

Topología: Lista 4

Esta lista consta de 5 problemas. Puedes usar libremente los resultados vistos en clase, siempre que los cites con precisión al invocarlos. Cualquier resultado adicional no elemental que utilices deberá justificarse.

1. Sean X, Y espacios topológicos no vacíos, sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sea

$$j : X \longrightarrow M_f, \quad j(x) = [x, 0],$$

la inclusión del extremo libre en el cilindro de f .

- a) Demuestra que existe una función continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ si y sólo si existe una retracción $r : M_f \rightarrow X$ de j , es decir, una función continua tal que $r \circ j = \text{id}_X$.
- b) Si f es una equivalencia homotópica, demuestra que $j(X)$ es un retracto por deformación de M_f en el sentido ordinario.

2. Sea $A \hookrightarrow X$ una cofibración. Por el criterio del cilindro existe una retracción

$$R : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I.$$

Escribe $R = (R_X, R_I)$ y define

$$K(x, t) = R_X(x, t), \quad u(x) = \max_{t \in I} |t - R_I(x, t)|.$$

Justifica que $u : X \rightarrow I$ está bien definida y es continua, y demuestra que (u, K) es una presentación NDR de (X, A) . Concluye que toda cofibración determina un par NDR.

3. Sean $A \hookrightarrow X$ una cofibración y Z un espacio topológico. Si

$$r : X \times I \longrightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$$

es la retracción dada por el criterio del cilindro, usa $r \times \text{id}_Z$ y los homeomorfismos canónicos que reordenan los factores para construir una retracción

$$(X \times Z) \times I \longrightarrow (X \times Z) \times \{0\} \cup (A \times Z) \times I.$$

Deduce que $A \times Z \hookrightarrow X \times Z$ es una cofibración.

4. Sea $A \subseteq X$ un subespacio no vacío y supón que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es una cofibración. Expresa X/A como el *pushout* de $A \hookrightarrow X$ a lo largo de la función constante $A \rightarrow \{*\}$ y demuestra que la inclusión

$$\{[A]\} \hookrightarrow X/A$$

es una cofibración.

5. Considera el subespacio cerrado

$$A = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \subseteq I.$$

Demuestra que la inclusión $A \hookrightarrow I$ no es una cofibración.

Sugerencia. Usa el criterio del cilindro y considera, para cada $n \geq 1$, la imagen de $[1/(n+1), 1/n] \times \{1\}$ bajo una hipotética retracción del cilindro.