

INSTRUCCIONES: Deberás enviar un archivo comprimido a marcos@cimat.mx que incluya la solución detallada a los problemas en un archivo pdf y los correspondientes archivos de los programas que escribiste para resolver los problemas. Los programas deberán estar apropiadamente comentados.

1. Una matriz real y simétrica tiene un eigenvalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 8. El resto de los eigenvalores es menor que 0.1 en valor absoluto.
 - a) Describe un algoritmo para determinar una base ortonormal del eigenspacio de dimensión 8 asociado al eigenvalor dominante
 - b) Construye una matriz $A \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ como se describe arriba y aplícale numéricamente el algoritmo que construiste en la parte (a)
2. Escribe un programa con un método numérico de tu elección para determinar al menos cuatro soluciones del sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\sin(x) + y^2 + \log(z) = 3$$

$$3x + 2^y - z^3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^3 = 6$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz real y simétrica con eigenvalores $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Se cumple que

$$\lambda_1 = \min_x \frac{x^T A x}{x^T x}$$

y

$$\lambda_n = \max_x \frac{x^T A x}{x^T x}$$

- a) Usa un algoritmo para optimización sin restricción para determinar λ_1 y λ_3 y los correspondientes eigenvectores x con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución única en cada caso?, por qué?

b) Usa optimización restringida para resolver el inciso anterior con la condición $x^T x = 1$. Cual es el significado del multiplicador de Lagrange en este caso?

4. Interpola la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$[0, 2]$ mediante los siguientes métodos

- a) 20 puntos equidistantes y un polinomio de grado 19
- b) 20 puntos de Chebyshev y un polinomio de grado 19
- c) 20 puntos equiespaciados y un spline natural

Haz una grafica mostrando la función y tus funciones interpolantes