Probabilidad

Lista de Problemas 9

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 16/10/18.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Se observa una sustancia radioactiva durante 4 intervalos de 6 segundos cada uno. Si la frecuencia de las emisiones de partículas es de 0.5 por segundo, calcular la probabilidad de que

   (a) En cada intervalo se emitan 3 o más partículas,

   (b) En al menos un intervalo se emitan 3 o más partículas.

2. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 4$ por hora. Si la tienda abre a las 10:00 am, (a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos cliente hayan llegado antes de las 10:30? (b) Dado que (a) es cierto ¿cuál es la probabilidad de que un total de 7 clientes haya llegado antes de las 12:30? (c) Dado que (a) y (b) son ciertos ¿cuál es la probabilidad de que un total de 12 clientes hayan llegado durante el día, si la tienda cierra a las 6:00 pm?

3. Un profesor de matemáticas espera el autobús a Guanajuato en la parada que está frente a la iglesia de Valenciana. El tiempo de espera hasta el próximo autobús tiene distribución uniforme en $(0, 1)$ horas. Personal del Cimat pasa en carro por la parada con una frecuencia de 6 por hora según un proceso de Poisson y la probabilidad de que cada uno de ellos lleve al profesor a Guanajuato es de 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que termine bajando en el autobús?

4. Un foco tiene un tiempo de vida exponencial con media de 200 días. Cuando se quema es reemplazado de inmediato. Además hay un sistema de mantenimiento preventivo por el cual el foco es reemplazado de acuerdo a los tiempos de un proceso de Poisson de intensidad 0.1. (a) ¿Con qué frecuencia se reemplaza el foco? (b) A largo plazo ¿Qué proporción de los cambios de foco se deben a fallas?

5. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora).

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

6. Un recipiente con colonias de bacteria visibles al microscopio como puntos oscuros se divide en cuadrados pequeños y se cuenta el número de colonias presentes en cada cuadrado. En las tablas siguientes presentamos el número observado de cuadrados con exactamente k puntos oscuros en dos experimentos realizados con diferentes tipos de bacterias. Explique por qué un proceso de Poisson es un modelo adecuado en este caso y compare la predicción de dicho modelo con los resultados observados en la práctica.

Caso 1:

k	0	1	2	3	4	5	≥ 6
N_k	5	19	26	26	21	13	8

Caso 2:

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N_k	8	16	18	15	9	7

7. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Definimos una nueva variable aleatoria N de la siguiente manera: Si $X_1 > 1$ entonces $N = 0$; si $X_1 \leq 1$ pero $X_1 + X_2 > 1$, entonces $N = 1$; en general, $N = k$ si

$$X_1 + \cdots + X_k \leq 1 < X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}.$$

   Demuestre que N tiene distribución de Poisson de parámetro λ. Este método puede ser usado para simular la distribución de Poisson. (Ayuda: $X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$. Condicione por el valor de la suma y use la ley de probabilidad total para mostrar que

$$P(N = k) = \int_0^1 [1 - F(1 - x)] f_k(x) dx,$$

   donde $F(x)$ es la función de distribución exponencial y f_k es la densidad $\Gamma(k, \lambda)$).

8. Para $i = 1, \ldots, n$ sean $(N_i(t),\ t \geq 0)$ procesos de Poisson independientes con parámetro común λ. Halle la distribución del primer instante para el cual al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos.

9. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora).

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

10. Considera un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ Demuestra que la probabilidad de que haya un número par de eventos en el intervalo $(t, t+h]$ es $(1 + e^{-2\lambda h})/2$. Demuestra también que la probabilidad de que haya un número impar de eventos en el intervalo $(t, t+h]$ es $(1 - e^{-2\lambda h})/2$.