

Dinámica de productos Blaschke de grado $2d + 1$

Melida Carranza Trejo

Centro de Investigación en Matemáticas

Julio 2018

Bajo la dirección de
Dra. Mónica Moreno Rocha, CIMAT

El propósito de la presente tesis es estudiar la dinámica de una familia particular de productos Blaschke generalizados de grado $2d + 1$ dada por

$$B_{\alpha,a}(z) = e^{2\pi i \alpha} z^{d+1} \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right)^d$$

donde $a, z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [0, 1)$ y $d \geq 1$. Si bien la dinámica de los elementos es relativamente sencilla de describir, la dependencia no holomorfa del producto con respecto al parámetro dificulta el estudio de su espacio de parámetros $(\alpha, a) \in [0, 1) \times \mathbb{C}$.

En este trabajo, se presenta un estudio conciso del plano dinámico y de distintas regiones del espacio de parámetros de la familia $B_{\alpha,a}$ para $d \geq 1$. Los capítulos 2 y 3 consisten principalmente de resultados originales: en el capítulo 2 presentamos la familia $B_{\alpha,a}$ y estudiamos sus propiedades analíticas y dinámicas básicas (por ejemplo, se describe la configuración de puntos críticos con respecto a \mathbb{S}^1 , la cual es dependiente de $|a|$). El resultado principal de este capítulo es la conectividad del conjunto de Julia y para ello se demuestra una serie de resultados que describen las posibles componentes periódicas de Fatou y su conectividad. Por ejemplo, $B_{\alpha,a}$ no tiene discos de Siegel y para ciertos valores de $|a|$, $B_{\alpha,a}$ puede exhibir o no anillos de Herman. Finalmente, damos un criterio de conectividad del conjunto de Julia.

En el capítulo 3 nos concentramos en el espacio de parámetros de la familia $B_{\alpha,a}$. Primero, proporcionamos un estudio de las simetrías del plano de parámetros y demostramos cuando dos productos de la familia son conformemente conjugados. También se demuestra que es suficiente estudiar la dinámica de $B_{\alpha,a}$ con $\alpha = 0$. Con ello, describimos la dinámica asociada a ciertas regiones de plano de a -parámetros que pueden ser foliadas por elipses, se demuestra la existencia de curvas analíticas en el mismo espacio donde cada $B_{0,a}$ tiene un punto fijo parabólico, y se hace un estudio de bifurcación parabólica sobre algunas de estas curvas. El capítulo cierra con la descripción de algunas componentes hiperbólicas del plano de a -parámetros.

Palabras clave: Productos Blaschke, Conjuntos de Julia y Fatou, Conectividad, Plano de parámetros.