# Modelos Estocásticos I

**Problemas 5**

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 12/09/11

1. Sean $N, X_1, X_2, \dots$ v.a.i., $N$ con distribución binomial $Bin(n, 1-e^{-m})$ y suponga que las $X_i$ tienen todas distribución de Poisson truncada: $P(X_i = k) = m^k/k!(e^m - 1)$ para $k \geq 1$. Halle la distribución de $Z = \sum_{j=1}^{N} X_j$ y calcule $\mathrm{E}(Z)$ y $Var(Z)$.

2. Sea $X$ una variable aleatoria con distribución binomial negativa de parámetros $(r, p)$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$. (a) Use la relación entre la binomial negativa y la geométrica para obtener un algoritmo que simule valores de $X$. (b) Verifique la relación
$$p_X(j+1) = \frac{j(1-p)}{j+1-r} p_X(j)$$
y úsela para obtener un segundo algoritmo para generar valores de $X$. (c) Use la interpretación de la binomial negativa como el número de ensayos necesarios para obtener un total de $r$ éxitos en una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad $p$ de éxito, para obtener otro algoritmo para generar valores de $X$.

3. La variable aleatoria $X$ con valores enteros no-negativos tiene función generadora de probabilidad $\phi_X(t) = \log \frac{1}{1-qt}$. Determine la función de probabilidad para $X$ y halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

4. $X$ es una v.a. cuya distribución tiene las siguientes propiedades: Para todo $n \geq 1$,
$$P(X = 2n) = \frac{1}{2} P(X = 2n-1) = \frac{2}{3} P(X = 2n+1).$$
Además, $P(X = 0) = \frac{2}{3} P(X = 1)$. Calcule la f.g.p. de $X$.

5. Sean $N, X_1, X_2, \dots$ v.a.i., $N$ con distribución $P(N = k) = (1-p)^{k-1} p$ para $k \geq 1, 0 < p < 1$ y suponga que las $X_i$ son todas exponenciales de parámetro $1/\alpha$. Halle la distribución de $Z = \sum_{j=1}^{N} X_j$.

6. La probabilidad de éxito en una sucesión de ensayos independientes de Bernoulli es $p$. Sea $Z$ el número de ensayos necesarios para obtener $r$ éxitos. Determine la f.g.p. de $S$ y usándola halle $\mathrm{E}(Z)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

7. El número de vehículos que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda$. El número de personas en cada carro tiene distribución de Poisson de parámetro $\nu$. Halle la f.g.p. del total de personas $Y$ que pasan por el cruce durante una hora y calcule $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

8. Juan lanza un dardo a una diana y la probabilidad de que acierte la diana en cada disparo es $1/2$. Dado que acierta la diana, la probabilidad de que acierte el centro de la diana es $p$. Juan lanza mientras acierte a la diana. Sea $X$ el total de aciertos al centro de la diana cuando Juan termina de lanzar. Halle su distribución.

9. Julia tiene una moneda asimétrica que con probabilidad $p$ cae águila. Ella lanza la moneda hasta obtener un águila y luego lanza una moneda simétrica tantas veces como lanzó la primera moneda. Por cada águila que obtiene con la moneda simétrica lanza un dado balanceado. Determine el valor esperado y la varianza del total de puntos que obtuvo lanzando los dados.

10. Felipe lanza un dado balanceado hasta obtener un cuatro. Luego Diana lanza una moneda balanceada tantas veces como Felipe lanzó el dado. Determine el valor esperado y la varianza del número de (a) águilas, (b) soles, (c) águilas y soles que obtiene Diana.

11. Sea $p$ la probabilidad de que un chinche caiga con la punta hacia abajo al lanzarlo una vez. Una persona lanza un chinche hasta que la punta caiga hacia abajo por primera vez, sea $X$ el número de lanzamientos. Luego lanza de nuevo el chinche otras $X$ veces. Sea $Y$ el número de veces que la punta del chinche cae hacia abajo en la segunda serie de lanzamientos. Halle la distribución de $Y$.

12. Sean $X_1, X_2, \ldots$ observaciones independientes de una v.a. $X$ con densidad $f_X(x) = e^{-|x|}/2$ para $x \in \mathbb{R}$. Suponga que continuamos muestreando hasta que aparezca la primera observación negativa. Sea $Y$ la suma de las observaciones, incluyendo la observación negativa. Demuestre que la función de densidad de $Y$ es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{x} & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{6}e^{-x/2} & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

13. Sea $X \sim \mathcal{U}[0, a]$. Halle la función generadora de momentos de $X$ y determine para qué valores de $t$ existe.

14. Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Halle la función generadora de momentos y la densidad de $X^2$.

15. Halle la función generadora de momentos para una variable aleatoria $X$ con densidad $f_X(x) = e^{-|x|}/2$ para $x \in \mathbb{R}$ y determine para qué valores de $t$ está definida.

16. Sea $X$ una v.a. con distribución binomial negativa de parámetros $n, p$: $p_X(k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$ para $k \geq 0$. Halle la función generadora de momentos.

17. Sea $X$ una v.a. con función de probabilidad

$$p_X(k) = \frac{1}{2} q^{|k|-1} p,$$

con $0 < q = 1 - p < 1$. Halle la f.g.p. y la f.g.m para esta variable aleatoria.

18. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. (a) Halle la función generadora de momentos de $X$. (b) Demuestre que $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. (c) Sean $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, demuestre que $X_1 + X_2$ tiene distribución normal y halle sus parámetros. (d) Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ demuestre que todos sus momentos de orden impar valen 0 y para los de orden par vale la siguiente fórmula: $\mathrm{E}(X^{2n}) = (2n)! \sigma^{2n}/2^n n!$ para $n \geq 1$.

19. La variable aleatoria $X$ tiene la propiedad de que todos sus momentos son iguales, es decir $\mathrm{E}(X^n) = c$ para todo $n \geq 1$, para alguna constante $c$. Halle la distribución de $X$.

20. La variable aleatoria $X$ tiene la propiedad de que $\mathrm{E}(X^n) = 2^n/(n+1)$, para $n \geq 1$. Halle la distribución de $X$.

21. Sea $Y$ una v.a. con distribución Beta de parámetros $n, m$ enteros ($Y \sim \beta(n, m)$). (a) Calcule la función generadora de momentos de $-\log Y$. (b) Demuestre que $-\log Y$ tiene la misma distribución que $\sum_{k=1}^{m} X_k$, donde $X_1, X_2, \ldots$ son v.a.i. con distribución exponencial. (Sugerencia: La fórmula $\Gamma(r+s) = (r+s-1)\cdots(r+1)k\Gamma(r)$ que es válida cuando $s$ es entero, puede ser útil).

22. Demuestre usando las funciones generadoras de momentos que una variable $X$ con densidad $e^{|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $X = Y_1 - Y_2$, con $Y_1, Y_2$ v.a.i. con distribución exponencial.

23. Describa un algoritmo eficiente para simular una v.a. $X$ con función de probabilidad

$$P(X = 1) = 0.2; \quad P(X = 2) = 0.25; \quad P(X = 3) = 0.4; \quad P(X = 4) = 0.15.$$

24. Describa dos métodos para generar valores de una variable aleatoria $X$ tal que

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i/i!}{\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^j/j!}, \quad i = 0, \ldots k.$$

25. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad $f(x) = e^x/(e-1)$, $0 \leq x \leq 1$.

26. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = (x^2 + x)/2$, $0 \leq x \leq 1$

27. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta)$, para $0 < x < \infty$.

28. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad $f(x) = e^{-2|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.