

Primer examen parcial de los cursos de Métodos Numéricos y Álgebra Lineal Numérica

CIMAT, 2 de octubre del 2007

Duración: 3 horas

(Calificación máxima: 100 puntos)

1. (15 puntos) Solución de sistemas de ecuaciones lineales:
 - a. (3 puntos) Enliste los métodos numéricos que conoce para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
 - b. (12 puntos) Describa detalladamente las ventajas y desventajas de utilizar cada uno de los métodos listados.
2. (15 puntos) Optimización de funciones:
 - a. (3 puntos) Enliste los métodos numéricos que conoce para minimizar una función en varias variables dada.
 - b. (12 puntos) Describa detalladamente las ventajas y desventajas de utilizar cada uno de los métodos listados.
3. (5 puntos) Describa en qué situaciones el método de mínimos cuadrados proporciona una infinidad de soluciones al problema de regresión lineal. Justifique su respuesta.
4. (20 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:
 - a. (12 puntos) Realice la descomposición LU de A .
 - b. (5 puntos) Encuentre los valores propios de A .
 - c. (3 puntos) ¿Para qué relaciones de sus coeficientes, alguno de los valores propios no es real?
5. (5 puntos) De acuerdo al criterio de mínimos cuadrados, ¿cuál es el mejor plano que se ajusta a las siguientes observaciones: (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) ?
6. (15 puntos) Búsqueda de raíces de una función:
 - a. (8 puntos) Escriba un algoritmo en C (o Matlab) que tome como parámetros una función f , su derivada f' , una aproximación inicial x_0 y un valor ε de 'tolerancia', y devuelva una raíz de la función f usando el método de Newton-Raphson.
 - b. (7 puntos) Describa analíticamente las ecuaciones de convergencia del error respecto a la raíz estimada, para este método.
7. (15 puntos) Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
 - a. (8 puntos) Escriba en C (o Matlab) el algoritmo de Gauss-Seidel para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cuando la matriz A es cuadrada.
 - b. (7 puntos) Demuestre que si la matriz A tiene diagonal dominante, entonces el método garantiza la convergencia.

8. (10 puntos) Se sabe que el valor propio de una matriz A es próximo a un valor τ dado. Escriba en C (o Matlab) el método iterativo inverso que permite determinar el valor propio más próximo al valor τ inicial y su vector propio correspondiente.