Centro de Investigación en Matemáticas A. C.
Métodos Numéricos
Solución a la tarea No. 1
20 de Agosto de 2007

1. Problema 1. *Dar la definición de resolución o precisión de la máquina. Dar algún método para obtenerla.*

Solución

Las definiciones válidas para este concepto son:

- **Definición.-** La precisión de máquina es el número más pequeño que se puede representar, tal que al sumarselo a un número, por ejemplo 1, el resultado que se obtiene es mayor que éste, en nuestro caso mayor que 1.
- **Definición.-** La precisión de máquina es el número positivo más pequeño α tal que $\alpha + 1 > 1$ en dicha máquina.

Algunos métodos que se pueden utilizar para obtener la precisión de la máquina son los siguientes:

- Pseudocódigo 1.
```
ϵ = 1;
while((1+ϵ)!=1)
ϵ = ϵ/2;
return (ϵ = 2ϵ);
```
- Psudocódigo 2.
```
while(ϵ-1)==0
a = a*β;
ϵ = 1+a;
```
  donde β es la base sobre la que trabaja la máquina. ♠

2. Problema 2. *Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, determinar cuál es la solución numérica no exacta que se tiene que dar al usuario cuando se presentan los casos: (a) $b^2 \gg |4ac|$ y (b) $|4ac| \gg b^2$.*

Solución

Caso 1. Consideremos el caso en que $b^2 \gg |4ac|$. Considerando la hipótesis, las raíces que obtendremos deben de ser números reales distintos, ya que $b^2 - 4ac > 0$. Por otro lado, la computadora dará como resultado de la operación b^2-4ac la cantidad de b^2. Si consideramos la fórmula general obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\approx \frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a} \\ &\approx \frac{-b\pm|b|}{2a}. \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces, las soluciones que obtenemos son las siguientes

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 0, \\ x_2 &\approx \frac{-b}{a}. \end{aligned} \tag{2}$$

Es evidente que las soluciones x_i, $i=1,2$; tienen error numérico. Sin embargo, el hecho afecta más numéricamente a x_1. Una forma de disminuir el error es multiplicar la ecuación (1) por el numéro $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}$. Bajo esta manipulación matemática, el resultado que se presentaría al usuario para x_1 sería

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} \\ &= \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} \\ &\approx \frac{-c}{b}. \end{aligned} \tag{3}$$

Para x_2 el usuario obtiene la solución $\frac{-b}{a}$.

Caso 2. Consideremos el caso en que $|4ac|\gg b^2$. Para este caso la computadora dará como resultado de la operación b^2-4ac la cantidad de $-4ac$. Si consideramos la fórmula general obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &\approx \frac{-b\pm\sqrt{-4ac}}{2a} \\ &\approx \frac{-b\pm2\sqrt{ac}}{a}. \end{aligned}$$

Entonces, las soluciones que recibe el usuario son las siguientes

$$\begin{aligned} x_1 &\approx \frac{-b}{2a}+\sqrt{-\frac{c}{a}}, \\ x_2 &\approx \frac{-b}{2a}-\sqrt{-\frac{c}{a}}. \quad \spadesuit \end{aligned} \tag{4}$$

3. **Problema 3.** *Decir en qué casos pueden fallar numéricamente las fórmulas para calcular el ángulo entre dos vectores y dar una estrategia de solución.*

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right), \\ \theta &= \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{v}\times\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Solución

Notemos que informáticamente las funciones $\cos^{-1}$ y sen^{-1} son reales. Matemáticamente, estas funciones se piensan como complejas. Así pues, asumiendo este hecho:

Analicemos la primera fórmula. Ya que el dominio de la función $\cos^{-1}$ es el intervalo $[-1, 1]$, podemos decir que si el argumento de la función está fuera del dominio, entonces tendremos problemas numéricos. Así mismo, si el argumento se encuentra en una vecindad de la frontera del intervalo, también se presentarán errores numéricos. En partícular, este caso se presenta cuando el águlo θ se encuentra cerca de π y 0 radianes, o 180 y 0 grados; respectivamente.

Análogamente para la segunda fórmula, se tiene que el dominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$. Y por consiguiente los mismos casos que antes producirán errores numéricos. Sin embargo, para esta fórmula estos casos se presentan cuando el ángulo θ está cercano a $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} radianes$, o 270 y 90 grados

La estrategia o algoritmo de solución que se puede usar es la siguiente:

Si ($|\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}) - 1| < \epsilon)$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{v}\times\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$$

sino

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$$

donde ϵ es un numéro pequeño positivo, puede ser por ejemplo 0,000001. ♠

Observación: Nota media de la clase para esta tarea = 7.766.