Medida y Probabilidad
Problemas I

Los problemas 4, 8, 15, 25 y 26 son para entregar el lunes 10/08/09.

1. Dé un ejemplo de una función continua definida en un intervalo que no sea uniformemente continua.

2. Demuestre o dé un contraejemplo para la siguiente afirmación: Toda sucesión infinita de números reales contiene una subsucesión monótona.

3. Dé un ejemplo de una sucesión de funciones definidas sobre un intervalo común tales que la sucesión converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo.

4. El límite superior de una sucesión a_n, $\limsup_{n\to\infty} a_n =$, se puede definir como el valor A tal que,

   - dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n < A + \varepsilon$,
   - para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $m \geq M$ tal que $A - \varepsilon < a_m$.

   Demuestre que esta definición es equivalente a la definición $A = \inf_{n\geq 1}\Big(\sup_{k\geq n} a_k\Big)$.

5. Demuestre que si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existe.

6. Demuestre que si $A = \limsup a_n$ existe, es posible hallar una subsucesión que converge a A.

7. Demuestre que el conjunto de todas las funciones con valores reales y continuas definidas sobre $[0, 1]$ es un espacio vectorial.

8. Dé un ejemplo de una serie de funciones continuas definidas sobre un intervalo tales que la serie no converja uniformemente sobre el intervalo pero si converja puntualmente a una función continua sobre el intervalo.

9. Dé un ejemplo de una serie de funciones continuas sobre un intervalo tales que la serie no converja a una función continua en el mismo intervalo.

10. Demuestre el siguiente resultado: Si las funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ son uniformemente continuas y $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$, f es uniformemente continua.

11. Dé un ejemplo de una serie de funciones $f_1 + f_2 + \cdots$ de funciones diferenciables definidas sobre un intervalo tales que la serie converge uniformemente a f sobre el intervalo pero $f'(x) \neq f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots$ para todo x en este intervalo.

12. Considere la sucesión
    $$f_n(x) = \Big(\frac{1}{n^2} + x^2\Big)^{1/2}$$
    Demuestre que f_n converge uniformemente en $[-1, 1]$ a una función $f(x)$. Determine si f es diferenciable. ¿Para cuáles valores de x es cierto que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$?

13. Sea $f_n(x) = x/(1 + nx^2)$ para $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Halle $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

    a) Demuestre que $f'(x)$ existe para todo x pero que $f'(0) \neq g(0)$. ¿Para qué valores de x se tiene que $f'(x) = g(x)$?

    b) ¿En cuáles subintervalos de $\mathbb{R}$ se tiene que $f_n \to f$ uniformemente?

    c) ¿En cuáles subintervalos de $\mathbb{R}$ se tiene que $f_n' \to g$ uniformemente?

14. Dé un ejemplo de una serie de funciones $f_1 + f_2 + \cdots$ de funciones integrables sobre un intervalo $[a, b]$ tales que la serie no converge uniformemente sobre el intervalo pero
    $$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\Big)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

15. Definimos la función $f(x) = x$ si x es racional y 0 en otro caso. ¿Para qué valores de x es f continua? ¿Para qué valores de x es f diferenciable?

16. Definimos la función $g(x) = x^2$ si x es racional y 0 en otro caso. ¿Para qué valores de x es g continua? ¿Para qué valores de x es g diferenciable?

17. Considere la función

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} \left\lfloor \frac{2^n x + 1}{2} \right\rfloor, \quad 0 \le x \le 1,$$

donde $\lfloor a \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a a. Demuestre que esta serie converge para todo $x \in [0,1]$, que es creciente y que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Halle todos los puntos en los cuales g es discontinua y en estos puntos halle la diferencia entre el límite por la derecha y el límite por la derecha. Demuestre también que esta función es integrable según Riemann sobre $[0,1]$ y calcule el valor de la integral.

18. Sea f una función que no es continua en a. Demuestre que f no puede ser diferenciable en a.

19. Demuestre que

$$\int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} \Big) dx \ne \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big(nxe^{-nx^2} \Big) dx.$$

20. Sea (f_n) una sucesión de funciones reales y continuas que converge uniformemente en $[a,b]$ a f. Definimos F_n y F en $[a,b]$ por $F_n(x) = \int_a^x f_n dt, F(x) = \int_a^x f dt$ para $x \in [a,b]$. Demuestre que F_n converge uniformemente a F en $[a,b]$.

21. Considere las siguientes sucesiones de funciones en $[0,1]$

$$(a)\ f_n(x) = n^2 x \ \text{ si } 0 \le x \le \frac{1}{n}; \quad (b)\ f_n(x) = -n^2(x - \frac{2}{n}) \ \text{ si } \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}: \quad (c)\ f_n(x) = 0 \ \text{ si } \frac{2}{n} \le x \le 1.$$

En cada caso dibuje la gráfica de f_n, halle el límite de la sucesión (f_n) y calcule $\int_0^1 f_n(x)dx$. ¿Qué concluye?

22. Para las siguientes sucesiones de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ calcule $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y determine si la convergencia es uniforme. Determine también si es posible intercambiar límites e integrales.

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}, \qquad b)\ f_n(x) = \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

23. Sea (f_n) una sucesión de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$ y suponga que $f_n \to f$ uniformemente en $[0,1]$. ¿Es cierto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx?$$

24. Demuestre que $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c, \qquad (\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$.

25. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $(A_n)_{n\ge 1}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$.

a) Demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

b) Sean A_n, B_n subconjuntos de Ω, demuestre que $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$

c) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, ¿es cierto que $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $\quad A_n \cap B_n \to A \cap B$?

26. Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ para los siguientes conjuntos:

$$A_n = \begin{cases} (-1/n, 1] & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (-1, 1/n] & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

27. Sean B y C subconjuntos de Ω. Definimos

$$A_n = \begin{cases} B, & \text{si } n \text{ es par,} \\ C, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

¿Quiénes son $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$?

28. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$, A_n el interior del círculo con centro en $((-1)^n/n, 0)$ y radio 1. Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$.