

Topología: Lista 5

Esta lista consta de 5 problemas. Puedes usar libremente los resultados vistos en clase, siempre que los cites con precisión al invocarlos. Cualquier resultado adicional no elemental que utilices deberá justificarse. En $\alpha * \beta$ se recorre primero α y después β , y $I = [0, 1]$.

1. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subespacio no vacío y conexo por caminos, $x_0 \in A$, e $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión. Demuestra que

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es sobreyectivo si y sólo si todo camino $\gamma : I \rightarrow X$ cuyos extremos pertenecen a A es homotópico, relativamente a sus extremos, a un camino $i \circ \beta$, donde $\beta : I \rightarrow A$ tiene los mismos extremos que γ .

2. Sea X un espacio topológico conexo por caminos y sea $x_0 \in X$. Demuestra que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si, para cualesquiera $x, y \in X$, todos los caminos $u : x \rightarrow y$ inducen el mismo isomorfismo de cambio de punto base

$$\beta_u : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, x).$$

3. Demuestra directamente que la función

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1, \quad p(s, t) = (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}),$$

es una función cubriente. Para ello, dado $(z, w) \in S^1 \times S^1$, exhibe un entorno abierto uniformemente cubierto por p y describe explícitamente sus hojas. Determina además la fibra $p^{-1}(z, w)$.

4. Sea $f : I \rightarrow S^1$ un lazo basado en 1.

a) Demuestra que, si f no es sobreyectivo, entonces su número de vueltas satisface $w(f) = 0$.

b) Construye un lazo sobreyectivo $f : I \rightarrow S^1$ con $w(f) = 0$ y justifica ambas propiedades.

5. Sean $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y

$$q_m : S^1 \longrightarrow S^1, \quad q_m(z) = z^m.$$

Sea $\alpha : I \rightarrow S^1$ un lazo basado en 1, sea $n = w(\alpha)$ y sea $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ el levantamiento de α por $s \mapsto e^{2\pi i s}$ que comienza en 0. Demuestra que el levantamiento de α por q_m que comienza en 1 es

$$\lambda(t) = e^{2\pi i \tilde{\alpha}(t)/m},$$

y concluye que λ es un lazo si y sólo si m divide a n .