Modelos Estocásticos I

Problemas 2

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas distintas el miércoles 22/08/12.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$, y sean $U, V, W y Z$ funciones definidas en Ω por

$$U(\omega) = 2\omega - 25, \qquad V(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } \omega \text{ es impar,} \end{cases} \qquad W(\omega) = \omega^4, \qquad Z(\omega) = 32\cos(\omega\pi).$$

   a) Determine cuáles de estas funciones son variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   b) Para las que sean variables aleatorias, halle la función de probabilidad y la función de distribución asociadas, suponiendo que todos los puntos de Ω son igualmente probables.

   c) Para las que no sean variables aleatorias, determine cuál es la σ-álgebra generada por la función correspondiente y en este caso determine la función de probabilidad y la función de distribución asociadas.

2. Sea F la función dada por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i}, \infty)}.$$

   Demuestre que F es una función de distribución en $\mathbb{R}$. Sea P la medida de probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

   a) $A = [1, \infty)$ b) $B = (\frac{1}{10}, \infty)$ c) $C = \{0\}$ d) $D = [0, \frac{1}{2})$ e) $E = (-\infty, 0)$ f) $F = (0, \infty)$.

3. **Desigualdades de Bonferroni**. Sea $A_i \in \mathcal{F},\ i \geq 1$ una sucesión de eventos. Demuestre

   a) $P(\cup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

   b) $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

   c) Llamemos $S_k = \sum P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$, donde la suma se toma sobre todas las k-uplas ordenadas de enteros $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Demuestre que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j, \quad \text{para } k \text{ impar,}$$

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j, \quad \text{para } k \text{ par,}$$

4. Suponga que $\{B_n, n \geq 1\}$ son eventos con $P(B_n) = 1\ \forall n$. Demuestre que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$.

5. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2 y P una probabilidad. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

6. Sean A, B, C eventos disjuntos en un espacio de probabilidad con $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.1$. Calcule las probabilidades de todos los eventos de $\sigma(A, B, C)$.

7. Lanzamos una moneda n veces y obtenemos k soles. Demuestra que la probabilidad condicional de obtener sol en cualquier lanzamiento específico, dado que hay k soles en total es k/n.

8. **La paradoja de Galton.** Si lanzamos tres monedas al menos dos de ellas son iguales, y la tercera tiene probabilidad 1/2 de caer águila o sol, de modo que la probabilidad de que las tres sean iguales es 1/2. En realidad la probabilidad de que las tres monedas sean iguales es 1/4. ¿Qué está mal en el razonamiento anterior?

9. **La paradoja de Simpson.** Un fabricante de focos tiene dos plantas. La planta A vende lotes de focos que consisten de 1000 focos regulares y 2000 focos ahorradores. A través de pruebas de control de calidad se sabe que, en promedio, hay 2 focos regulares y 11 ahorradores defectuosos por lote. En la planta B se venden lotes de 2000 focos regulares y 1000 ahorradores, y en promedio hay 5 regulares y 6 ahorradores defectuosos por lote.

   El gerente de la planta A afirma que ellos son más eficientes pues sus tasas de focos defectuosos son 0.2 % y 0.55 % mientras que para la otra planta son 0.25 % y 0.6 %. Por su parte el gerente de la planta B responde diciendo 'cada lote de 3000 focos que producimos contiene 11 focos defectuosos, comparado con 13 defectuosos para los focos producidos por A, de modo que nuestra tasa de 0.37 % de focos defectuosos es inferior a la de ellos, que es 0.43 %. ¿Quién tiene la razón?

10. El evento A *atrae* al evento B si $P(B|A) > P(B)$ y lo *repele* si $P(B|A) < P(B)$. a) ¿Es transitiva esta relación? b) Demuestre que si A atrae a B y a C pero repele a $B \cap C$, entonces A atrae a $B \cup C$. c) ¿Es posible que A atraiga a B y a C pero repela a $B \cup C$? d) Demuestre que si $B_1, \dots B_n$ es una partición del espacio muestral y A atrae algún B_j entonces debe repeler a algún B_i, $i \neq j$.

11. Determine el valor de la constante A para que las siguientes sean funciones de probabilidad.

a) $P(X = i) = \begin{cases} Ai & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ b) $P(X = i) = \begin{cases} A/2^i & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

c) $P(X = i) = \begin{cases} A/3^i & i = 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1 \\ A/4^i & i = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

12. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$, y sean U, V, W funciones definidas en Ω por

$$U(\omega) = 2\omega - 25, \qquad V(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } \omega \text{ es impar,} \end{cases} \qquad W(\omega) = \omega^4.$$

Determine cuáles de estas funciones son variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

13. ¿Para qué valores de C y α es la función p definida por $p(n) = Cn^\alpha$ para $n \in \mathbb{N}$ una función de probabilidad?

14. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X si su función de distribución F está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{para } \frac{3}{4} \leq x. \end{cases}$$

15. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Seleccionamos dos bolas al azar con reposición de la caja. Sea X el mayor de los dos números, calcule la función de probabilidad de X. Resuelva también este problema para el caso de muestreo sin reposición.

16. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$

17. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$, b) $P(X > 1/2)$, c) $P(X \leq 3/4 | X > 1/2)$.

18. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$$

y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ c) $C = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ d) $D = [0, 2)$ e) $E = (3, \infty)$.

19. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua demuestre que F es uniformemente continua.

20. Sean X e Y variables aleatorias independientes cada una con densidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la densidad conjunta de las variables U y V, donde $U = \max(X, Y)$ y $V = \min(X.Y)$.