1. Considera el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$, x, $b \in \mathbb{R}^n$. Además, A y b están definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

y $b_j = \cos(2\pi j/n)$. Resuelve este sistema para $n = 10$, $n = 100$ y $n = 1000$ usando

   (a) Factorización de Cholesky.

   (b) Iteración de Jacobi.

   (c) Iteración de Gauss-Seidel.

   Elige el residuo relativo $||x_{n+1} - x_n||_2/||x||_2 \leq 10^{-3}$ como criterio de paro en los métodos iterativos. Haz un cuadro donde se muestre el tiempo invertido en cada caso. Comenta.

2. Considera un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ donde $A \in M^{20\times 20}(\mathbb{R})$ está definida por $A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{((i-j)/20)^2}{2})$ para $i, j = 1, 2, ..., 20$. y

$$b = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1, 2, .., 9, \\ 1/3 & \text{si } i = 10, \\ 2/3 & \text{si } i = 11, \\ 1 & \text{si } i = 12, 13, ..., 20 \end{cases}$$

   (a) Calcula el número de condición de A.

   (b) Usa SVD para determinar la matriz A_r de rango r que mejor aproxima a A donde tu fijes el rango de A_r.

   (c) Calcula el número de condición de las matrices A_r.

   (d) Compara la solución de los sistemas $A_r x = b$ para cada r. Comenta.

Nota: Si tienes dudas o comentarios escribe a marcos@cimat.mx o pasa por mi oficina.