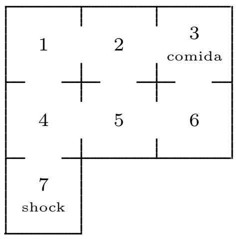
13. Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Se seleccionan las bolas al azar, una a una. Si se selecciona una bola roja, se deja fuera de la caja. Si, por el contrario, se selecciona una bola negra, se vuelve a colocar en la caja. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido sacadas de la caja. ¿Cuál es la duración promedio del proceso?

14. Sea N el número de veces que hace falta lanzar una moneda al aire hasta obtener Sol dos veces consecutivas. Halle una cadena de Markov que sirva de modelo a esta situación. Usando un análisis de la primera transición, halle el valor esperado del número de lanzamientos necesarios para obtener Sol dos veces consecutivas.

15. Se lanza una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas o dos soles. Suponga que el resultado del primer lanzamiento es un águila. Halle la probabilidad de que la serie termine con el lanzamiento de dos soles.

16. Tienes cinco monedas y las lanzas al aire. Las que caen sol se vuelven a lanzar y se continúa así hasta que todas las monedas muestren águila. Sea X el número de monedas en el último lanzamiento. Halle $P(X = 1)$.

17. Se coloca una rata en el compartimiento 4 del laberinto que se muestra en la figura. La rata se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay k salidas posibles de un compartimiento, la rata escoge entre ellas con probabilidad uniforme $1/k$. ¿Cuál es la probabilidad de que la rata encuentre la comida en el compartimiento 3 antes de sentir el shock eléctrico en el compartimiento 7?



18. Un jugador que juega a la ruleta hace una serie de apuestas de un peso y tiene un capital inicial de \$1.000. Su probabilidad de ganar en cada apuesta es 9/19 y de perder 10/19. El jugador decide dejar de jugar cuando gane un peso (es decir, cuando su capital sea \$1001) o cuando se arruine. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se arruine? (b) Halle el valor esperado de la pérdida.

19. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta correctamente ganará una suma igual a la suma apostada; si no, pierde el dinero apostado. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 10 pesos, en caso de ganar. Sea $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos. (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición. (b) Pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es 1/5. (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital? Indicación: se puede usar R, o Matlab en el cálculo de la solución.