Medida e Integración
Problemas X

Los problemas 1, 3, 6, 10, y 13 son para entregar el lunes 19/10/09.

1. (a) Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, cada punto con probabilidad 1/4. Sea $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$. Demuestre que estos eventos son independientes a pares pero no son independientes.

   (b) Sea $\{A_i, 1 \leq i \leq 5\}$ una partición medible de Ω tal que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 15/64$, $P(A_4) = 1/64$, $P(A_5) = 18/64$. Definimos $B = A_1 \cup A_4$, $C = A_2 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$. Verifique que

   $$P(B \cap C \cap D) = P(B)P(C)P(D)$$

   pero B, C y D no son independientes.

   (c) Sea X_1 y X_2 v.a.i. que toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad 1/2. ¿Son X_1, X_2 y X_1X_2 independientes dos a dos? ¿Son variables independientes?

2. Sea A, B y C tres eventos independientes. Demuestre que $A \cup B$ y $A \setminus B$ son independientes de C.

3. Dé un ejemplo sencillo que muestre que dos variables pueden ser independientes respecto a una medida de probabilidad pero dependientes respecto a otra.

4. Sea $(X_k)_{k\geq 1}$ v.a.i.i.d. con función de distribución común F. Sea π una permutación de $1, \dots, n$. Demuestre que $(X_1, \dots, X_n)$ y $(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ tienen la misma distribución conjunta.

5. Si X, Y son variables independientes y f, g son funciones medibles reales ¿Por qué son independientes $f(X)$ y $g(Y)$? (No hace falta calcular nada).

6. Sean X, Y v.a.i. con valores en $\mathbb{N}$ con $P(X = i) = P(Y = i) = 2^{-i}$, $i \geq 1$. Calcule las siguientes probabilidades.

   (a) $P(\text{mín}(X, Y) \leq i)$. (b) $P(X = Y)$. (c) $P(Y > X)$. (d) $P(X \text{ divida a } Y)$. (e) $P(X \geq kY)$ para un entero positivo k dado.

7. ¿Cuál es el menor número de puntos que debe tener un espacio muestral para que existan n eventos independientes $B_1, \dots, B_n$, ninguno de los cuales tiene probabilidad 0 ó 1?

8. Considere el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue. Definimos $X(\omega) = \omega$.

   (a) ¿Existe una variable aleatoria acotada que sea independiente de X y no sea constante c. p. 1?

   (b) Defina $Y = X(1 - X)$. Construya una variable aleatoria Z que no sea constante casi seguramente y tal que Y y Z sean independientes.

9. Sea X una variable aleatoria.

   (a) X es independiente de si misma sí y sólo sí para alguna constante c se tiene $P(X = c) = 1$.

   (b) Si existe una función medible $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que X y $g(X)$ son independientes, demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(g(X) = c) = 1$

10. Suponga que $(A_n)_{n\geq 1}$ son eventos independientes que satisfacen $P(A_n) < 1$ para todo n. Demuestre que

    $$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 1 \qquad \text{sii} \qquad P(A_n \ i.v.) = 1$$

    Dé un ejemplo que demuestre que la condición $P(A_n) < 1$ es necesaria.

11. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.i. Demuestre que $P(\sup_n X_n < \infty) = 1$ sí y sólo sí $\sum_n P(X_n > M) < \infty$ para algún M.

12. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 17 éxitos seguidos infinitas veces?

13. Si $P(A_n) \geq \varepsilon > 0$ para todo n grande entonces $P(A_n \ i.v.) \geq \varepsilon$.

14. Sean X, Y v.a.i. y suponga que $P(X + Y = \alpha) = 1$, donde α es una constante. Demuestre que tanto X como Y son constantes.

15. Use el lema de Borel-Cantelli para demostrar que dada cualquier sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\geq 1}$ cuyo rango de valores sea la recta real, existen constantes $c_n \to \infty$ tales que

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{c_n} = 0) = 1.$$

Dé una descripción detallada de cómo se escogen las constantes c_n.

16. Sea $X_n, n \geq 1$ v.a.i. de Bernoulli con $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ y sea A_n el evento que ocurre si hay n éxitos seguidos entre el ensayo 2^n y el ensayo 2^{n+1}. Si $p \geq 1/2$ demuestre que c. p. 1 ocurren infinitos A_n y si $p < 1/2$ ocurren infinitos A_n con probabilidad 0.

17. Vimos como consecuencia del lema de Borel-Cantelli que la probabilidad de convergencia de una sucesión de variables aleatorias independientes es igual a 0 ó 1. Si la sucesión (X_n) es i.i.d. y no es constante con probabilidad 1, demuestre que la probabilidad de que la sucesión converja es 0.

18. Use el teorema de Rényi para demostrar que si $X_n, n \geq 1$ son i.i.d. con distribución común continua entonces con probabilidad 1 hay infinitos records.

19. Sea n un número primo mayor que 2 y sean X, Y independientes con distribución uniforme en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Para cada r, $0 \leq r \leq n-1$ definimos $Z_r = X + xY(\mod n)$.

    (a) Demuestre que las v.a.'s $\{Z_r : 0 \leq r \leq n-1\}$ son independientes a pares.

    (b) ¿Es cierto el resultado si no suponemos que n es primo?

20. Sea $X_n, n \geq 1$, v.a.i. con $P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Sea $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Demuestre que $Z_n, n \geq 1$ son independientes.

21. (Barndorff-Nielsen) Suponga que (E_n) es una sucesión de eventos tales que

$$\lim_n P(E_n) = 0, \quad \sum_n P(E_n \cap E_{n+1}^c) < \infty.$$

Demuestre que $P(E_n i.v.) = 0$. Ayuda: Desconponga $\cup_{j=n}^m E_j$ para $m > n$.

22. (a) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a.i.i.d. y sea a_n una sucesión de constantes. Demuestre que

$$P([X_n > a_n] \ i.v.) = \begin{cases} 0, & \text{sii } \sum_n P(X_1 > a_n) < \infty \\ 1, & \text{sii } \sum_n P(X_1 > a_n) = \infty \end{cases}$$

(b) Suponga que las X_n son i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que con probabilidad 1

$$\limsup \frac{|X_n|}{\sqrt{2\log n}} = 1.$$

Ayuda: Puede usar la relación de Mill: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(X_n > x)}{\varphi(x)/x} = 1$ donde $\varphi(x)$ es la densidad normal estándar.

(c) Suponga que $X_n, n \geq 1$, son i.i.d. de Poisson con parámetro λ. Demuestre que

$$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \leq P(X_1 \geq n) \leq \frac{\lambda^n}{n},$$

y por lo tanto, con probabilidad 1,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n / \log(\log n)} = 1.$$

23. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ dos sub-σ-álgebras en Ω. Suponga que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son independientes y la variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible respecto a ambas σ-álgebras. Demuestre que X es constante, es decir, $P(X = c) = 1$ para alguna constante c.

24. Sea X, Y v.a.i. con distribuciones geométricas de parámetros λ y μ, respectivamente. Sea $Z = \min(X, Y)$. Demuestre que Z tiene distribución geométrica y halle su parámetro. (X tiene distribución geométrica con parámetro $\alpha \in [0, 1)$ si $P(X = n) = (1-\alpha)\alpha^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$).