Límite sobre contornos de integración

Lema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y sean $z_n, z : [a,b] \to \Omega$ parametrizaciones suaves (a trozos) de los contornos $\gamma_n, \gamma \subset \Omega$ donde, cuando $n \to \infty$, se satisface*

- *$z_n \to z$ uniformemente en $[a,b]$,*
- *$z_n' \to z'$ uniformemente en cada subintervalo de $[a,b]$ donde z_n es diferenciable, y*
- *$\gamma_n \to \gamma$ como compactos.*

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz$$

cuando $n \to \infty$

Observaciones.

1. La versión enunciada en clase no incluía la segunda hipótesis de convergencia uniforme de las derivadas (sorry!). Sin esa hipótesis el resultado puede ser falso.

2. Para la demostración del lema, requerimos enunciar el siguiente resultado de Arzelá, su demostración está contenida en el artículo de Luxemburg (ver en la página del curso).

   Teorema (de convergencia dominada)**.** *Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones Riemann integrables en el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tales que convergen puntualmente a una función Riemann integrable g en $[a,b]$. Si existe una constante $M > 0$ tal que $|g_n| \leq M$ en $[a,b]$ entonces se cumple*

   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Demostración. Por definición de integral de contorno y la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_n} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz \right| &\leq \int_a^b |f(z_n(t)) \cdot z_n'(t) - f(z(t)) \cdot z'(t)| dt \\
&\leq \int_a^b |f(z_n(t)| \cdot |z_n'(t) - z'(t)| dt \\
&+ \int_a^b |z'(t)| \cdot |f(z_n(t)) - f(z(t))| dt.
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que las dos integrales del lado derecho de la segunda desigualdad convergen a cero cuando $n \to \infty$.

Como $\gamma_n \to \gamma$ como compactos, existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\gamma_n, \gamma \subset K$ para todo n. Por ser f continua en Ω, existe $M_1 > 0$ tal que $|f| < M_1$ en K. La estimación estándard para integrales sobre intervalos produce la desigualdad

$$\int_a^b |f(z_n(t)| \cdot |z_n'(t) - z'(t)| dt \leq (b-a) M_1 \sup_{[a,b]} |z_n'(t) - z'(t)| \longrightarrow 0,$$

pues por la convergencia uniforme de las derivadas, el supremo converge a cero cuando $n \to \infty$. Para la segunda integral, notemos que $f(z_n(t)), f(z(t))$ son continuas (por lo tanto, integrables) y $g_n(t) := f(z_n(t)) - f(z(t))$ converge uniformemente a cero en $[a,b]$. Además $z'(t)$ es continua en $[a,b]$, por lo tanto $z'(t)g_n(t)$ es integrable. Por continuidad, existe una constante $M_2 > 0$ tal que $|z'(t)g_n(t)| \leq M_2$ para todo $t \in [a,b]$. El Teorema de Convergencia Dominada de Arzelá aplicado a los módulos de las funciones nos ayuda a concluir

$$\int_a^b |z'(t)| \cdot |f(z_n(t)) - f(z(t))| dt \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$. $\square$