

Instructora: Mónica Moreno Rocha

Ejercicios complementarios de las listas 1–3 asignados en clase

1. Demostrar el siguiente teorema usando las definiciones de función holomorfa y \mathbb{C} -diferenciabilidad (con límite o con notación asintótica).

Teorema. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada.

- a) $\mathbb{C} \subsetneq \mathcal{H}(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{C}^0(\mathbb{C})$.
 - b) $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es una \mathbb{C} -subálgebra de $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$.
 - c) Regla de la cadena para f y $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$, donde $f(\Omega) \subset \Omega'$ y ambas funciones son holomorfas en sus respectivos dominios de definición.
 - d) Inversa local: si f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$, $U \subset \Omega$ vecindad abierta de z_0 donde $f|_U$ holomorfa y $V \subset \mathbb{C}$ tales que $f : U \rightarrow V$ es biyectiva, entonces existe $g = f^{-1}|_V$ holomorfa y tal que $g'(f(z_0)) = 1/f'(z_0)$.
2. Comprobar usando la definición que las funciones $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$, $z \mapsto |z|$ no son \mathbb{C} -diferenciables en cualquier punto del plano complejo.
 3. Verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a $\partial_{\bar{z}}f = 0$.
 4. Sea γ un contorno suave (a trozos) y f continua en una vecindad de γ . Demostrar que $\int_{\gamma} f(z)dz$ es independiente de la parametrización de γ .
 5. Demostrar las siguientes propiedades de integral de contorno: dada $\gamma \subset \mathbb{C}$ suave (a trozos) y $f \in \mathcal{C}^0(\gamma)$, se cumple
 - a) $f \mapsto \int_{\gamma} f(z)dz$ es un operador \mathbb{C} -lineal.
 - b) $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma^-} f(z)dz$, donde γ^- representa el contorno γ con orientación negativa.
 - c) $\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz$, donde $\gamma + \beta$ indica la concatenación de los contornos con un punto extremo en común.
 6. Demostrar que todo polinomio de grado $d \geq 1$ con coeficientes en \mathbb{C} tiene exactamente d raíces en \mathbb{C} .
 7. Verificar que si f tiene un polo en z_0 de orden $n \geq 1$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z).$$

8. Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(A_{r,R})$ para $0 < r < R < +\infty$ entonces la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

es absolutamente convergente en $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

9. Demostrar lo siguiente: sea $f \in \mathcal{H}(A_{r,R})$ para $0 < r < R < +\infty$. Entonces existen dos funciones holomorfas

$$f^+ \in \mathcal{H}(D(0, R)) \quad \text{y} \quad f^- \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r)})$$

con $\lim_{z \rightarrow \infty} f^-(z) = 0$, tales que $f = f^+ + f^-$ en $A_{r,R}$, y la representación es única.

10. Sea $f(z) = z/(\exp(z) - 1)$ para $0 < |z| < 2\pi$. Demostrar que f tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$ y calcular los primeros coeficientes (números de Bernoulli) de su serie de potencias centrada en el origen.
11. Sea $f(z) = 2/p(z)$, donde $p(z) = z^2 - 4z + 3$. Calcular las series de Laurent alrededor del origen para los dominios $1 < |z| < 3$ y $3 < |z|$.
12. Proporcionar una demostración del Principio del Módulo Mínimo.
13. Deducir un principio del máximo para funciones armónicas.
14. Usando residuos, verificar las siguientes identidades.

- a) Para cada $0 < r < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} = \frac{2\pi}{1 - r^2}$$

- b) Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

- c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1/(n - 1/2)^2 = \pi^2$.