La ecuación de Laplace y transformaciones conformes

Dra. Mónica Moreno Rocha (CIMAT)

1. Introducción

Estas notas están basadas en el mini-curso *La ecuación de Laplace y transformaciones conformes sobre el plano complejo*, impartido del 13 al 15 de diciembre del 2017 en la Escuela de Matemáticas Aplicadas y Control, EMAC, llevada acabo en las instalaciones del Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnología, IPICyT. Estas notas tiene por objetivo presentar una introducción a la ecuación de Laplace, las funciones holomorfas, armónicas y a las aplicaciones conformes, las cuales facilitan el tratamiento de ciertos problemas con valores de frontera sobre dominios planos.

En la primera parte revisaremos las propiedades de funciones de variable compleja, sus derivadas y las funciones armónicas. Esto dará paso al planteamiento de problemas de frontera asociados a la ecuación de Laplace y trabajaremos algunos ejemplos concretos. Finalmente, veremos como las aplicaciones conformes ayudan a reducir problemas de frontera sobre dominios complicados a problemas sobre el disco o el semiplano superior.

Estas notas están escritas bajo la suposición de que el lector está familiarizado con integración en variable real y propiedades básicas de los números complejos.

Notación

- $\mathbb{C}$ denota el plano complejo, el cual forma un campo con las operaciones de suma y producto.
- $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$ denotan, respectivamente, el disco unitario $|z| = 1$ y el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- Ω es un conjunto abierto, no vacío y conexo de $\mathbb{C}$, esto es, Ω es un dominio.
- Si $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto dado, su cerradura se denota por $\overline{U}$.
- $D(z_0, r)$ denota un disco abierto centrado en z_0 y de radio r.

2. Funciones Holomorfas

El concepto de continuidad para funciones de variable compleja es muy similar a su contraparte real: dado un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, consideremos una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dicha función se dice continua en $z_0 \in \Omega$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in \Omega$ para el cual $|z - z_0| < \delta$ se satisface $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Análogamente, f es continua en z_0 si para toda sucesión $z_1, z_2, \ldots \in \Omega$ para la cual $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, se satisface $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = z_0$. Finalmente, decimos que f es continua en todo Ω si lo es en cada punto de Ω.

► Una consecuencia de la desigualdad triangular es que si f es continua, entonces $z \mapsto |f(z)|$ es una función real-valuada y también continua.

Teorema 2.1. *Si $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto no vacío y $f : E \to \mathbb{C}$ es continua, entonces f es una función acotada y su máximo y mínimo se alcanzan en E.*

La demostración de este resultado es similar para el caso de variable real y se da por sentado.

Definición 2.2 (Función holomorfa)**.** Dado un dominio Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, decimos que f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si el cociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \tag{2.1}$$

converge a un único límite cuando $h \to 0$ (donde $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$ y $z + h \in \Omega$). Si el límite existe, entonces decimos que la derivada (compleja) de f en z_0 esta dada por

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

► Decimos que f es holomorfa en Ω si lo es en cada punto del dominio. En dado caso escribiremos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
► Si $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado, decimos que f es holomorfa en E si lo es en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ para el cual $E \subset U$. Esto es, ser holomorfo es una condición abierta.

Ejemplo 2.3. Usando la definición de límite, veamos que $f(z) = \bar{z}$ no es holomorfa en todo el plano complejo. Efectivamente, para $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario, si calculamos el cociente en (2.1), obtenemos

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = e^{-2i\theta}$$

para $h = |h|e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Esto nos dice que el límite depende de la dirección en la que h converge a cero, y por lo tanto no es único: por ejemplo, si $h \to 0$ sobre la línea real positiva (esto es $\theta = 0$) ó si $h \to 0$ sobre el eje imaginario positivo (esto es, $\theta = \pi/2$), los límites son 1 y -1, respectivamente.

Contrastemos la definición de derivada compleja con la de derivada real. Para ello, utilicemos la siguiente notación: dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(f) = u$, $\mathrm{Im}(f) = v$, entonces podemos reinterpretar f como una función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Definición 2.4 (Derivada real)**.** Una función $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es real-diferenciable en un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ si existe una transformación lineal $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{|F(P_0 + H) - F(P_0) - J(H)|}{|H|} \to 0$$

cuando el número $H \in \mathbb{R}^2$ converge a cero en norma. Si F es real-diferenciable en P_0, entonces J es llamada la derivada de F en P_0. En su expresión matricial, se tiene

$$J = J_F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

donde cada entrada es una función continua. J_F es conocida como la matriz Jacobiana de F en (x_0, y_0).

2.1. Relación entre J_F y f'

Si f es holomorfa en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, esto implica que las parciales con respecto a x y a y existen y son iguales entre sí, pues opr definición, el límite de (2.1) es el mismo en cualquier dirección tomada. Entonces, si $h = h_1 + ih_2$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h_2=0 \\ h_1 \to 0}} \frac{f(x_0 + h_1 + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) && (2.2) \\ &= \lim_{\substack{h_1=0 \\ h_2 \to 0}} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih_2) - f(x_0 + iy_0)}{ih_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) && (2.3) \end{aligned}$$

Tomando parte real e imaginaria de la expresión $\partial_x f(z_0) = -i\partial_y f(z_0)$ y reescribiendo las parciales con respecto a u y v, se obtienen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto z_0, dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

Problema 2.5. *Mostrar que si f es holomorfa en z_0 (y las primeras parciales de u y v son continuas) entonces F es real-diferenciable y se satisface*

$$\det J_F(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2.$$

▶ Notemos que la existencia del límite del cociente en (2.1) *no implica* que las parciales de f con respecto a x y a y sean continuas. Sin embargo, más adelante veremos a partir del Corolario 2.12 que no sólo u y v son clase C^1, de hecho, tendrán parciales bien definidas y continuas para todos los órdenes.

Teorema 2.6. *Sea $f = u + iv$ una función complejo-valuada definida sobre un dominio Ω. Si u, v son diferenciables con derivadas parciales continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann descritas en (2.4) en todo Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Ejemplo 2.7 (Funciones Analíticas)**.** Una función analítica es aquella que se expresa como una serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

cuyo dominio de definición es el disco de convergencia $|z - z_0| < R$, y R es el radio de convergencia de la serie, con $0 \leq R \leq +\infty$. De la Fórmula de Hadamard, se cumple que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Si $R = 0$, f se reduce a la función constante $f(z) = z_0$, y si $R = +\infty$, decimos que f es una función entera. La convergencia de la serie es absoluta en el disco de convergencia, uniforme para todo disco $|z - z_0| \leq r$, para cualquier $r < R$, y diverge en $|z - z_0| > R$.
Dos ejemplos de funciones analíticas alrededor de $z_0 = 0$ son

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

con $R = \infty$ (es decir, e^z es entera), y

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

con $R = 1$.

Teorema 2.8. *Toda función analítica de la forma* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *es una función holomorfa sobre su disco de convergencia. Además, su derivada vuelve a ser una función analítica dada por*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

definida sobre el mismo disco de convergencia $|z - z_0| < R$.

▶ Este resultado nos dice que toda función analítica es a su vez una función holomorfa. Nos interesa demostrar lo contrario: toda función holomorfa es analítica. Para ello, debemos trabajar con la integración de funciones holomorfas sobre curvas.

2.2. Integración

sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva con una parametrización dada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(t)$. Si $\gamma(t)$ es diferenciable en todo $[a, b]$ (ó salvo en un número finito de puntos), decimos que γ es suave (a trozos). Si $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ sólo cuando $t_1 = t_2$, decimos que γ es simple, y será cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Supondremos también que la parametrización elegida satisface $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.
Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y γ es suave, entonces

$$\int_\gamma f(w)dw := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{2.5}$$

▶ La continuidad de la función f y la compacidad de la curva γ son suficientes para que la integral definida en (2.5) sea finita, como lo comprueba el siguiente resultado.

Proposición 2.9. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *es continua y* $\gamma \subset \Omega$ *es suave, se cumple*

$$\left| \int_\gamma f(w)dw \right| \leq \max_{w \in \gamma} |f(w)| long(\gamma)$$

donde $long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ *es la longitud de la curva.*

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de integración de funciones holomorfas.

Teorema 2.10 (Teorema de Cauchy en el disco unitario)**.** *Si* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ *entonces*

$$\int_\gamma f(w)dw = 0$$

para toda curva suave (a trozos) cerrada en $\mathbb{D}$.

El resultado es más general, pues se cumple no sólo en $\mathbb{D}$, sino en cualquier dominio simplemente conexo del plano complejo. Para nosotros, será suficiente esta versión. La idea de la demostración se basa en la existencia de una primitiva en $\mathbb{D}$. En efecto, se puede definir una primitiva de f dada por

$$F(z) = \int_{\gamma_0^z} f(w)dw, \quad z \in \mathbb{D}$$

donde γ_0^z define una curva poligonal constituida por rectas horizontales y verticales que une el origen con el punto z. Luego, como f tiene primitiva, la conclusión del teorema de Cauchy se sigue de que γ es una curva cerrada.

▶ Del Teorema de Cauchy se desprenden una gran variedad de resultados que cumplen las funciones holomorfas. Entre ellas, está el siguiente teorema que será fundamental para la solución de la ecuación de Laplace.

Teorema 2.11 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ arbitrario y $r > 0$ suficientemente pequeño para que el disco $D = D(z_0, r)$ cumpla que su cerradura esté también contenida en Ω. Si C_r denota el círculo $|z - z_0| = r$ y se le asigna orientación positiva, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{2.6}$$

para toda $z \in D$.

Corolario 2.12. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f tiene derivadas complejas de todos los órdenes en Ω. Para cualquier disco D y con frontera C_r como en el teorema anterior, la n-ésima derivada de f tiene una representación integral de la forma*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

para toda $z \in D$.

▶ Este teorema implica que si f es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$, podemos encontrar un radio $R > 0$ para el cual $D(z_0, R)$ esté compactamente contenido en Ω y en el cual, se cumple

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde los coeficientes están definidos por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

▶ Concluimos que una función es holomorfa si y sólo si es analítica. Con ello, podemos prescindir de la hipótesis de continuidad en las primeras parciales de u y v en el Problema 2.5 y concluir directamente que diferenciabilidad compleja implica diferenciabilidad en el sentido real.

3. Funciones Armónicas

La ecuación de Laplace en dos dimensiones es una ecuación diferencial parcial definida por la expresión

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

donde $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función escalar al menos de clase C^2 y Δ denota el operador de Laplace, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Definición 3.1. La función $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica si

- sus primeras y segundas parciales existen y son continuas,
- y u es solución a la ecuación de Laplace, esto es $\Delta u = 0$.

Teorema 3.2. *Si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces u y v son funciones armónicas.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω, lo que implica que las derivadas de todos los órdenes existen y son continuas. Luego, las parciales de u y de v existen y son continuas para todos los órdenes. Resta concluir que u y v satisface la ecuación de Laplace. Para el caso de u, utilizando la primera ecuación de Cauchy-Riemann, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

donde la continuidad garantiza el intercambio entre parciales. Usando la segunda expresión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

por lo tanto $\Delta u = 0$ en todo Ω. El argumento es similar para el caso de v. □

Definición 3.3. Si $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y $v : \Omega \to \mathbb{R}$ es otra función armónica que satisface $u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$, decimos que v es una función armónica conjugada a u.

► Es fácil ver que v es única salvo adición de una constante.

Ejemplo 3.4. La función $u(x, y) = xy$ es claramente un función bien definida en todo $\mathbb{R}^2$, sus primeras parciales son $\partial u/\partial x = y$, $\partial u/\partial y = x$ y por lo tanto, $\partial^n u/\partial x^n = \partial^n u/\partial y^n = 0$, para todo entero $n \geq 2$. Concluimos que u es armónica en todo el plano real.
Para calcular una función armónica conjugada, usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann e integración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad &\Rightarrow \qquad v(x,y) = \frac{y^2}{2} + h(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -h'(x) \qquad &\Rightarrow \qquad h(x) = -\frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

para C una constante real. Tenemos que

$$v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$$

y si $f = u + iv$, entonces, en su expresión compleja, se tiene $f(z) = -iz^2/2 + C$ (verificar).

La existencia de funciones armónicas conjugadas es un problema delicado, y está fuertemente relacionado a la existencia del logaritmo en el dominio de definición. El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente para la existencia de funciones armónicas conjugadas.

Teorema 3.5. *Si u es una función armónica definida sobre un dominio simplemente conexo, entonces existe una función armónica conjugada sobre dicho dominio.*

▶ Será suficiente trabajar con funciones armónicas definidas sobre discos del plano real.

Gracias a la relación descrita en el Teorema 3.2 podemos derivar propiedades para las funciones armónicas que son similares a las de las funciones holomorfas.

Teorema 3.6 (Principio de Módulo Máximo para Funciones Armónicas)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco abierto y u una función armónica y no constante en D. Entonces $(x, y) \to |u(x, y)|$ no alcanza su máximo o su mínimo en D.*

Demostración. Como D es simplemente conexo, el Teorema 3.5 garantiza la existencia de una función $f \in \mathcal{H}(D)$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$. Sea $g(z) = \exp(f(z))$, notar que $g \in \mathcal{H}(D)$ y además, $|g(z)| = \exp(u(x, y))$. Se sigue del Teorema 2.1 que $|g(z)| = e^{u(x,y)}$ alcanza su máximo en la frontera de D o es constante. Como la función exponencial (de variable real) $t \mapsto e^t$ una función monótona creciente, se sigue que $u(x, y)$ alcanza su máximo en ∂D o es constante. Por hipótesis, se concluye que $|u(x, y)|$ no alcanza su máximo en D. Para el caso del mínimo, se argumenta de forma similar usando $-u(x, y)$. □

3.1. Campos conservativos

Sea $\boldsymbol{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de tipo C^1. Decimos que $\boldsymbol{F}$ es conservativo si existe un potencial escalar $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$\boldsymbol{F} = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Un resultado similar al Teorema de Cauchy para campos conservativos se deriva del siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva suave parametrizada por $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \Omega$ dada por $t \mapsto \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$. Denotemos con $A = \boldsymbol{r}(a)$ y $B = \boldsymbol{r}(b)$ los puntos extremos de γ. Si $\boldsymbol{F}$ es conservativo en Ω, entonces*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} := \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt = \varphi(B) - \varphi(A).$$

La conclusión de este teorema suele traducirse como

> *El trabajo realizado por un campo de fuerza para llevar una partícula del punto A al punto B es independiente de la trayectoria.*

Corolario 3.8. *Si $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial conservativo, entonces para cualquier curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ y se tiene*

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

▶ Ejemplos de campos vectoriales conservativos que se derivan de la física son

- campo de velocidades de un fluido,
- campo electromagnético,
- campo gravitacional.

En todos estos casos, $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$ para algún potencial escalar. Cuando se admiten condiciones extra sobre los fenómenos físicos (por ejemplo, cuando se supone condiciones sobre la viscosidad, la comprensiblilidad y rotación del fluido) se puede concluir que el potencial φ es además una función armónica.

Definición 3.9. Sea $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potencial escalar asociado al campo vectorial conservativo $\boldsymbol{F}$. Si φ es armónica y existe una función $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ que es armónica conjugada a φ, decimos que la función $f = \varphi + i\psi$ es el potencial complejo asociado a $\boldsymbol{F}$.

▶ La función ψ se le conoce como la función corriente del flujo. Veremos en los ejemplos que las curvas de nivel asociadas al potencial escalar y la corriente de flujo serán siempre ortogonales entre sí (¿por qué?).

Ejemplo 3.10. Consideremos un campo vectorial constante dado por $\boldsymbol{F} = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notemos que $\boldsymbol{F}$ está bien definido en todo $\mathbb{R}^2$ y es conservativo, pues para $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y$, se tiene $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$. El potencial φ es claramente una función armónica en todo $\mathbb{R}^2$, pues al ser una función lineal en x y y, todas sus parciales de orden $n \geq 2$ son nulas. Como el plano real es simplemente conexo, existen funciones armónicas conjugadas a φ. Un cálculo directo muestra que el potencial complejo asociado a $\boldsymbol{F}$ es $f(z) = (\alpha - i\beta)z$.

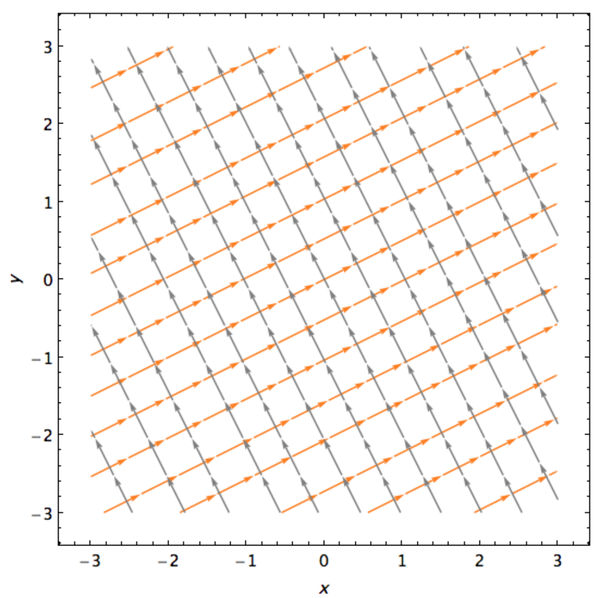

Figura 1: Curvas de nivel para el potencial escalar (en gris) y la corriente de flujo (en naranja) para el campo $\boldsymbol{F} = (2, 1)$.

Ejemplo 3.11. Dado el potencial complejo $f(z) = \log(z)$ definido para $z \in \mathbb{H}$, calcular el campo vectorial conservativo asociado, su potencial escalar y su función de corriente de flujo.

De variable compleja sabemos que la función logaritmo complejo puede escribirse como

$$f(z) = \log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

donde $\arg(z) \in (0, 2\pi)$ para que f sea holomorfa en $\mathbb{H}$. Por el Teorema 3.2 se sigue que $u(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ y $v(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ son funciones armónicas en $\mathbb{H}$. Definimos el campo vectorial conservativo

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \nabla u(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

el cual está bien definido en $\mathbb{H}$. En notación compleja, tenemos que $\boldsymbol{F}(z) = e^{i\arg(z)}/|z|$, lo que nos muestra que el vector $\boldsymbol{F}(z)$ con punto base en z apunta en la misma dirección que z pero su magnitud es inversamente proporcional a la magnitud de z (ver Figura 2).

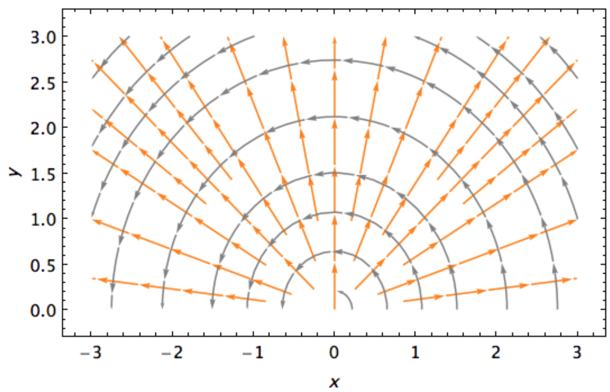

Figura 2: Curvas de nivel para el potencial escalar (en gris) y la corriente de flujo (en naranja) para el potencial complejo $f(z) = \log(z)$.

3.2. Problemas con Valores de Frontera

Un problema con valor de frontera se refiere a una ecuación diferencia parcial cuya solución, definida sobre un conjunto U, satisface una condición sobre la frontera de U. Estos problemas se pueden clasificar como:

- Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{en } U \\ \varphi = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

- Problema de Neumann:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{en } U \\ \frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}} = g & \text{en } \partial U \end{cases}$$

▶ Problemas de tercer tipo (o de Robin) surgen al proponer condiciones de frontera que son una combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y Neumann, esto es

$$a\varphi + b\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}} = g, \quad \text{para constantes } a, b.$$

Las condiciones de frontera de tipo Robin suelen aparece en ecuaciones de convección-difusión.

4. Funciones Conformes

Definición 4.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función dada. Decimos que f es conforme en Ω (o también, univalente en Ω) si f es holomorfa e inyectiva en todo Ω.

► Algunos autores definen función conforme como aquella que es holomorfa y además satisface una de las siguientes condiciones:

1. su derivada no se anula en todo punto de Ω; o

2. la función preserva ángulos entre vectores tangentes.

Sin embargo, la definición que nosotros utilizaremos *implica* que $f'(z) \neq 0$ en todo Ω y que f preserva ángulos. Por otro lado, la función $f(z) = z^2$ definida en $\mathbb{C} - \{0\}$ es una función holomorfa y con derivada no nula en todo su dominio, pero f no es inyectiva.

Ejemplo 4.2. Consideremos la función $z \mapsto \exp(z)$, la cual es una función entera, esto es, holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Como la exponencial compleja es $2\pi i$ periódica, es decir

$$\exp(z + 2\pi i k) = \exp(z), \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}$$

entonces no puede ser inyectiva en todo el plano. Si restringimos la acción de $\exp(z)$ a la banda

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$$

entonces $\exp : B \to \mathbb{C} - \{0\}$ es inyectiva y holomorfa, por lo tanto, conforme. En la figura X se muestra la acción de la exponencial compleja restringida en B sobre dos familias de curvas ortogonales entre sí: estas son $\mathrm{Re}(z)$ constante (segmentos de recta color naranja) y $\mathrm{Im}(z)$ constante (rectas blancas). Las familias correspondientes en la imágen resultan de nuevo ortogonales.

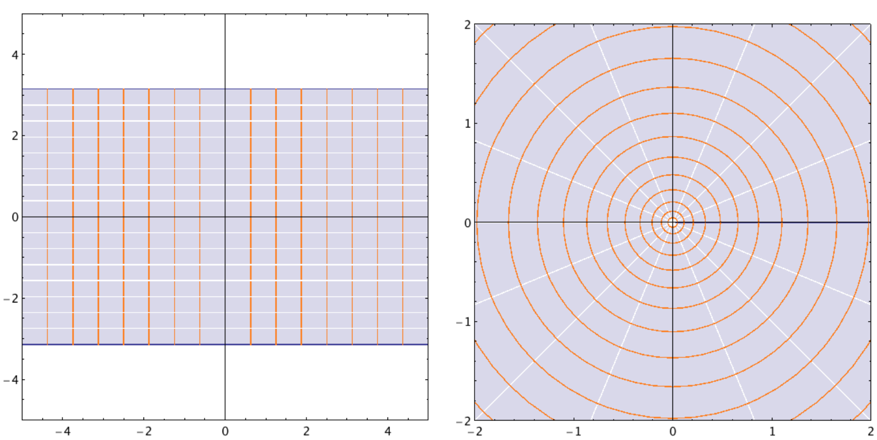

Figura 3: La acción de la exponencial compleja sobre el dominio B.

Problema 4.3. *Consider la función $f(z) = z^2$. Encuentra un dominio del plano complejo donde f sea conforme y haz un bosquejo de la acción de f sobre dos familias de curvas ortogonales.*

Ejemplo 4.4. Definamos la función $T : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ por

$$T(z) = i\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

Como T es el cociente de dos funciones lineales (por lo tanto, cociente de holomorfas) cuyo denominador se anula únicamente en $z = -1 \notin \mathbb{D}$, entonces T es holomorfa en todo el disco unitario. Vemos que T toma valores en el semiplano superior $\mathbb{H}$. Para ello, debemos mostrar que si $z \in \mathbb{D}$, entonces $\mathrm{Im}(T(z)) > 0$. Efectivamente, como $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T(z)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-x-iy}{1+x+iy}\right), \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x)^2+y^2}\right), \\
&= \frac{1-(x^2+y^2)}{(1+x)^2+y^2} > 0,
\end{aligned}$$

pues $|z| < 1$ y por lo tanto, $x^2 + y^2 < 1$. Veamos ahora que no solo T es inyectiva, de hecho, es una biyección holomorfa entre $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$. Para ello, calculamos su inversa: sea $w = T(z)$, y definamos

$$S(w) = \frac{i-w}{i+w}$$

la cual es holomorfa salvo en $w = -i \notin \mathbb{H}$, por lo que $S \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$. Notar también que $S : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, pues si $\mathrm{Im}(w) > 0$, entonces $|w - i| < |w + i|$ (la distancia entre w e i es más pequeña que la distancia entre w y $-i$). Se sigue que

$$|S(w)| = \left|\frac{i-w}{i+w}\right| < 1.$$

Finalmente, un cálculo directo muestra que $T \circ S(w) = w$ y que $S \circ T(z) = z$, por lo que S es efectivamente la inversa de T.

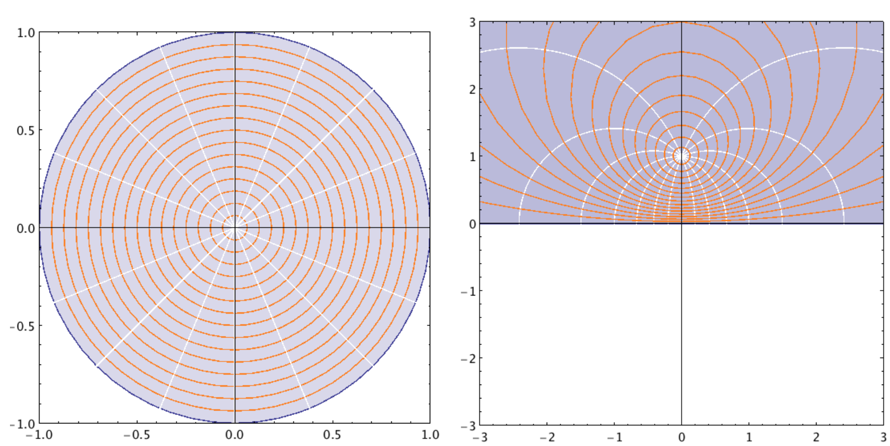

Figura 4: La acción de T sobre el disco unitario.

Definición 4.5. Si U y V son dos dominios del plano complejo y existe una biyección holomorfa $f : U \to V$, entonces decimos que U es conformemente equivalente a V, y f es un biholomorfismo, esto es, f y su inversa $f^{-1}|V$ son ambas conformes en sus dominios de definición. Escribimos $U \sim V$ para denotar que los dominios son conformemente equivalentes

► El ejemplo 4.4 nos dice que el disco unitario $\mathbb{D}$ y el semiplano superior $\mathbb{H}$ son dominios conformementes equivalentes. De hecho, no es difícil ver del problema 4.3 que $z \mapsto z^2$ es un biholomorfismo entre el primer cuadrante $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y $\mathbb{H}$. Podemos entonces considerar la composición

$$Q \xrightarrow[z \mapsto z^2]{} \mathbb{H} \xrightarrow[T^{-1}]{} \mathbb{D}$$

denotada por $H(z) = (T^-1(z))^2, z \in Q$. Luego, H define un biholomorfismo entre Q y $\mathbb{D}$, esto es $Q \sim \mathbb{D}$ (verificar).

Problema 4.6. *Demuestra que la existencia de un biholomorfismo entre dos dominios define una relación de equivalencia, es decir, se cumplen las siguientes tres propiedades: dados U, V, W dominios del plano complejo,*

- $U \sim U$,
- *si* $U \sim V$, *entonces* $V \sim U$,
- *si* $U \sim V$ *y* $V \sim W$, *entonces* $U \sim W$.

Decimos que la clase conforme del dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ son todos los dominios del plano complejo que son conformemente equivalentes a Ω. El siguiente resultado describe la clase conforme del disco unitario.

Teorema 4.7 (Teorema de la Aplicación de Riemann)**.** *Sea Ω un dominio no vacío, propio y simplemente conexo del plano complejo. Entonces Ω es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. Además, dado $z_0 \in \Omega$, si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ es un biholomorfismo que satisface $f(0) = z_0$ y $f'(0) > 0$, entonces el biholomorfismo es único.*

5. El Problema de Dirichlet en Discos

Dado $R > 0$, denotemos por $D_R = \{z \mid |z < R\}$, y $C_R = \{z \mid |z| = R\}$. Queremos resolver el problema de Dirichlet sobre D_R, esto es

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0 \quad & \text{en } D_R \\ \varphi = g \quad & \text{en } C_R \end{aligned}$$

Para ello, usaremos la teoría de funciones holomorfas y conformes. Ya que la función u debe ser armónica en D_R (y éste dominio es simplemente conexo), existe una función $f = u + iv$, holomorfa en un dominio Ω que contiene a $D_R \cup C_R$. Por la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene que para cualquier $z \in D_R$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{5.1}$$

Dado un punto $z \in D_R$, definimos su inversión a través de C_R, como el valor

$$z^* := \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

La inversión a través de C_R satisface las siguientes propiedades:

- $|zz^*| = R^2$,
- $z \in D_R$ si y sólo si $z^* \notin D_R$, y en particular, $0^* = \infty$.
- $z \in C_R$ si y sólo si $z^* \in C_R$.

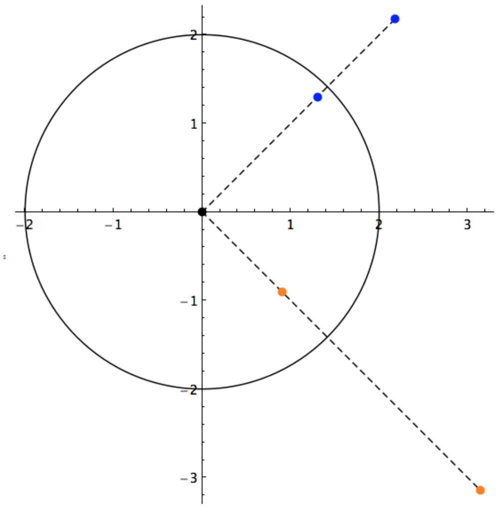

Figura 5: Dos ejemplos de inversión. Los colores indican la inversión de cada punto.

Ver Figura 5. Escribamos $z = re^{i\theta}$ para $0 < r < R$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Un cálculo sencillo muestra que $z^* = R^2 e^{i\theta}/r^2$. La función

$$w \mapsto \frac{f(w)}{w - z^*}$$

es holomorfa para todo $w \in D_R \cup C_R$, pues f es holomorfa en dicho dominio y el denominador se anula sólo en el punto $z^* \notin D_R \cup C_R$. Por el Teorema de Cauchy, se sigue que

$$\int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z^*} dw = 0 \tag{5.2}$$

Combinando las ecuaciones (5.1) y (5.2), obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - z^*} dw, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(w) \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z^*} \right) dw \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como $R^2 = w\bar{w}$, escribimos $z^* = (w\bar{w})/\bar{z}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z^*} &= \frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - \frac{w\bar{w}}{\bar{z}}} = \frac{1}{w - z} - \frac{\bar{z}}{w\bar{z} - w\bar{w}}, \\ &= \frac{1}{w} \left(\frac{w}{w - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{w}} \right) = \frac{1}{w} \left(\frac{w}{w - z} + \frac{\bar{z}}{\overline{w - z}} \right), \\ &= \frac{1}{w} \left(\frac{w(\bar{w} - \bar{z}) + \bar{z}(w - z)}{(w - z)\overline{(w - z)}} \right). \end{aligned}$$

El numerador de la última expresión puede reducirse a

$$w(\bar{w}-\bar{z})+\bar{z}(w-z)=R^2-w\bar{z}+\bar{z}w-r^2=R^2-r^2,$$

y el denominador a

$$(w-z)\overline{(w-z)}=R^2-(w\bar{z}+z\bar{w})+r^2.$$

Usando $w=Re^{i\eta}$ con $\eta\in[0,2\pi)$, tenemos $w\bar{z}+z\bar{w}=Rre^{i\eta-\theta}+Rre^{i\theta-\eta}=2Rr\cos(\eta-\theta)$. Por lo tanto, reescribimos la expresión en (5.3) usando formas exponenciales de $z=re^{i\theta}$ y de $w=Re^{i\eta}$, y el cambio de variable $dw=ire^{i\eta}d\eta=iwd\eta$, para $\eta\in[0,2\pi)$. Se obtiene

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{i\eta})\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\eta-\theta)+r^2}\right)d\eta. \tag{5.4}$$

Como $u(r,\theta)=\mathrm{Re}(f(re^{i\theta}))$, obtenemos la solución al problema de Dirichlet en el disco, dada por

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(R,r,\eta-\theta)u(R,\eta)d\eta, \tag{5.5}$$

para $r<R$ y donde

$$P(R,r,\eta-\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\eta-\theta)+r^2}$$

es conocido como el Kernel de Poisson.

Ejemplo 5.1. Dado un radio $R>0$, resolver $\Delta u=0$ en D_R con la condición de frontera

$$u(R,\eta)=\begin{cases}0, & 0<\eta<\pi,\\ k, & \pi<\eta<2\pi.\end{cases}$$

Para algún $z=re^{i\theta}\in D_R$, podemos aplicar directamente la solución (5.5) sobre la expresión de u en la frontera para obtener

$$u(z)=u(r,\theta)=\frac{k}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\eta-\theta)+r^2}.$$

Bajo el cambio de variable $t=\tan(\frac{\eta-\theta}{2})$ y $d\eta=\frac{2}{1+t^2}dt$, se obtiene

$$u(r,\theta)=\frac{k}{2\pi}\arctan\left(\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\theta}\right),$$

para $r<R$ y $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ (pues la expresión tiene singularidades en $\theta=0,\pi$).

5.1. Unicidad de la solución al problema de Dirichlet en el disco

Supongamos que existen dos funciones armónicas u_1 y u_2 que satisfacen el problema de Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{en } D_R\\ u=g & \text{en } C_R\end{cases}$$

La función $u:=u_1-u_2$ es una función armónica en D_R, pues por la linelidad del operador de Laplace se cumple

$$\Delta u=\Delta(u_1-u_2)=\Delta u_1-\Delta u_2=0.$$

Por otro lado, la condición de frontera que satisface u es $u = u_1 - u_2 = g - g = 0$ en todo C_R. luego, u es una solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D_R \\ u = 0 & \text{en } C_R \end{cases}$$

Por el Teorema 3.6 del Principio del Módulo Máximo para funciones armónicas, se sigue que $|u| = 0$ en todo D_R, por lo que $u_1 = u_2$ en todo $D_R \cup C_R$.

5.2. Invarianza conforme de la ecuación de Laplace

Teorema 5.2. *Sean U y V dos dominios del plano complejo que son conformemente equivalentes, esto es, existe un biholomorfismo $M : U \to V$ con $w = M(z)$ y $z = x + iy, w = u + iv$. Supongamos que V es simplemente conexo.*
Si $\Phi(u, v) : V \to \mathbb{R}$ es una función armónica en V, entonces la función

$$\varphi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$$

es armónica en U.

Demostración. Hay dos formas de demostrar que φ es armónica: una es un largo y tedioso cálculo de las segundas parciales de φ con respecto a x y a y. La otra es usando la teoría de funciones holomorfas, armónicas y conformes.
Como V es un dominio simplemente conexo, el Teorema 3.5 nos dice que existe una función

$$\Psi(u, v) : V \to \mathbb{R}$$

que es la armónica conjugada de Φ. Sea $F(w) = F(u, v) = \Phi(u, v) + i\Psi(u, v)$ una función holomorfa en V. Por hipótesis, $M : U \to V$ es conforme en U, luego

$$F \circ M : U \to \mathbb{C}$$

es una función holomorfa en U. Escribiendo esta composición en términos de las variables x, y y u, v, se obtiene

$$F \circ M(z) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) + i\Psi(u(x, y), v(x, y)).$$

Por el Teorema 3.2, la parte real de esta función es armónica. Esto es $\varphi(x, y) = \mathrm{Re}(F \circ M(z)) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ satisface $\Delta\varphi = 0$ en U.

□

► Concluimos que un problema de Dirichlet definido sobre un dominio U que sea conformemente equivalente al disco, puede ser resuelto por medio de un cambio de variable conforme que reduzca el problema en U a un problema en un disco D_R y aplicar entonces la solución calculada en 5.5. Una vez resuelto en D_R, la inversa de la transformación conforme regresa la solución al problema inicial en U.

Referencias

[1] Kwok, Yue Kuen. Applied Complex Variables For Scientists And Engineers. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. xii+438 págs.

[2] Nehari, Zeev. Conformal Mapping. Reimpresión de la edición de 1952. Dover Publications, Inc., New York, 1975. vii+396 págs.

[3] Olver, Peter J. Introduction To Partial Differential Equations. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2014. xxvi+635 págs.

[4] Stein, Elias M.; Shakarchi, Rami. Complex Analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. xviii+379 págs.