Nombre: ____

1	2	3	4	T

Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Viernes 17/10/2014, 3:00 p.m. – 6:00 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda tres de las siguientes preguntas.

Inicie cada pregunta en una hoja nueva.

1. a) Defina, con claridad y precisión, los siguientes conceptos: Estado recurrente. Cadena irreducible. Conjunto cerrado

   b) Sean i, j dos estados de una cadena de Markov con matriz de transición estacionaria. Suponga que i es un estado recurrente y que $i \to j$, demuestre que j también es recurrente.

   c) Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas. En cada caso explique su respuesta o de un contraejemplo.

   i) $P_{ij}^{(n)} \geq P_i(T_j = n)$ para $i, j \in \mathcal{E}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, donde $T_j = \min\{n > 0 : X_n = j\}$.

   ii) Si $i \leftrightarrow j$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_{ij}^{(n)} > 0$ y $P_{ji}^{(n)} > 0$.

   iii) Si $\rho_{ij} < 1$ y $\rho_{ji} < 1$ entonces no puede ocurrir que i y j se comuniquen, donde $\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty)$.

2. En un proceso de ramificación, la distribución del número de descendientes ξ de cada individuo está dada por la siguiente función generadora de probabilidad:

$$\phi(s) = as^2 + bs + c.$$

   a) ¿Qué condiciones deben satisfacer a, b y c para que ϕ sea una f.g.p.? Describa explícitamente la función de probabilidad de ξ (asociada a ϕ).

   b) Si la población inicia con un sólo individuo, halle la probabilidad de extinción para este proceso. ¿Bajo que condición es segura la extinción?

   c) Si la población inicial consta de 10 individuos que se reproducen de manera independiente y todos de acuerdo a la misma distribución, ¿Cuál es ahora la probabilidad de extinción para toda la población?

   d) Sea X_n el tamaño de la n-ésima generación de la población y $Z = \sum_{n\geq 0} X_n$ el tamaño total de la población. Si la población inicial consta de un sólo individuo, halle una fórmula para $\mathrm{E}(Z)$ (en términos de a, b y c).

3. a) Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Haga una gráfica de transiciones para la cadena y a partir de ella determine las clases de comunicación de la cadena. Determine cuáles clases corresponden a estados recurrentes y cuáles a estados transitorios. En cada caso indique claramente el criterio que usó para hacer la clasificación. ¿Es irreducible esta cadena?

b) Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0,1,2,3\}$ y la siguiente matriz de transición:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Si la cadena inicia en 0, determine la probabilidad de que nunca visite el estado 1.

ii) Halle el tiempo promedio para la absorción si la cadena comienza en el estado 3.

4. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, S_0 = 0$ donde las variables $\xi_k, k \geq 1$ son i.i.d. y toman valores 1 y -1 con probabilidad 1/2 en cada caso.

a) Denotamos por $N_n(0,b)$ al número de trayectorias que van de $S_0 = 0$ a $S_n = b$ y por $N_n^r(0,b)$ al número de trayectorias que van de $S_0 = 0$ a $S_n = b$ pasando por r, con $b, r \geq 0$. Demuestre que

$$N_n^r(0,b) = N_n(0, 2r - b).$$

b) Sea $M_n = \max\{S_k, 0 \leq k \leq n\}$. Usando el resultado del inciso anterior demuestre que

$$P(M_n \geq r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{si } b \geq r, \\ P(S_n = 2r - b) & \text{si } b < r, \end{cases}$$

y obtenga expresiones para las siguientes probabilidades

$$P(M_n \geq r) \qquad \text{y} \qquad P(M_n = r).$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un paseo al azar simple simétrico visite todos los puntos del conjunto $\{1,2,3,4\}$ durante el intervalo $n \in \{0,1,2,\dots,10\}$? ¿Cuál es la probabilidad de que la cadena no visite el estado 5 en el mismo intervalo de tiempo? Puedes expresar tu respuesta usando números combinatorios.