Instructora: Mónica Moreno Rocha
Ejercicios complementarios de las listas 4–6 asignados en clase

1. Propiedades del índice: dada una curva cerrada suave (a trozos) $\gamma \subset \Omega$, demostrar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ se cumple $W_{\gamma^-}(z) = -W_\gamma(z)$. De forma general, demostrar que

$$W_{\gamma+\beta}(z) = W_\gamma(z) + W_\beta(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma+\beta)$, donde γ y β son curvas cerradas suaves (a trozos) que comparten el mismo punto inicial.

2. Demostrar que un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo si y solo si $W_\gamma(z) = 0$ para toda curva suave (a trozos) cerrada $\gamma \subset \Omega$ y para todo $z \notin \Omega$.

3. Proporcionar los detalles de la demostración del siguiente teorema. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω, entonces existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = \exp(g(z))$ para todo $z \in \Omega$. Esto es, g es una rama de logaritmo definida en todo Ω.

4. Series de Fourier: Sea $g(z) = \cot(\pi z)$ la cual es una función 1-periódica y es holomorfa en $\mathbb{H}^+ = \{z \,:\, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y en $\mathbb{H}^-$, con polos en $n \in \mathbb{Z}$. Entonces g tiene dos expansiones en series de Fourier. Calcular ambas expansiones.

5. Demostrar que
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

6. Demostrar que
$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}.$$

7. Encontrar función meromorfa con ceros simples en los enteros negativos y polos simples en los enteros positivos.

8. Sea $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Verificar las siguientes propiedades de las transformaciones lineales fraccionarias.

a) $f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ si y solo si $A = \lambda I$ donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e I es la matriz identidad 2×2.

b) $f_{AB} = f_A \circ f_B$

c) Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ entonces f_A es un biholomorfismo de $\mathbb{C}$ con inversa $f_{A^{-1}}$.

d) Si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $c \neq 0$, entonces $f_A : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ es biholomorfismo. Además, su extensión a la esfera de Riemann define también un biholomorfismo.

e) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ se cumple $f_{\lambda A} = f_A$.

f) $\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Mob}$ dado por $\Phi(A) = f_A$ define un epimorfismo de grupos que no es inyectivo.

g) Demostrar que

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

9. Verificar que

a) $h(z) = (z + \frac{1}{z})/2$ envía $\mathbb{D}^+$ a $\mathbb{H}^+$ de forma conforme y analice el comportamiento de h en las fronteras.

b) $g(z) = \cos z$ envía la banda $B^+ = \{z \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0, 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ a $\mathbb{H}^+$ de forma conforme y analice el comportamiento de g en las fronteras.

10. Denote por $f_C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ la aplicación de Cayley que manda $i \mapsto 0$. Demuestre que si $f_{M_\theta} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, entonces

$$\varphi = f_c \circ f_{M_\theta} \circ f_c^{-1} = e^{-2\theta i} z.$$