

Ejercicios de la tarea 6

1. Sea  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión uniformemente acotada de funciones holomorfas definidas sobre un dominio  $\Omega$ , y sea  $z_0 \in \Omega$ . Suponga que para cada entero  $k \geq 0$ ,  $f_n^{(k)}(z_0) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Demuestre que  $f_n(z) \rightrightarrows 0$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ .
2. Considera un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  una función holomorfa. Denote por  $f_n = f^{\circ n}$  la  $n$ -ésima iterada de  $f$  consigo misma y suponga la existencia de un punto  $z_0 \in \Omega$  tal que  $f(z_0) = z_0$  y  $|f'(z_0)| < 1$ . Demuestre que cuando  $n \rightarrow \infty$ , la sucesión  $f_n$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a la función constante  $g(z) = z_0$ .

3. Demuestre el siguiente Teorema de Hurwitz.

Sea  $\{f_n\}_{n \geq 1}^\infty$  una sucesión de funciones holomorfas definidas sobre un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que converge uniformemente en compactos a la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Suponga que  $f$  tiene un cero en  $z_0 \in \Omega$  de orden  $m \geq 1$ . Demuestre que para  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  pequeño,  $f_n$  tiene  $m$  ceros (contando multiplicidad) en una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$ .

Sug.: Principio del argumento

4. Sea  $\mathcal{S}$  una familia de funciones univalentes  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  las cuales satisfacen  $f(0) = 0$  and  $f'(0) = 1$ . Demuestre que  $\mathcal{S}$  es cerrado con respecto a la convergencia uniforme en compactos: esto es, para cualquier sucesión en  $\mathcal{S}$  que converge uniformemente en compactos de  $\Omega$  a  $f$ , se cumple que  $f \in \mathcal{S}$ .
5. Considere  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  un dominio no vacío, conexo y simplemente conexo, y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  una función holomorfa no constante.

- (a) Dado algún  $z_0 \in \Omega$ , defina la función

$$g(z) = \frac{f(z_0) - f(z)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)}.$$

Demuestre que  $g'(z_0) = f'(z_0)(1 - |f(z_0)|)^{-2}$  y concluya que

$$\begin{aligned} & \sup\{|f'(z_0)| : f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorfa}, f(z_0) = 0\} \\ &= \sup\{|f'(z_0)| : f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorfa}\} \end{aligned}$$

(b) Si existe una función  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  holomorfa tal que

$$|h'(z_0)| = \sup\{|f'(z_0)| : f : \Omega \rightarrow \mathbb{D} \text{ holomorfa}\}$$

demuestre que  $h(z_0) = 0$ .

6. Considere la familia de funciones  $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : \text{holomorfa}\}$ .

(a) Demuestre que

$$\sup\{\operatorname{Re} f'(0) : f \in \mathcal{F}\} = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\} = 1$$

y que la única función en  $\mathcal{F}$  que maximiza estos supremos es la identidad.

Sug.: Problema 5 y Lema de Schwarz

(b) Si  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  es un dominio que satisface las hipótesis del Teorema de la Aplicación de Riemann, demuestre que para cada  $z_0 \in \Omega$ , existe una única función holomorfa y biyectiva  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  que maximiza  $\operatorname{Re} f'(z_0)$  y que por lo tanto, es la única función que maximiza dicho valor.

Sug.: Teorema de la Aplicación de Riemann

7. Ejercicio 6 del capítulo 8 del libro de Stein & Shakarchi.

8. Ejercicio 8 del capítulo 8 del libro de Stein & Shakarchi.

9. Ejercicio 9 del capítulo 8 del libro de Stein & Shakarchi.

**Entregar soluciones de los ejercicios 2, 4, 6 y 8.**

Fecha de entrega: 25 de mayo, 2026.