

Topología: Lista 1

17 de agosto de 2026

Esta lista consta de 4 problemas. Puedes usar libremente los resultados vistos en clase, siempre que los cites con precisión al invocarlos. Cualquier resultado adicional no elemental que utilices deberá justificarse.

1. Sean d y ρ dos métricas sobre un conjunto X . Supón que existen constantes $C, D > 0$ tales que, para cualesquiera $x, y \in X$,

$$d(x, y) \leq C\rho(x, y) \quad \text{y} \quad \rho(x, y) \leq Dd(x, y).$$

Demuestra que, para todo $x \in X$ y todo $r > 0$,

$$B_\rho\left(x, \frac{r}{C}\right) \subseteq B_d(x, r), \quad B_d\left(x, \frac{r}{D}\right) \subseteq B_\rho(x, r),$$

y concluye que $\tau_d = \tau_\rho$. Aplica después este criterio a las desigualdades $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty$ para concluir que d_1 , d_2 y d_∞ inducen la misma topología en $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$.

2. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Denotemos por χ_A la función característica de A , que vale 1 en A y 0 fuera de A .

- a) Sea $S = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpiński $\tau_S = \{\emptyset, \{1\}, S\}$. Demuestra que $\chi_A: X \rightarrow S$ es continua si y sólo si A es abierto en X .
- b) Sea ahora $\mathbb{R}$ con su topología usual. Demuestra que $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto x si y sólo si $x \notin \partial A$, y concluye que $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si A es a la vez abierto y cerrado en X .
- c) Explica en una o dos frases por qué las respuestas de (a) y (b) son distintas, aunque la regla de asignación $x \mapsto \chi_A(x)$ sea la misma.

3. Considera la recta real $\mathbb{R}$ con su topología usual.

- a) Encuentra un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que los tres conjuntos

$$\partial A, \quad \text{int}(\partial A), \quad \overline{\text{int}(\partial A)}$$

sean distintos dos a dos. Justifica cada uno de los tres cálculos.

- b) Explica por qué sería imposible pedir en (a) que ∂A y $\overline{\partial A}$ fueran distintos.

4. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $q: X \rightarrow Y$ suprayectiva. Dotamos a Y de la topología final inducida por q . Llamaremos **saturación** de un subconjunto $U \subseteq X$ al conjunto $q^{-1}(q(U))$, y diremos que U es **saturado** si coincide con su saturación.

- a) Demuestra que $F \subseteq Y$ es cerrado si y sólo si $q^{-1}(F)$ es cerrado en X .
- b) Demuestra que q es abierta si y sólo si la saturación de todo abierto de X es abierta.
- c) Sea $q: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $q(x) = 1$ si $x < 0$ y $q(x) = 0$ si $x \geq 0$, con $\mathbb{R}$ en su topología usual. Determina la topología final que q induce en $\{0, 1\}$ y decide si q es abierta. Compara tu respuesta con el problema 2.