

Topología: Lista 2

31 de agosto de 2026

Esta lista consta de 4 problemas. Puedes usar libremente los resultados vistos en clase, siempre que los cites con precisión al invocarlos. Cualquier resultado adicional no elemental que utilices deberá justificarse.

1. Sean X, Y, Z espacios topológicos y sea $\{*\}$ el espacio con un solo punto. Considera las funciones

$$\alpha : (X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times (Y \times Z), \quad \alpha((x, y), z) = (x, (y, z)),$$

y

$$\lambda : X \times \{*\} \longrightarrow X, \quad \lambda(x, *) = x.$$

Para cada uno de los espacios $(X \times Y) \times Z$ y $X \times (Y \times Z)$, define las tres proyecciones coordenadas mediante composiciones de las proyecciones binarias. Sin recurrir a bases, demuestra que ambos satisfacen la propiedad universal del producto de tres factores: para todo espacio W y cualesquiera funciones continuas $f_X : W \rightarrow X$, $f_Y : W \rightarrow Y$ y $f_Z : W \rightarrow Z$, existe una única función continua $h : W \rightarrow P$ tal que $p_X h = f_X$, $p_Y h = f_Y$ y $p_Z h = f_Z$, donde P designa cualquiera de esos dos espacios y p_X, p_Y, p_Z sus proyecciones coordenadas. Verifica que α conmuta con esas proyecciones y deduce de la unicidad universal que es un homeomorfismo. Aplica el mismo argumento a λ , verificando que X , junto con id_X y la única función $X \rightarrow \{*\}$, es un producto de X y $\{*\}$.

2. Sea $A \subseteq X$ un subespacio no vacío y sea $c : A \rightarrow \{*\}$ la función constante. Denota por X/A el cociente que identifica entre sí todos los puntos de A y no realiza ninguna otra identificación. Si $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión y $q : X \rightarrow X/A$ es la proyección, define $j : \{*\} \rightarrow X/A$ mediante $j(*) = q(a)$ para cualquier $a \in A$. Esta definición no depende de la elección de a .

Demuestra que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ c \downarrow & & \downarrow q \\ \{*\} & \xrightarrow{j} & X/A \end{array}$$

es un *pushout* en **Top**. Es decir, prueba que para todo espacio Y y para cualesquiera funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : \{*\} \rightarrow Y$ tales que $f i = g c$, existe una única función continua $h : X/A \rightarrow Y$ que satisface $h q = f$ y $h j = g$.

3. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{p, q\}$, donde $p, q \notin \mathbb{N}$ y $p \neq q$. Dota a X de la colección τ formada por los conjuntos $U \subseteq X$ que satisfacen

$$p \in U \text{ o } q \in U \implies |\mathbb{N} \setminus U| < \infty.$$

Verifica que τ es una topología y que (X, τ) es T_1 . Demuestra que la sucesión $x_n = n$ converge tanto a p como a q y deduce, citando el teorema de unicidad de límites, que X no es Hausdorff. Concluye que la condición T_1 no basta para garantizar la unicidad de límites.

4. Sea $q : X \rightarrow Y$ una función continua, abierta y sobreyectiva, y define

$$R_q = \{(x, x') \in X \times X : q(x) = q(x')\}.$$

- a) La condición necesaria (si Y es Hausdorff, entonces R_q es cerrado) se demostró en clase para cualquier mapa cociente, sin usar que sea abierto. Demuestra el recíproco: si R_q es cerrado en $X \times X$, entonces Y es Hausdorff. Indica en qué paso exacto se usa que q sea abierta.
- b) Sea $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la proyección asociada a la relación

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Demuestra que π es abierta y que

$$R_\pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Concluye, usando el inciso anterior, que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es Hausdorff. Para probar que π es abierta puedes citar el criterio de saturación del problema 4(b) de la Lista 1.

- c) Sean $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_2$ dos copias de la recta real y sea

$$Q = (\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2) / \sim,$$

donde se identifica $t \in \mathbb{R}_1$ con $t \in \mathbb{R}_2$ para todo $t \neq 0$, pero no se identifican los dos orígenes. Si $\rho : \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2 \rightarrow Q$ es la proyección cociente, demuestra mediante rectángulos básicos que

$$(0_1, 0_2) \in \overline{R_\rho} \setminus R_\rho,$$

y concluye, usando la condición necesaria para que un cociente sea Hausdorff, que la recta con dos orígenes no es Hausdorff.