

Topología: Lista 3

Esta lista consta de 5 problemas. Puedes usar libremente los resultados vistos en clase, siempre que los cites con precisión al invocarlos. Cualquier resultado adicional no elemental que utilices deberá justificarse.

1. Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios no vacíos. Prueba que la suma topológica $\coprod_{j \in J} X_j$ es compacta si y sólo si cada X_j es compacto y J es finito.

2. Sea X un espacio topológico. Para $x, y \in X$, define $x \sim y$ si existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

3. Considera, con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$, los conjuntos

$$S = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}, \quad T = \overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

donde la cerradura se toma en $\mathbb{R}^2$. Puedes usar sin demostrar la igualdad que describe $\overline{S}$. Determina todas las componentes por caminos de T y concluye que T no es conexo por caminos.

4. Sean X, Y, Z espacios topológicos y sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ y $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ funciones continuas. Si $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, demuestra que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Construye una homotopía entre las composiciones.

5. Para cada espacio topológico X , sea

$$\pi_0(X) = X/\sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida en el problema 2. Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$, define

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y), \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Demuestra que $\pi_0(f)$ está bien definida y verifica que

$$\pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_0(X)}, \quad \pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$$

para todo espacio topológico X y para cualesquiera funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$.

Concluye que estas definiciones determinan un funtor $\pi_0 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$.