DINÁMICA DE FUNCIONES ELÍPTICAS

MÓNICA MORENO ROCHA

RESUMEN. Notas del minicurso ofrecido en el 1er. Taller en Dinámica Holomorfa y Representación de Semigrupos, organizado en el Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidad Cuernavaca, del 26 al 28 de noviembre, 2012. El taller fue realizado gracias al apoyo de CONACYT, CB-2010-01, No. 153850.

PARTE I: FUNCIONES ELÍPTICAS

Iniciamos con una introducción a la teoría de funciones elípticas. Si bien proporcionamos las ideas principales de la mayoría de los resultados, recomendamos ampliamente los libros de L. V. Ahlfors, [1], y de G. A. Jones & D. Singerman, [6], para mayores detalles.

1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Definición 1.1. Dada una función meromorfa $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, decimos que F es DOBLEMENTE PERIÓDICA si existen dos valores distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ para los cuales

$$F(z + \lambda_1) = F(z) = F(z + \lambda_2)$$

para toda $z \in \mathbb{C}$.

Se puede verificar que si $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (i.e., son linealmente real-dependientes), entonces tenemos dos casos: si $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Q}$, f tiene un único período, y si $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Q}$, f es constante. Por lo tanto trabajaremos únicamente con valores que sean linealmente real-independientes. Denotemos por $\tau = \lambda_2/\lambda_1$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ (en §5 restringiremos con más cuidado el dominio de τ).

Observemos que $F(z)$ es meromorfa con períodos λ_1 y λ_2 si y sólo si $f(z) = F(\lambda_1 z)$ es meromorfa con períodos 1 y τ. Por simplicidad estudiaremos las propiedades de la representación normalizada f con períodos 1 y τ. En este caso, para toda $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$f(z + n + m\tau) = f(z), \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Definición 1.2. La RETÍCULA generada por 1 y τ es el subconjunto discreto del plano complejo

$$\Lambda = \{\omega = n + m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Cuando sea necesario enfatizar los generadores, escribiremos $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$.

No es difícil ver que Λ es un grupo aditivo que actúa en $\mathbb{C}$ por translaciones $T_\omega : z \mapsto z + \omega$, para $\omega \in \Lambda$. Así pues, la ecuación (1.1) se reescribe como $f(T_\omega(z)) = f(z)$.

Definición 1.3. El PARALELOGRAMO FUNDAMENTAL de la retícula Λ es el conjunto de puntos

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + b\tau, 0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1\}.$$

Lema 1.4. *Una función doblemente periódica está completamente determinada por sus valores en el paralelogramo fundamental. En general, dicha función está determinada por sus valores en $P_0 + h$, para $h \in \mathbb{C}$ arbitrario.*

La demostración se basa en la siguiente relación de congruencia: diremos que $z, w \in \mathbb{C}$ son CONGRUENTES MÓDULO Λ si $z - w \in \Lambda$. En dado caso escribimos $z \sim w$. Para verificar que P_0 es una región fundamental de f, debemos mostrar que dado $z \in \mathbb{C}$ arbitrario, existe $\tilde{z} \in P_0$ tal que $z \sim \tilde{z}$. Esto es verdad si al escribir

$$z - \tilde{z} = a + b\tau,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, podemos mostrar que a y b son en realidad números enteros. También es necesario mostrar que $\tilde{z}$ es el único representante en P_0 de su clase de congruencia módulo Λ.

Finalmente, para $h \in \mathbb{C}$ y $\tilde{z} + h \in P_0 + h$, se tiene

$$f(z) = f(\tilde{z}) = f(\tilde{z} + h).$$

Notemos que P_0 da lugar a una TESELACIÓN del plano complejo, pues

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (P_0 + n + m\tau).$$

Una consecuencia del Lema 1.4, la teselación y el Teorema de Liouville es

Teorema 1.5. *Toda función entera y doblemente periódica se reduce a una constante.*

Definición 1.6. Una FUNCIÓN ELÍPTICA es una función meromorfa, no constante y doblemente periódica.

Denotaremos por $\mathcal{E}_\Lambda$ el conjunto de todas las funciones elípticas definidas sobre la retícula Λ. En §4 veremos que $\mathcal{E}_\Lambda$ forma un campo con las operaciones de adición y producto de funciones.

2. Ceros, polos y orden

Ya que una función elíptica es meromorfa, se sigue que f debe tener un número finito de ceros y polos en P_0 (o en cualquier $P_0 + h$). Supongamos que f tiene $N_0 \geq 0$ ceros y $N_\infty \geq 1$ polos en P_0.

Una consecuencia del Teorema de Residuo es

Teorema 2.1. *$f|P_0$ tiene dos o más polos, contando multiplicidades.*

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ∂P_0 no contiene ningún polo de f (si los tiene, existe un valor h suficientemente pequeño tal que $\partial(P_0 + h)$ no contiene polos). Entonces por el Teorema del Residuo,

$$\int_{\partial P_0} f dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N_\infty} \mathrm{Res}(f, b_j),$$

donde cada $b_j \in P_0$ es un polo de f. Ya que las integrales sobre los lados opuestos del paralelogramo fundamental se cancelan, entonces la integral de línea es idénticamente cero. Por otro lado, como el residuo de un polo no puede ser cero, se concluye que existen al menos dos polos cuyos residuos son inversos aditivos entre sí.

Definimos el ORDEN de una función elíptica como el número de polos en el paralelogramo fundamental. Escribimos $\mathrm{ord}(f) = N_\infty$. Una consecuencia del Principio del Argumento es el siguiente.

Teorema 2.2. *Si $f \in \mathcal{E}_\Lambda$ con ord$(f) = N_\infty$, entonces f tiene exactamente N_∞ ceros en P_0.*

El Principio del Argumento nos dice

$$\int_{\partial P_0} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i (N_0 - N_\infty),$$

pero la integral es de nuevo cero por la cancelación de integrales a lo largo de los lados paralelos. Por lo tanto $N_0 = N_\infty$.

3. Función $\wp$ de Weierstrass

Dada una retícula $\Lambda = \langle 1, \tau\rangle$, buscamos la función elíptica con un único polo de multiplicidad 2 en P_0. En particular, queremos el polo en el punto $0 \in \Lambda$ (y por lo tanto en todo elemento de la retícula).

Dicha función es conocida como la función $\wp$ de Weierstrass y está definida por la expresión

$$\wp(z) = \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big).$$

Esta serie es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ y uniformemente convergente en compactos del mismo conjunto. Algunas propiedades de $\wp$ que podemos enlistar son:

1. es meromorfa con polos dobles en cada $\omega \in \Lambda$,
2. es doblemente periódica con períodos 1 y τ,
3. tiene orden 2 y es una función par.

Las demostraciones de estas propiedades no son directas (salvo la paridad y su condición meromorfa), pueden consultarse en [1] o [6]. En cambio, para su derivada

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -2\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{(z-\omega)^3}\\ &= -2\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n+m\tau)^3}\end{aligned} \tag{3.1}$$

es directo verificar de su expresión que $\wp'$ es meromorfa, doble periódica con períodos 1 y τ (pues substituir z por $z+1$ o $z+\tau$ no cambia la serie), tiene polos en Λ de orden 3 y es claramente impar.

Usando la imparidad y doble periodicidad de $\wp'$ se sigue

$$\wp'(\frac{1}{2}) = -\wp'(-\frac{1}{2}) = -\wp'(-\frac{1}{2}+1) = -\wp'(\frac{1}{2})$$

de aquí que $1/2$ es punto crítico de $\wp$. Aplicando argumentos similares a los valores $\tau/2$ y $(\tau+1)/2$ se obtiene que los puntos críticos de $\wp$ en el paralelogramo fundamental son

$$\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}.$$

Estos puntos son conocidos como períodos medios de la retícula $\Lambda = \langle 1, \tau\rangle$. En general, para cualquier retícula $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2\rangle$ los puntos críticos de $\wp$ en el plano complejos son

$$\mathrm{Crit}(\wp_\Lambda) = \left\{ \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \right\} + \Lambda.$$

Notemos que los períodos medios son todos los ceros que $\wp'$ puede tener en P_0 (pues $\wp'$ es de orden 3), lo que implica que cada punto crítico de $\wp$ es simple. Es usual denotar los valores críticos de $\wp$ por

$$e_1 = \wp(1/2),\ e_2 = \wp(\tau/2),\ e_3 = \wp((\tau+1)/2).$$

Notemos que para $i \neq j$, $e_i \neq e_j$, pues de otra forma existirían al menos cuatro soluciones a la ecuación $\wp(z) = e_i$, contradiciendo $\mathrm{ord}(\wp) = 2$.

Teorema 3.1. *Las funciones $\wp$ y $\wp'$ satisface la ecuación diferencial*

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

Si denotamos por $Q(z)$ el polinomio $4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)$, entonces la demostración del teorema anterior se basa en verificar que $(\wp'(z))^2$ y $Q(\wp(z))$ tienen ceros dobles en los períodos medios (y sus transladados por Λ). Por otro lado, tanto $Q(\wp)$ como $(\wp'(z))^2$ tienen polos de orden 6 (2^3 y 3^2, respectivamente) en los puntos de la retícula. Esto implica que $(\wp')^2/Q(\wp)$ en entera y doble periódica, por lo tanto, constante. Un cálculo directo muestra que la constante debe ser 4.

Como el origen es un polo de orden dos para $\wp$, podemos representarla por medio de su serie de Laurent,

$$\wp(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + \mathcal{O}(z^6), \tag{3.2}$$

donde $g_2 = g_2(\tau) = 60E_4(\tau)$ y $g_3 = g_3(\tau) = 140E_6(\tau)$ son llamados INVARIANTES MODULARES asociados a $\wp$ en la retícula Λ, y donde

$$E_k(\tau) \ = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n+m\tau)^k} = \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{\omega^k},$$

son las SERIES DE EINSENSTEIN. Estas series son convergentes en $\mathbb{H}^+$ para $k \geq 3$ y definen funciones holomorfas. De hecho, $E_k(\tau) \equiv 0$ para k impar. Las series además satisfacen $E_k(\tau+1) = E_k(\tau)$ y $E_k(\tau) = \tau^{-k} E_k(-1/\tau)$.

Es posible demostrar que la ecuación diferencial del Teorema 3.1 puede reescribirse como

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Al comparar coeficientes en ambas ecuaciones obtenemos las siguientes relaciones entre valores propios e invariantes modulares:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \qquad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

4. Campo de funciones elípticas

Dado $\tau \in \mathbb{H}^+$ y $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$, denotemos por $\mathcal{E}_\Lambda$ el conjunto de todas las funciones elípticas sobre la retícula Λ. Si f, g pertenecen a $\mathcal{E}_\Lambda$, entonces $f+g$, $f-g$, $fg \in \mathcal{E}_\Lambda$, y si $g \neq 0$, entonces $1/g \in \mathcal{E}_\Lambda$. Esto nos dice que el conjunto de todas las funciones elípticas sobre Λ es un campo con las operaciones de adición y multiplicación.

No es difícil ver que el subconjunto de todas las funciones elípticas pares forman un subcampo de $\mathcal{E}_\Lambda$. Denotemos tal subcampo por $\mathcal{E}'_\Lambda$.

Teorema 4.1. *Si $f \in \mathcal{E}'_\Lambda$ entonces existe una función racional R de grado $d \geq 0$ tal que $f = R \circ \wp$. En general, para cualquier función racional $f \in \mathcal{E}_\Lambda$, podemos encontrar funciones racionales R_1, R_2 con grados $d_1, d_2 \geq 0$ para las cuales*

$$f = R_1 \circ \wp + \wp' R_2 \circ \wp.$$

Observación 4.2. En otras palabras, $\mathcal{E}'_\Lambda$ coincide con el campo racional de $\wp$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, esto es $\mathcal{E}'_\Lambda = \mathbb{C}(\wp)$. Similarmente, $\mathcal{E}_\Lambda = \mathbb{C}(\wp, \wp')$.

La demostración del teorema inicia con el caso de una función elíptica par $f \in \mathcal{E}'_\Lambda$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z = 0$ no es cero o polo de f (en caso contrario, existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que $f\wp^m$ es elíptica par sin ceros o polos en el origen). Debido a que $\wp$ tiene orden 2, la ecuación

$$\wp(z) - \wp(a) = 0$$

tiene dos soluciones en el paralelogramo fundamental. En particular,

- si a es un período medio, entonces hay un único cero de orden 2,
- de otra forma, hay dos ceros simples en a y $-a$.

Por otro lado, como f es par, a es un cero de f si y sólo si $-a$ es también un cero. Pero $a \sim -a$ bajo la congruencia módulo Λ si y sólo si $2a \in \Lambda$. Por lo tanto

$$a \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2} \right\} + \Lambda,$$

lo que implica que a es un cero de orden par (similarmente, si b es un polo, éste también tiene orden par).

Si enlistamos los ceros y polos de f por $a_1, -a_1, \ldots, a_m, -a_m$ y $b_1, -b_1, \ldots, b_m, -b_m$ (contando multiplicidades) la función elíptica

$$F(z) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \wp(z) - \wp(a_j)}{\prod_{j=1}^{m} \wp(z) - \wp(b_j)}$$

tiene los mismos ceros y polos de f. Por lo tanto f/F es holomorfa y doble periódica, y por el Teorema 1.5, constante, $f/F = c$. La función racional buscada es

$$R(z) = c\frac{\prod_{j=1}^{m}(z - \wp(a_j))}{\prod_{j=1}^{m}(z - \wp(b_j))}.$$

Si f representa una función elíptica general, entonces f puede escribirse como la suma $h + g$ donde h es una función par y g impar. Ya que $g/\wp'$ es par, aplicamos el resultado anterior a h y a $g/\wp'$ para encontrar las funciones racionales R_1 y R_2 buscadas.

5. Retículas

Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ linealmente real-independientes y con $\mathrm{Im}(\lambda_2/\lambda_1) > 0$, consideremos la retícula $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. Denotaremos por Λ_τ la retícula con generadores 1 y τ. Ya que cada función elíptica está definida a partir de los generadores de una retícula, estudiemos primero dos propiedades importantes de estos grupos aditivos.

Generadores, bases y módulos: los valores λ_1, λ_2 son generadores de $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ y forman una base para la retícula. En el caso de la retícula Λ_τ decimos que $\{1, \tau\}$ forma su base canónica.

Si existen μ_1, μ_2 valores linealmente real-independientes, con $\mathrm{Im}(\mu_2/\mu_1) > 0$ y que también generan la retícula Λ, entonces existe un elemento $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ que transforma el vector (μ_1, μ_2) al vector (λ_1, λ_2).

Análogamente, si los módulos $\tau = \lambda_2/\lambda_1$ y $\tau' = \mu_2/\mu_1$ tienen parte imaginaria positiva, entonces existe un elemento γ del grupo modular

$$\Gamma = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

tal que $\gamma(\tau) = \tau'$. El grupo modular actúa en el semiplano superior $\mathbb{H}^+$ y su acción determina una región fundamental primitiva, $\mathcal{B}$, definida como el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{si } |z| > 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2};\ \text{si } |z| = 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

De ahora en adelante elegiremos módulos en $\mathcal{B}$. Ver Figura 1.

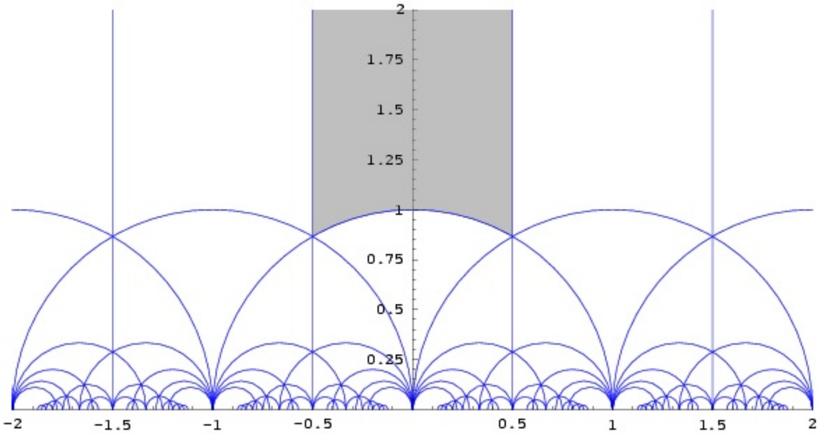

Figura 1. La acción de Γ sobre $\mathbb{H}^+$ origina una teselación en triángulos hiperbólicos acotados por las curvas en azul. La región sombreada representa el interior de $\mathcal{B}$. Imagen tomada de [9].

Similitud: dos retículas son similares si difieren por un múltiplo constante no nulo. En otras palabras, toda retícula de la forma

$$k\Lambda = \langle k\lambda_1, k\lambda_2 \rangle$$

es similar a Λ para cada $k \in \mathbb{C}^*$. Asi pues, Λ_τ es similar a Λ pues $k\Lambda_\tau = \Lambda$ para $k = \lambda_1$. La similitud entre retículas es una relación de equivalencia, por lo que a cada clase de equivalencia

$$[\Lambda_\tau] := \{k\Lambda_\tau \mid k \in \mathbb{C}^*\}$$

define una forma. Su clasificación se base en la forma geométrica y simetrías que cada retícula exhibe.

Clasificación de formas

1. $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ es real rectangular si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in i\mathbb{R}$. Todo elemento de la clase de similitud de Λ es llamada rectangular.
2. $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ es real rómbica si $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Elementos en $[\Lambda]$ son llamadas retículas rómbicas.
3. Λ es cuadrada si $i\Lambda = \Lambda$, en otras palabras, $\Lambda = \langle \lambda, i\lambda \rangle$ para $\lambda > 0$.
4. Λ es triangular si $\Lambda = e^{2\pi i/3}\Lambda$, esto es, si sus generadores son $\lambda e^{\pi i/3}$ y $\lambda e^{-\pi i/3}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

En términos del módulo, las latices rectangulares son aquellas donde τ pertenece a la intersección del eje imaginario $z = iy$ con $\mathcal{B}$. El módulo $\tau = i$

representa en $\mathcal{B}$ todas las retículas cuadradas. Las rómbicas están localizadas en la recta $\tau = -1/2 + iy$, $y > 0$ y $|\tau| = 1$ con $\mathrm{Re}(\tau) < 0$. Finalmente, el módulo $\tau = e^{2\pi i/3}$ representa todas las retículas triangulares en $\mathcal{B}$.

Parte II: Dinámica de funciones elípticas

Dada una retícula $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$, queremos definir una familia uniparamétrica de funciones elípticas y estudiar sus propiedades dinámicas. Nos concentraremos en estudiar la dinámica de la función $\wp$ de Weierstrass, que representa, actualmente, la función elíptica más estudiada en la literatura actual.

6. Familias holomorfas

Definición 6.1. Una FAMILIA HOLOMORFA DE FUNCIONES MEROMORFAS sobre un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo[1], es la aplicación $\Phi : X \times \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, definida por

$$\Phi : (\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$$

donde para cada λ, $f_\lambda : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa y Φ depende holomorfamente de λ. X es llamado el ESPACIO PARAMÉTRICO de la familia.

Nuestro objetivo es definir una familia holomorfa de funciones elípticas. Para ello, sea $\tau \in \mathcal{B}$ fijo y denotemos por f_τ la función elíptica definida sobre la retícula Λ_τ. Entonces, el dominio $X = \mathbb{C}^*$ define naturalmente el espacio de parámetros de la familia

$$\Phi : (k, z) \mapsto f_{k\tau}(z),$$

donde para cada $k \in \mathbb{C}^*$, $f_{k\tau}$ es una función elíptica definida sobre la retícula $\Lambda = \langle k, k\tau \rangle$ que pertenece a la misma forma de Λ_τ.

En el caso de las funciones $\wp$ y $\wp'$, las familia holomorfas asociadas satisfacen las siguientes PROPIEDADES DE HOMOGENEIDAD: para todo $k \in \mathbb{C}^*$,

$$\wp_{k\tau}(kz) = \frac{1}{k^2}\wp_\tau(z),$$
$$\wp'_{k\tau}(kz) = \frac{1}{k^3}\wp'_\tau(z).$$

[1]De forma más general, X es una variedad compleja de dimensión $n \geq 1$.

7. Dinámica de funciones elípticas

Debido a que cada función elíptica es a la vez una función meromorfa, existen puntos $z \in \mathbb{C}$ para los cuales su n-ésima iteración, esto es $f^n(z)$, no está bien definida (si $f^n(z) = \infty$, decimos que z es un PREPOLO de f). Así pues, la iteración de una función meromorfa debe restringirse al abierto más grande donde para cada punto z, $f^n(z)$ está bien definido para todo entero $n \geq 0$. Este abierto es

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\infty)}.$$

Por el Teorema 2.1, cada $f \in \mathcal{E}_\Lambda$ tiene al menos dos polos (contando multiplicidad), por lo que la cardinalidad del conjunto $\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\infty)}$ es infinita. Y debido a que

$$f\left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\infty)}\right) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\infty)},$$

se sigue del Teorema de Montel que el CONJUNTO DE JULIA de f es

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(\infty)}.$$

En consecuencia, el CONJUNTO DE FATOU se define por $\mathcal{F}(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{J}(f)$.

Denotemos por $\operatorname{Sing}(f)$ la clausura del conjunto de todos los valores críticos y asintóticos de la función meromorfa f. Si este conjunto tiene cardinalidad finita, decimos que f pertenece a la CLASE $\mathcal{S}$ de funciones meromorfas.

Notemos que cada función elíptica $f \in \mathcal{E}_\Lambda$ tiene un número finito de valores críticos, pues $f|P_0$ tiene un número finito de puntos críticos en P_0 y si $c \in \operatorname{Crit}(f|P_0)$, entonces $f(c) = f(c+\omega)$ para toda $\omega \in \Lambda$. Más aún, la doble periodicidad de cada función elíptica implica que no puede tener valores asintóticos. Por lo tanto $\mathcal{E}_\Lambda \subset \mathcal{S}$. En consecuencia,

Teorema 7.1 (Eremenko & Lyubich; Baker)**.** *Si $f \in \mathcal{E}_\Lambda$, entonces f no tiene dominios de Baker ni dominios errantes.*

Teorema 7.2 (Clasificación de componente de Fatou)**.** *Si U es una componente de Fatou periódica de una función elíptica, entonces U es uno de los siguientes dominios: de Böttcher, de Kœnigs, de Leau, disco de Siegel o anillo de Herman.*

Para un estudio completo de la dinámica de funciones meromorfas y propiedades de la clase $\mathcal{S}$ se recomienda consultar [2].

8. Dinámica de $\wp$

En la parte final de estas notas, nos concentraremos en las propiedades dinámicas de la familia $\wp_{k\tau}$ (y familias relacionadas) para ciertos valores de $\tau \in \mathcal{B}$. La mayoría de los resultados a continuación descritos son tomados de los trabajos de J. Hawkins y L. Koss (ver [4], [5], [3] y sus referencias).

El siguiente resultado nos muestra cómo las simetrías de la retícula son reflejadas en los conjuntos de Julia y Fatou.

Teorema 8.1 (Hawkins & Koss, 2002)**.** *Para Λ, una retícula arbitraria, se cumple:*

1. $\mathcal{J}(\wp_\Lambda) + \Lambda = \mathcal{J}(\wp_\Lambda)$, $\mathcal{F}(\wp_\Lambda) + \Lambda = \mathcal{F}(\wp_\Lambda)$.
2. $(-1)\mathcal{J}(\wp_\Lambda) = \mathcal{J}(\wp_\Lambda)$, $(-1)\mathcal{F}(\wp_\Lambda) = \mathcal{F}(\wp_\Lambda)$.
3. *Si Λ es real (i.e. $\overline{\Lambda} = \Lambda$) entonces* $\overline{\mathcal{J}(\wp_\Lambda)} = \mathcal{J}(\wp_\Lambda)$.
4. *Si $U \subset \mathcal{F}(\wp_\Lambda)$ tal que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ o $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$, entonces U es simétrica con respecto a $\mathbb{R}$ o $i\mathbb{R}$.*
5. *Si $U \subset \mathcal{F}(\wp_\Lambda)$ y contiene un punto crítico c, entonces U es simétrica con respecto a c (i.e., $c + z \in U$ si y sólo si $c - z \in U$).*

El siguiente resultado muestra que para ciertas formas retículares, si ninguno de los valores críticos es un polo de $\wp$, entonces los casos de la clasificación de componente periódicas se reducen, [4].

Teorema 8.2. *Si $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ es una retícula rectangular, rómbica cuadrada o triangular y si $g_3(\lambda_2/\lambda_1) > 0$, entonces $\wp_\Lambda$ no tiene discos de Siegel.*

En contraste, J. Clemons demuestra en su tesis doctoral [3],

Teorema 8.3 (Clemons, 2010)**.** *Si Λ es una retícula cuadrada (y por lo tanto $g_3 = 0$), entonces $\wp_\Lambda$ tiene discos de Siegel.*

En el caso de anillos de Herman, en [5] se demostró que

Teorema 8.4 (Hawkins & Koss, 2004)**.** *Para toda retícula Λ, $\wp_\Lambda$ no tiene anillos de Herman.*

Para familias relacionadas a la función $\wp$ de Weierstrass, en [7] se establece

Teorema 8.5 (Koss, 2009)**.** *La función elíptica par* $1/\wp_\Lambda$ *no tiene anillos de Herman sobre latices triangulares.*

El resultado anterior ha sido extendido en [8] a otras formas reticulares.

Teorema 8.6 (Pérez Lucas, 2012)**.** *Para latices rectangulares cuadradas (y por lo tanto, rómbicas cuadradas),* $1/\wp_\Lambda$ *no tiene anillos de Herman.*

Problema 8.7. *¿Es verdad que sobre cualquier retícula* Λ*,* $1/\wp_\Lambda$ *no tiene anillos de Herman?*

Otro problema interesante es la conectividad del conjunto de Julia para la función $\wp$ de Weiestrass (y funciones relacionadas). Se ha demostrado que $\mathcal{J}(\wp_\Lambda)$ es siempre conexo cuando Λ es una retícula triangular (Hawkins & Koss) o cuadrada (Clemons). En particular se sabe

Teorema 8.8. *Si* $\Gamma = \langle \gamma, i\gamma \rangle$ *con invariantes* $g_2 = 4, g_3 = 0$ *y* $\Lambda = \langle \lambda, i\lambda \rangle$ *retícula rectangular con* $\lambda = \sqrt{\gamma^2/m}, m \in \mathbb{N}$*, entonces* $\mathcal{J}(\wp_\Lambda)$ *es toda la esfera de Riemann.*

Problema 8.9. *Independientemente de la forma reticular, ¿es el conjunto de Julia de* $\wp_\Lambda$ *siempre conexo?*

En contraste, la función $1/\wp_\Lambda$ puede exhibir conjuntos de Julia totalmente disconexos para ciertas formas reticulares. Por ejemplo, en [7] se demostró que para latices triangulares,

Teorema 8.10 (Koss, 2009)**.** *Para el módulo* $\tau = \exp(2\pi i/3)$*, la familia* $1/\wp_{k\tau}$*,* $k \in \mathbb{C}^*$*, tiene conjunto de Julia conexo o totalmente disconexo. El conjunto de Fatou nunca es vacío.*

En [8] se propone extender este resultado sobre retículas cuadradas reales, esto es, cuando $\tau = i$.

Problema 8.11. *¿Es verdad que el conjunto de Julia de* $1/\wp_\Lambda$ *siempre satisface la dicotomía exhibida en latices triangulares y cuadradas reales?*

Referencias

[1] Ahlfors, L. V. Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 págs.

[2] Bergweiler, W. *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **29** (1993), no. 2, 151–188.

[3] Clemons, J. J. *Dynamical properties of Weierstrass elliptic functions on square lattices*, Thesis (Ph.D.), The University of North Carolina at Chapel Hill. 2010.

[4] Hawkins, J. & Koss, L. *Ergodic properties and Julia sets of Weierstrass elliptic functions*, Monatsh. Math., **137**, (2002), no. 4, 273–300.

[5] Hawkins, J. & Koss, L. *Parametrized dynamics of the Weierstrass elliptic function*, Conform. Geom. Dyn., **8**, (2004), 1–35 (electronic).

[6] Jones, G. A. & Singerman, D. Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press, Cambridge, 1987. xiv+342 págs.

[7] Koss, L. *A fundamental dichotomy for Julia sets of a family of elliptic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **137** (2009), no. 11, 39273938.

[8] Pérez Lucas, P. *Dinámica de funciones elípticas.* Tesis (Maestría). Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, México. 2012. En proceso.

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/File:ModularGroup-FundamentalDomain-01.png`.

Centro de Investigación en Matemáticas
E-mail address: `mmoreno@cimat.mx`