Medida e Integración
Problemas VII

Los problemas 2, 5, 6, 9, y 15 son para entregar el lunes 28/09/09.

1. Sean $\{X_n,\ n \geq 1\}$ v.a. en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definimos el paseo al azar asociado por
$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$
Sea
$$\tau = \text{ínf}\{n > 0 : S_n > 0\}.$$
Demuestre que τ es una v.a. Suponga que $\tau(\omega) < \infty$ para todo $\omega \in \Omega$. Demuestre que S_τ es una v.a.

2. Sean $\{X_1, \dots X_n\}$ v.a. en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea E el conjunto de los empates:
$$E = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{X_i = X_j\}$$
Suponga que los empates tienen probabilidad cero: $P(E) = 0$. Definimos el *rango relativo* R_k de X_k en $\{X_1, \dots, X_n\}$ por
$$R_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \geq X_k]}, & \text{en } E^c \\ 321, & \text{en } E. \end{cases}$$
Demuestre que R_k es una v.a.

3. Sea $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Demuestre que si $\{\omega : X(\omega) > c\} \in \mathcal{F}$ para todo $c \in \mathbb{Q}$, entonces X es medible.

4. Sea (X_n) una sucesión de funciones $\Omega \to \mathbb{R}^*$ cada una de las cuales es finita c.s. Demuestre que para casi todo $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega)$ es finita para todo n.

5. En el teorema de aproximación (teorema 3.1) demuestre que la condición $X \geq 0$ puede ser eliminada si no pedimos que la sucesión aproximante de funciones simples (X_n) sea monótona. Demuestre que si X no está acotada superior ni inferiormente, es imposible lograr que la sucesión X_n sea monótona.

6. Una *función elemental* es aquella que toma una cantidad numerable de valores, cada uno de ellos en un subconjunto medible de Ω. Demuestre que si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible, entonces es el límite uniforme de una sucesión (X_n) de funciones elementales, pero si X no está acotada, no es límite uniforme de funciones simples.

7. Si $\mathcal{F}$ es un álgebra finita de subconjuntos de Ω, demuestre que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si es $\mathcal{F}$-simple.

8. Sea Ω un espacio topológico, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra que contiene a los borelianos de Ω: $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{F}$ y suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio completo. Demuestre que cualquier función que sea continua c.s. es $\mathcal{F}$-medible. De un ejemplo de una función medible que no pueda hacerse continua cambiando sus valores en un conjunto de medida 0.

9. Considere un triángulo con vértices $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$ y suponga que (X_1, X_2) es un vector aleatorio con distribución uniforme en este triángulo. Calcule $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$.

10. Calcule media y varianza para la distribución uniforme en $[a, b]$.

11. Halle media y varianza para las siguientes distribuciones:
$$a)\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq -1, \\ (x+1)/4 & \text{para } -1 \leq x < 0, \\ (x+3)/4 & \text{para } \ 0 \leq x < 1. \\ 1 & \text{para } x \geq 1. \end{cases} \qquad b)\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq -1, \\ (x+2)/4 & \text{para } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{para } x \geq 1. \end{cases}$$

12. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sea X una v.a. con $X \geq 0$ y $\mathrm{E}[X] = 1$. Definimos $Q : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ por $Q(A) = \mathrm{E}[X\mathbf{1}_A]$

a) Demuestre que Q define una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

b) Suponga que $P(X > 0) = 1$. Sea E_Q el valor esperado calculado respecto a la medida Q. Demuestre que $\mathrm{E}_Q[Y] = \mathrm{E}_P[YX]$.

c) Suponga que $P(X > 0) = 1$. Demuestre que $1/X$ es integrable para Q.

d) Defina $R : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ por $R(A) = \mathrm{E}_Q[\frac{1}{X}\mathbf{1}_A]$. Demuestre que R es la medida de probabilidad P.

13. Sea Ω un conjunto finito, $\mu(E)$ el número de puntos en E. Demuestre que todas las funciones sobre Ω son simples y que la teoría de integración se reduce a la teoría de sumas finitas.

14. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^*$ una función integrable respecto a la medida μ. Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$, $\mu\{\omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon\} < \infty$.

15. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas definidas sobre $\mathcal{F}$ y $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Demuestre que si X es integrable respecto a μ_1 y μ_2 en un conjunto E, entonces es integrable respecto a ν y

$$\int_E X\, d\nu = \int_E X\, d\mu_1 + \int_E X\, d\mu_2.$$

16. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ una función medible no-negativa. Demuestre que

$$\int_E X\, d\mu = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) \inf\{X(\omega) : \omega \in E_k\}\Big\}$$

donde el supremo se toma sobre la colección de todas las particiones medibles de E: $E = \cup_{k=1}^{n} E_k$. Esta es otra manera de definir la integral $\int_E X\, d\mu$ que produce la misma colección de funciones integrables.

17. Suponga que $\mu(E) < \infty$ y $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible con valores reales definida en $E \in \mathcal{F}$. Definimos

$$S_n(E) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mu\Big\{x : x \in E, \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\Big\}$$

Demuestre que si esta serie es convergente para algún $n \in \mathbb{Z}$, es convergente para todo n. Demuestre que f es integrable en E si y sólo si la serie converge absolutamente para todo n y en este caso

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(E).$$

Demuestre que el resultado no es válido si $\mu(E) = +\infty$.

18. Sean X, X_n v.a. y suponga que $\sup_{\omega\in\Omega, n\geq 1} |X_n(\omega)| < \infty$, es decir, la sucesión (X_n) está uniformemente acotada. Suponga además que $\sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega) - X_n(\omega)| \to 0$. Demuestre que $\mathrm{E}[X_n] \to \mathrm{E}[X]$.

19. Para $X \geq 0$ sea $X_n^* = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq X < \frac{k}{2^n}\}} + \infty \mathbf{1}_{\{X=\infty\}}$. Demuestre que $\mathrm{E}[X_n^*] \downarrow \mathrm{E}[X]$.

20. Suponga que X es una v.a. no-negativa que satisface $P(0 \leq X < \infty) = 1$. Demuestre que

$$a)\ \lim_{n\to\infty} n\, \mathrm{E}\left[\frac{1}{X}\mathbf{1}_{\{X>n\}}\right] = 0 \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} n^{-1}\, \mathrm{E}\left[\frac{1}{X}\mathbf{1}_{\{X>n^{-1}\}}\right] = 0.$$