Modelos Estocásticos I

Problemas 15

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 21/11/12

1. Sea $X(t)$ un proceso de Poisson de parámetro λ. (a) Demuestre que $\{\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2\}$ sí y sólo sí$\{N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1\}$. Use esta relación para obtener
$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = P(N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_1) = 0 \text{ ó } 1) = e^{-\lambda t_1}[1 + \lambda(t_2 - t_1)]e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$
Derivando, obtenga la densidad conjunta
$$f(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2} \qquad \text{para } 0 < t_1 < t_2.$$
(b) Determine la densidad condicional para τ_1 dado que $\tau_2 = t_2$. (c) Determine las densidades marginales de τ_1 y τ_2. (d) Haciendo un cambio de variables determine la distribución conjunta para $T_1 = \tau_1$ y $T_2 = \tau_2 - \tau_1$.

2. Un profesor de matemáticas espera el autobús a Guanajuato en la parada que está frente a la iglesia de Valenciana. El tiempo de espera hasta el próximo autobús tiene distribución uniforme en $(0, 1)$ horas. Personal del Cimat pasa en carro por la parada con una frecuencia de 6 por hora según un proceso de Poisson y la probabilidad de que cada uno de ellos lleve al profesor a Guanajuato es de $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que termine bajando en el autobús?

3. Las llegadas de pasajeros a una parada de autobús siguen un proceso de Poisson $N(t)$ con tasa $\lambda = 2$ por unidad de tiempo. Suponga que el autobús salió en el instante $t = 0$ y no quedaron pasajeros en la parada. Sea T el instante en el que llega el siguiente autobús. El número de pasajeros presentes cuando el autobús llega es $N(T)$. Suponga que el tiempo de llegada T del autobús es independiente del proceso de Poisson y tiene densidad uniforme
$$f_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
(a) Determine los momentos condicionales $\mathrm{E}[N(T)|T = t]$ y $\mathrm{E}[(N(T))^2|T = t]$.

(b) Determine la media $\mathrm{E}(N(T))$ y varianza $\mathrm{Var}(N(T))$.

4. Considere el proceso de Cox $M(t) = N(\Theta t)$ donde N es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 1$ y suponga que el parámetro Θ tiene densidad exponencial $f(\theta) = e^{-\theta}$.

(a) Demuestre que
$$P(M(t) = j) = \Big(\frac{t}{1+t}\Big)^j \Big(\frac{1}{1+t}\Big), \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots$$
(b) Demuestre que
$$P(M(t) = j, M(t+s) = j+k) = \binom{j+k}{j} t^j s^k \Big(\frac{1}{1+s+t}\Big)^{j+k+1}$$
de modo que $M(t)$ y $M(s+t) - M(t)$ no son variables independientes.

5. N bacterias se distribuyen independientemente y de manera uniforme en un slide de microscopio de área A. Se selecciona una región de área a al azar para hacer la observación. Determine la probabilidad de que k bacterias se encuentren en la región de área a. Demuestre que si $N \to \infty$ y $a \to 0$ de modo que $(a/A)N \to c$, $(0 < c < \infty)$ entonces $p(k) \to e^{-c}c^k/k!$.

6. Para $i = 1, \ldots, n$ sean $(N_i(t),\ t \ge 0)$ procesos de Poisson independientes con parámetro común λ. Halle la distribución del primer instante para el cual al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos.

7. Sean $(N(t),\ t \ge 0)$ y $(M(t),\ t \ge 0)$ procesos de Poisson independientes de parámetros λ y μ. Para un entero fijo a, sea $T_a = \min\{t \ge 0 : M(t) = a\}$ sea el instante aleatorio en el cual el proceso M alcanza a por primera vez. Obtenga $P(N(T_a)) = k)$, para $k = 0, 1, \ldots$. (Ayuda: Considere inicialmente $\xi = N(T_1)$ que corresponde a $a = 1$, entonces ξ tiene distribución geométrica. Luego demuestre que para a cualquiera, $N(T_a)$ tiene la misma distribución que una suma de a variables independientes con la distribución de ξ, es decir, tiene una distribución binomial negativa).

8. El tráfico en una cierta carretera se distribuye de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $2/3$ de vehículo por minuto. 10 % de los vehículos son camiones y el resto son autos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un camión pase en una hora? (b) Dado que 10 camiones han pasado en una hora, ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que han pasado? (c) Dado que 50 vehículos han pasado en una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 autos?

9. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad λ. Hay un costo de almacenamiento de c pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada T unidades de tiempo (es decir, se despachan en T, $2T$, $3T, \dots$). Hay un costo por despacho fijo de K pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo $[0, T]$? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de T que minimiza este costo promedio?

10. Dos correctores de prueba leen un manuscrito de 300 páginas. El primero encuentra 100 errores, y el segundo 120, y sus listas contienen 80 errores en común. Suponga que los errores del autor siguen un proceso de Poisson con tasa λ por página desconocida mientras que los correctores de prueba tienen probabilidad de éxito p_1 y p_2 de encontrar los errores. Sea X_0 el número de errores que ninguno encontró. Sean X_1 y X_2 el número de errores que sólo encontró 1 o sólo encontró 2, respectivamente, y sea X_3 el número de errores que ambos encontraron. (a) Encuentre la distribución conjunta de (X_0, X_1, X_2, X_3). (b) Use la respuesta anterior para encontrar estimadores de p_1 y p_2 y luego del número de errores no descubiertos.

11. Un foco tiene un tiempo de vida exponencial con media de 200 días. Cuando se quema es reemplazado de inmediato. Además hay un sistema de mantenimiento preventivo por el cual el foco es reemplazado de acuerdo a los tiempos de un proceso de Poisson de intensidad 0.1. (a) ¿Con qué frecuencia se reemplaza el foco? (b) A largo plazo ¿Qué proporción de los cambios de foco se deben a fallas?

12. Se corta una pieza de material fibroso obteniéndose una sección circular perpendicular al eje principal. Las fibras se distribuyen sobre el área circular según un proceso de Poisson de tasa 100 fibras por sección. Se determinan las ubicaciones de las fibras y se calcula la distancia de cada fibra al centro de la sección. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de esta distancia radial R para una fibra seleccionada al azar?

13. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro λ. Calcule $\mathrm{E}[N(t)N(t+s)]$.

14. El número de impactos que recibe un sistema sigue un proceso de Poisson de intensidad λ (ver ejemplo 4.6 en las notas). El i-ésimo impacto produce un daño D_i y suponemos que estas son v.a.i.i.d. e independientes del proceso $N(t)$. Suponemos además que el daño producido por un impacto decrece exponencialmente en el tiempo, es decir, si inicialmente el daño es D, un tiempo t después en daño es $De^{-\alpha t}$. Si suponemos que los daños son aditivos, el daño total en el instante t se puede escribir

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-\tau_i)}$$

donde τ_i es el momento en el cual ocurre el i-ésimo impacto. Calcule $\mathrm{E}(D(t))$

15. (Cómo generar variables de Poisson.) Sean $U_1, U_2, \dots$ v.a.i. con distribución uniforme en $(0, 1)$.

(a) Si $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, muestre que X_i tiene distribución exponencial de parámetro λ.

(b) Use el resultado anterior para demostrar que si definimos N como el valor de n que satisface

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i,$$

entonces N tiene distribución de Poisson con media λ.

16. Sean $T_1, T_2, \dots$ v.a.i. exponenciales de parámetro λ y sea N una variable independiente con $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}$. ¿Cuál es la distribución de la suma aleatoria $T = T_1 + \cdots + T_N$?

17. Un submarino tiene tres instrumentos de navegación pero sólo puede permanecer en alta mar si al menos dos de ellos están trabajando. Suponga que los tiempos de vida de los instrumentos son exponenciales con medias 1 año, 1.5 años y 3 años. ¿Cuál es el tiempo promedio que el submarino puede permanecer en alta mar?

18. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. Dado que dos clientes llegaron en los primeros 5 minutos, (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros dos minutos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado en los primeros dos minutos?