

Curso de Matrices Aleatorias 2018

Teoremas de Wigner, Marchenko-Pastur y Tracy-Widom I

Víctor Pérez-Abreu

CIMAT, Gto.

Posgrado de Probabilidad y Estadística

Clases 4, 6, 11 septiembre 2018

Clases de 4, 6 y 11 de septiembre 2018

Comprensión, modelación, intuición y simulación

- 1 Matriz de Wishart (algo más)
- 2 Ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE)
- 3 Distribución conjunta de valores propios
- 4 Distribución empírica espectral y su importancia
- 5 Teorema de Wigner
 - 1 Motivación en física nuclear
 - 2 Universalidad.
- 6 Breviario cultural: Distribución del semicírculo y probabilidad libre
- 7 Ensamblados de matrices de correlación y Wishart
 - 1 Ley de Marchenko-Pastur
 - 2 Teorema de Tracy-Widom
 - 3 Primeras aplicaciones a estadística
- 8 Teoremas límites para otros ensambles
 - 1 Ley del círculo
 - 2 Jacobi
 - 3 Laplaciano

Matriz Wishart

Resultados distribucionales para dimensiones fijas

- Para A matriz aleatoria con distribución Wishart $W_p(n, \Sigma)$, $\Sigma > 0$
- Función característica (notas)

$$c_A(T) = \det(I_p + 2iT\Sigma)^{-\frac{n}{2}}, T > \frac{I_p}{2}, T > 0.$$

- Conferencia Rogelio Ramos: densidad en $\mathbb{R}^{p(p+1)/2}$

$$f(A) = \frac{\det(\Sigma)^{-n/2}}{2^{np/2} \Gamma_p(\frac{n}{2})} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1}A)\right) \det(A)^{(n-p-1)/2}, A > 0, n \geq p$$

$$\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) = \prod_{j=1}^p \Gamma\left(a + (1-j)/2\right), a > (p+1)/2.$$

- Además $\text{Tr}(A) \sim \chi_{np+p(1-p)/2}^2$ y

$$\frac{\det(A)}{\det(\Sigma)} \sim \prod_{j=1}^p \chi_{n-j+1}^2, \chi_{n-j+1}^2 \text{ independientes, } j = 1, \dots, p.$$

Otras propiedades de la Wishart

Usando función característica se prueban fácilmente los siguientes resultados (Cap. 3, Gupta y Nagar (2000), Cap. 3. Muirhead (1982)):

- Si $A \sim W_p(n, \Sigma)$ y $\Theta \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ es no singular, entonces

$$\Theta A \Theta^t \sim W_p(n, \Theta \Sigma \Theta^t).$$

- $A \sim W_p(n, \Sigma)$ y $\Sigma^{-1} = \Theta^t \Theta$, entonces $\Theta A \Theta^t \sim W_p(n, I_p)$.

- Si $A \sim W_p(n, I_p)$ y $O \in O(p)$ es constante o *aleatoria independiente* de A , entonces

$$O A O^t \sim A.$$

- Si $A_j \sim W_p(n_j, \Sigma)$ son independientes, $j = 1, \dots, k$, entonces

$$\sum_{j=1}^k A_j \sim W_p\left(\sum_{j=1}^k n_j, \Sigma\right).$$

Otros resultados en Cap. 3, Gupta y Nagar y Cap. 3. Muirhead:

- $A \sim W_p(n, \Sigma)$ y Θ matriz $q \times p$ con $\text{rango}(\Theta) = q \leq p$, entonces $\Theta A \Theta^t \sim W_q(n, \Theta \Sigma \Theta^t)$.
- $A \sim W_p(n, \Sigma)$ e y vector aleatorio $p \times 1$ independiente de A y $\mathbb{P}(y \neq 0) = 1$ entonces

$$\frac{y^t A y}{y^t \Sigma y} \sim \chi_n^2 \text{ y es independiente de } y.$$

- $A \sim W_p(n, \Sigma)$ si y sólo si $A = Z^t Z$ con $Z \sim N_{p,n}(0, I_n \otimes \Sigma)$.
- Momentos, distribuciones marginales y condicionales a bloques.
- Distribución conjunta de valores propios de $A \sim W_p(n, \Sigma)$.
- Densidad de A^{-1} , la Wishart inversa.
- Resultados asintóticos de funciones de $A \sim W_p(n, \Sigma)$ para p fija y $n \rightarrow \infty$.

Resultado de primordial relevancia

Teorema 3.2.17 de Muirhead (1982)

Si $A > 0$ es una matriz aleatoria $p \times p$ con función de densidad $f(A)$, la densidad conjunta de sus valores propios $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ es

$$\frac{\pi^{p^2/2}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}p)} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \int_{O(p)} f(HLH^t) \mu(dH)$$

donde $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ y μ es la distribución de Haar en $O(p)$.

En particular, cuando A es invariante bajo conjugaciones ortogonales, la densidad conjunta es

$$\frac{\pi^{p^2/2}}{\Gamma_p(\frac{1}{2}p)} f(L) \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$$

y los vectores y los valores propios de A son independientes y los valores propios tienen la distribución de Haar.

- B_n matriz $n \times n$ real simétrica gaussiana GOE(n):

$B_n(j, k), 1 \leq j \leq k \leq n$ v.a. independientes

$$B_n = \begin{bmatrix} B_n(1, 1) & \cdots & B_n(1, n) \\ \vdots & & \vdots \\ B_n(n, 1) & \cdots & B_n(n, n) \end{bmatrix}$$

$$B_n(j, k) = B_n(k, j),$$

$$B_n(j, k) \sim N(0, 1), j \neq k,$$

$$B_n(j, j) \sim N(0, 2).$$

Caracterización de $GOE(n)$

Dimensión fija: Escrito de Víctor Amaya y José Angel Sánchez

Teorema: Una matriz aleatoria $n \times n$ simétrica B_n es $GOE(n)$ si y sólo si las siguientes dos condiciones se cumplen:

a) B_n es invariante bajo conjugación ortogonal (simetría):

las distribuciones de OB_nO^T y B_n son las mismas $\forall O \in \mathcal{O}(n)$

b) B_n tiene entradas independientes en la diagonal y arriba de la diagonal (matriz de Wigner)

Densidad conjunta de valores propios de GOE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_n \underbrace{\left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{4}x_j^2\right) \right]}_{\text{independencia}} \underbrace{\left[\prod_{j < k} |x_j - x_k| \right]}_{\text{repulsión}}$$

Densidad conjunta de valores propios de GOE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_n \underbrace{\left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{4}x_j^2\right) \right]}_{\text{independencia}} \underbrace{\left[\prod_{j < k} |x_j - x_k| \right]}_{\text{repulsión}}$$

- Si los valores propios fueran independientes:

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = f_{\lambda_{n,1}}(x_1) \cdots f_{\lambda_{n,n}}(x_n).$$

Densidad conjunta de valores propios de GOE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_n \underbrace{\left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{4}x_j^2\right) \right]}_{\text{independencia}} \underbrace{\left[\prod_{j < k} |x_j - x_k| \right]}_{\text{repulsión}}$$

- Si los valores propios fueran independientes:

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = f_{\lambda_{n,1}}(x_1) \cdots f_{\lambda_{n,n}}(x_n).$$

- Todo lo contrario $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ son **fuertemente dependientes**. Hay contribuciones de independencia y **repulsión**.

Densidad conjunta de valores propios de GOE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_n \underbrace{\left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{4}x_j^2\right) \right]}_{\text{independencia}} \underbrace{\left[\prod_{j < k} |x_j - x_k| \right]}_{\text{repulsión}}$$

- Si los valores propios fueran independientes:

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = f_{\lambda_{n,1}}(x_1) \cdots f_{\lambda_{n,n}}(x_n).$$

- Todo lo contrario $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ son **fuertemente dependientes**. Hay contribuciones de independencia y **repulsión**.
- Fenómeno general en matrices aleatorias con entradas continuas: Jacobiano función del determinante de Vandermonde: $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta(x) = \det \left(\left\{ x_j^{k-1} \right\}_{j,k=1}^n \right) = \prod_{j < k} (x_j - x_k).$$

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblado Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblado Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblado Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblado Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).
 - Demostración

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblado Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).
 - Demostración
 - Constantes $k_{n,\beta}$

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblen Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).
 - Demostración
 - Constantes $k_{n,\beta}$
 - Densidad cuando $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ no están ordenados

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblen Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).
 - Demostración
 - Constantes $k_{n,\beta}$
 - Densidad cuando $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ no están ordenados
 - Vectores propios tienen distribución de Haar en esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1}

Densidad conjunta de valores propios de GUE (n)

- Fórmula de Weyl: valores propios $\lambda_{n,1} > \dots > \lambda_{n,n}$ de B_n
Ensamblen Gaussiano Unitario $\beta = 2$

$$f_{\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}}(x_1, \dots, x_n) = k_{n,\beta} \left[\prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta}{4} x_j^2\right) \right] \left[\prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \right]$$

- $\beta = 1, 2$ o 4 .
- Referencia recomendada: Sec. 2.5 libro Anderson, *et al.* (2010).
 - Demostración
 - Constantes $k_{n,\beta}$
 - Densidad cuando $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ no están ordenados
 - Vectores propios tienen distribución de Haar en esfera unitaria S^{n-1}
 - Valores y vectores propios son independientes.

Motivación de Wigner: estudio del núcleo atómico

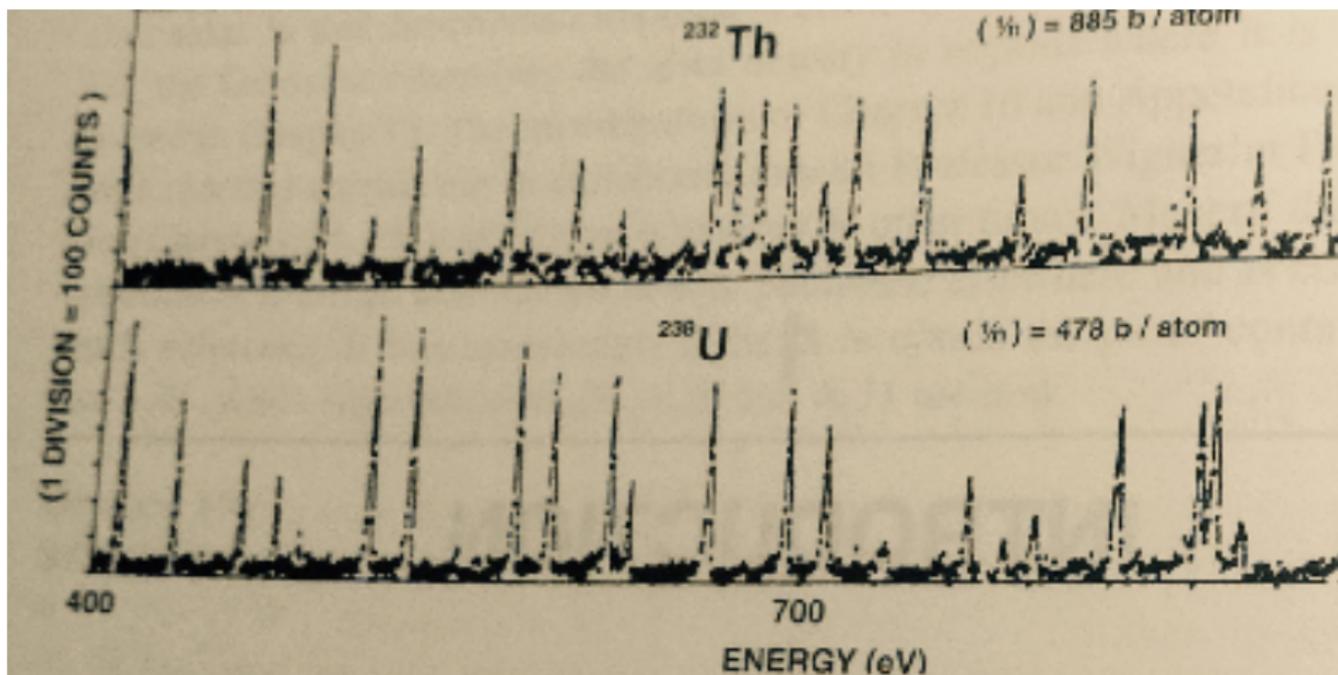


Figure 1.1. Slow neutron resonance cross-sections on thorium 232 and uranium 238. Reprinted with permission from The American Physical Society, Rahn et al., Neutron spectroscopy, X, *Phys. Rev. C* 6, 1854–1869 (1972).

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?.*

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?.*
- *¿Qué tipo de matrices aleatorias deben usarse?.*

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?*
- *¿Qué tipo de matrices aleatorias deben usarse?*
- Lecturas recomendadas de Wigner sobre Matrices aleatorias:

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?*
- *¿Qué tipo de matrices aleatorias deben usarse?*
- Lecturas recomendadas de Wigner sobre Matrices aleatorias:
 - *Annals of Mathematics*, 1955, 1958.

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?*
- *¿Qué tipo de matrices aleatorias deben usarse?*
- Lecturas recomendadas de Wigner sobre Matrices aleatorias:
 - *Annals of Mathematics*, 1955, 1958.
 - *Random Matrices in Physics*, SIAM Review, (7th Von Neumann Lecture) en 1967.

- *Wigner observó que un núcleo pesado es una gota líquida compuesta de muchas partículas con fuertes interacciones desconocidas.*
- *Modelo propuesto: valores propios de una matriz aleatoria.*
- *¿Cuál es la distribución de estas partículas?*
- *¿Qué tipo de matrices aleatorias deben usarse?*
- Lecturas recomendadas de Wigner sobre Matrices aleatorias:
 - *Annals of Mathematics*, 1955, 1958.
 - *Random Matrices in Physics*, SIAM Review, (7th Von Neumann Lecture) en 1967.
- Wigner (1902-1995) gana Premio Nobel en 1963 por sus estudios sobre el núcleo atómico.

Universalidad teorema de Wigner

Matrices de Wigner y distribución empírica espectral

- Matrices aleatorias de *Wigner* re-escalada

$$X_n(k, j) = X_n(j, k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{cases} Z_{j,k}, & \text{si } j < k \\ Y_j, & \text{si } j = k \end{cases}$$

$$\{Z_{j,k}\}_{j \leq k}, \{Y_j\}_{j \geq 1} \text{ i.i.d. } \mathbb{E}Z_{1,2} = \mathbb{E}Y_1 = 0, \mathbb{E}Z_{1,2}^2 = 1.$$

- $\lambda_{n,1} \leq \dots \leq \lambda_{n,n}$ valores propios de X_n .
- *Distribución empírica espectral:*

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\lambda_{n,j} \leq x\}}.$$

- **El estudio asintótico de \widehat{F}_n no es trivial debido a la fuerte dependencia entre los valores propios.**

- **Teorema Wigner (1955):** $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \int f(x) d\widehat{F}_n(x) - \int f(x) w(x) dx \right| > \epsilon \right) = 0$$

donde $w(x)dx$ es la *distribución del semicírculo* en $(-2, 2)$ con densidad

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, \quad |x| \leq 2.$$

Espectro asintótico: Universalidad

Distribución empírica espectral asintótica

- **Teorema Wigner (1955):** $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$,

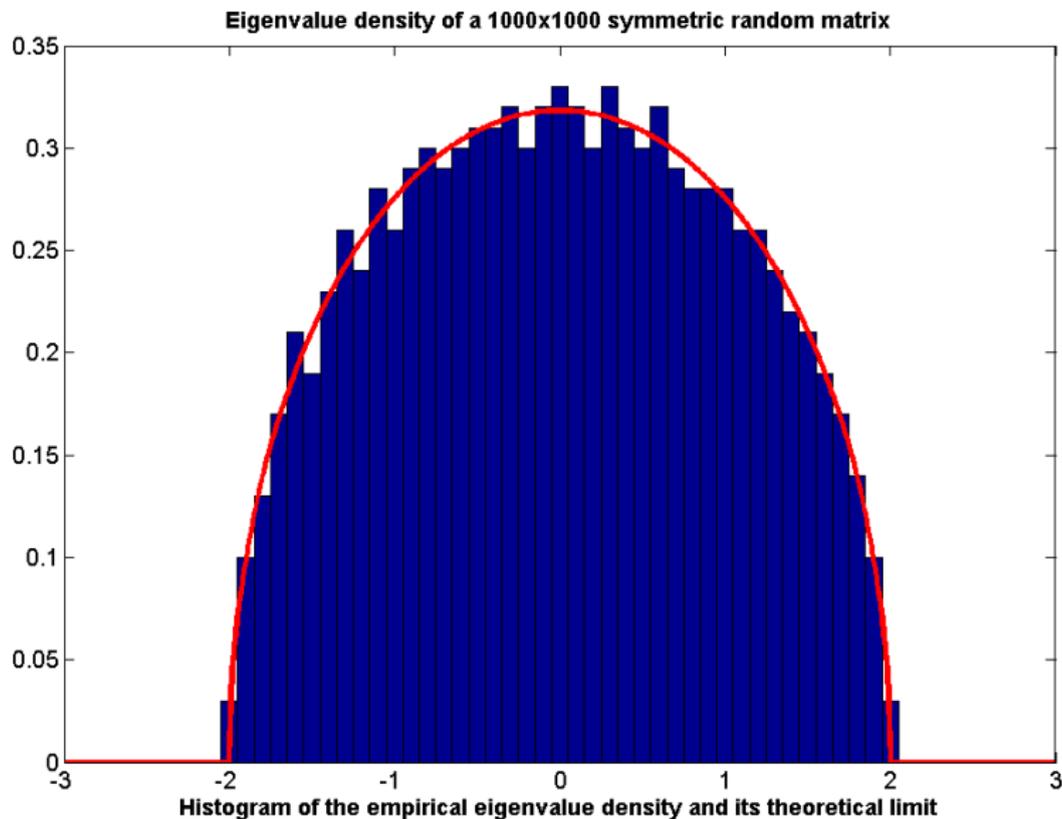
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \int f(x) d\widehat{F}_n(x) - \int f(x) w(x) dx \right| > \varepsilon \right) = 0$$

donde $w(x)dx$ es la *distribución del semicírculo* en $(-2, 2)$ con densidad

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, \quad |x| \leq 2.$$

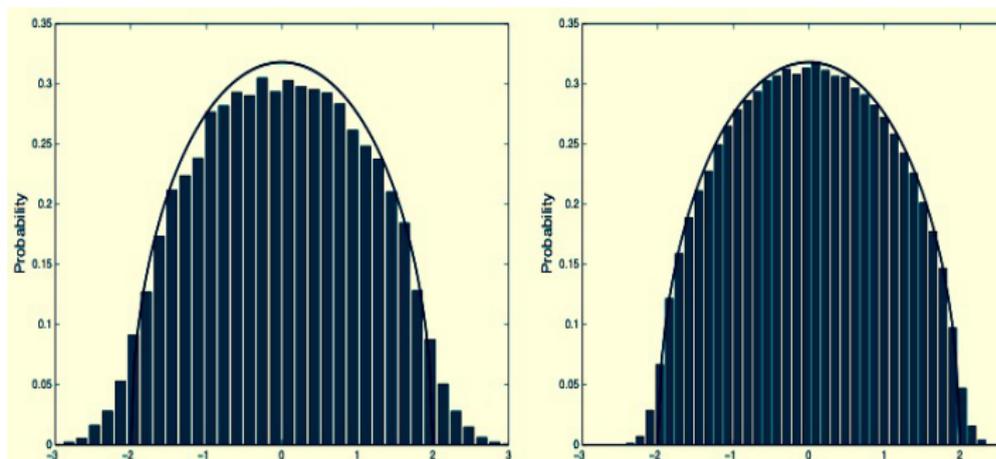
- **En otras palabras:** la distribución empírica espectral \widehat{F}_n converge (en cierto sentido) a la distribución del semicírculo en $(-2, 2)$.

Simulación teorema de Wigner



II. Buena predicción para n pequeña

n=5 and 20



Resultados límites clásicos en probabilidad

Universales vs no universales

- X_1, X_2, \dots variables aleatorias **independientes** con misma distribución F y sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- **Ley de grandes números:** Si media μ y varianza σ^2 finita, $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0.$$

- **Teorema Central del Límite:** $t_n = \sqrt{n}(S_n/n - \mu)/\sigma$ converge en distribución a una normal standard:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(t_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- **Teorema de Glivenko-Cantelli:** Con probabilidad uno la distribución empírica $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \# \{j; X_j \leq x\}$ converge uniformemente a F :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right) = 1.$$

- Resultados aún válidos si X_1, X_2, \dots **no son tan dependientes.**

La distribución de Wigner y probabilidad libre

Lo veremos más adelante en el curso

- Distribución del semicírculo

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, \quad |x| \leq 2$$

- Es la distribución gaussiana en probabilidad libre.
- Es la distribución límite en el teorema central del límite libre.
- Da lugar al movimiento browniano libre.

$$w_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4t - x^2}, \quad |x| \leq 2\sqrt{t}$$

- Independencia libre, independencia libre asintótica (Dan-Virgil Voiculescu, 90's).
- Divisibilidad infinita libre y procesos de Lévy libres

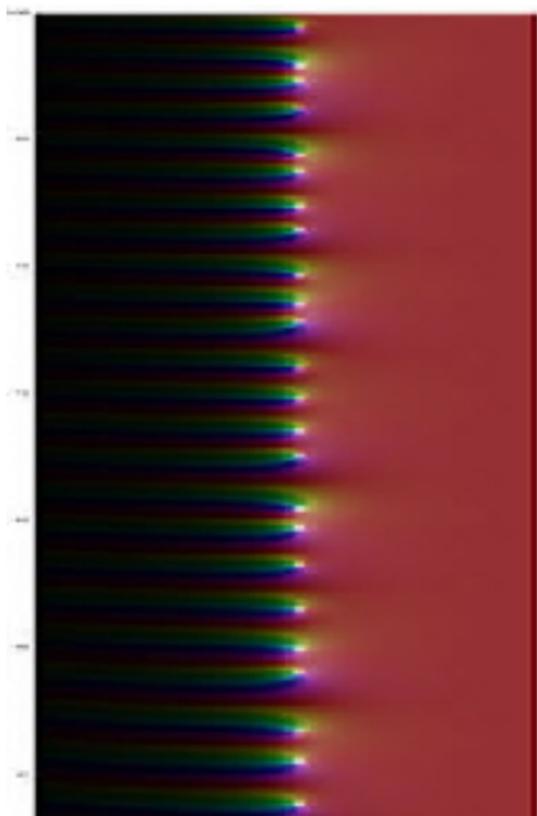
- Ver una demostración en el artículo de Domínguez y Rocha Arteaga (2011), Miscelánea Matemática No. 52.
- MATRICES ALEATORIAS, PROBABILIDAD NO CONMUTATIVA. Y TEMAS AFINES

Red mexicana de investigadores y estudiantes en estos temas

http://pnc.cimat.mx/es/Inicio_pnc

Relaciones inesperadas en matemáticas y física nuclear

Breviario cultural: Conjetura de Dyson y Montgomery



- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Breviario cultural

- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- Ecuación funcional para todo complejo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Breviario cultural

- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- Ecuación funcional para todo complejo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

- Hechos: Ceros triviales de ζ en $-2, -4, \dots$ y los no triviales en $(0, 1)$.

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Breviario cultural

- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- Ecuación funcional para todo complejo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

- Hechos: Ceros triviales de ζ en $-2, -4, \dots$ y los no triviales en $(0, 1)$.
- Hipótesis de Riemann: Ceros no triviales en $\text{Re}(s) = 1/2$.

- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- Ecuación funcional para todo complejo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

- Hechos: Ceros triviales de ζ en $-2, -4, \dots$ y los no triviales en $(0, 1)$.
- Hipótesis de Riemann: Ceros no triviales en $\text{Re}(s) = 1/2$.
- Conjetura de Dyson y Montgomery (1973): Los ceros no triviales de la función zeta se parecen a los valores propios de una matriz aleatoria de dimensión grande y es la misma que la distribución de valores consecutivos de valores altos de energía en un núcleo.

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Breviario cultural

- Función zeta: Para $\text{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

- Ecuación funcional para todo complejo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \text{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

- Hechos: Ceros triviales de ζ en $-2, -4, \dots$ y los no triviales en $(0, 1)$.
- Hipótesis de Riemann: Ceros no triviales en $\text{Re}(s) = 1/2$.
- Conjetura de Dyson y Montgomery (1973): Los ceros no triviales de la función zeta se parecen a los valores propios de una matriz aleatoria de dimensión grande y es la misma que la distribución de valores consecutivos de valores altos de energía en un núcleo.
- Hay 70 millones de ceros calculados por Andrew Odlyzko.

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): **(Statistical)** Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. Jour. Physics A: Math. and General, 36 (12).

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): **(Statistical)** Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. *Jour. Physics A: Math. and General*, 36 (12).
- F. Mezzadri y N. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*. Editorial Cambridge.

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): (**Statistical**) Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. *Jour. Physics A: Math. and General*, 36 (12).
- F. Mezzadri y N. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*. Editorial Cambridge.
- Tesis de Licenciatura de Julio Cesar Galindo, UNAM, 2013.

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): (**Statistical**) Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. *Jour. Physics A: Math. and General*, 36 (12).
- F. Mezzadri y N. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*. Editorial Cambridge.
- Tesis de Licenciatura de Julio Cesar Galindo, UNAM, 2013.
- *Seminario Interinstitucional Anual de Matrices Aleatorias*

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): (**Statistical**) Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. *Jour. Physics A: Math. and General*, 36 (12).
- F. Mezzadri y N. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*. Editorial Cambridge.
- Tesis de Licenciatura de Julio Cesar Galindo, UNAM, 2013.
- *Seminario Interinstitucional Anual de Matrices Aleatorias*
 - <http://sima2015.eventos.cimat.mx/>

Matrices aleatorias y la función zeta de Riemann

Lecturas sugeridas a los interesados

- P. Diaconis & M. Coram (1999): (**Statistical**) Tests of the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta. *Jour. Physics A: Math. and General*, 36 (12).
- F. Mezzadri y N. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*. Editorial Cambridge.
- Tesis de Licenciatura de Julio Cesar Galindo, UNAM, 2013.
- *Seminario Interinstitucional Anual de Matrices Aleatorias*
 - <http://sima2015.eventos.cimat.mx/>
- Trabajos de Eduardo Dueñez.

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.
- **Matriz aleatoria de correlaciones (Wishart):** $W_n = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+$.

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.
- **Matriz aleatoria de correlaciones (Wishart):** $W_n = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+$.
- **Marchenko-Pastur (1967):** $\mathbb{E}(H_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(H_{1,1}^2) = 1$

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.
- **Matriz aleatoria de correlaciones (Wishart):** $W_n = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+$.
- **Marchenko-Pastur (1967):** $\mathbb{E}(H_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(H_{1,1}^2) = 1$

-

$$S_n = \frac{1}{n} \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+.$$

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.
- **Matriz aleatoria de correlaciones (Wishart):** $W_n = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+$.
- **Marchenko-Pastur (1967):** $\mathbb{E}(H_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(H_{1,1}^2) = 1$

-

$$S_n = \frac{1}{n} \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+.$$

- Valores propios $\lambda_1^n \geq \dots \geq \lambda_p^n$ y

$$\hat{F}_n(\lambda) = \frac{1}{p} \# \left\{ j = 1, \dots, p; \lambda_j^n \leq \lambda \right\}.$$

Matriz de correlación: estudio asintótico

Distribución empírica espectral asintótica

- $\mathbf{H} = (H_n(j, k))$ matriz aleatoria $n \times p$.
- $\{H_n(j, k); j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p\}$ i.i.d.
- **Matriz aleatoria de correlaciones (Wishart):** $W_n = \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+$.
- **Marchenko-Pastur (1967):** $\mathbb{E}(H_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(H_{1,1}^2) = 1$

-

$$S_n = \frac{1}{n} \mathbf{H}^* \mathbf{H} \in S_p^+.$$

- Valores propios $\lambda_1^n \geq \dots \geq \lambda_p^n$ y

$$\widehat{F}_n(\lambda) = \frac{1}{p} \# \left\{ j = 1, \dots, p; \lambda_j^n \leq \lambda \right\}.$$

- Si $n/p \rightarrow c > 0$, \widehat{F}_n converge a la distribución de Marchenko-Pastur F_c de parámetro c .

Matriz de correlación

Distribución de Marchenko-Pastur

- Si $n/p \rightarrow c > 0$, \widehat{F}_n converge a la distribución de Marchenko-Pastur m_c de parámetro c

$$m_c(dx) = \begin{cases} f_c(x)dx, & \text{if } c \geq 1 \\ (1-c)\delta_0(dx) + f_c(x)dx, & \text{if } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$f_c(x) = \frac{c}{2\pi x} \sqrt{(x-a)(b-x)} \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

$$a = (1 - \sqrt{c})^2, \quad b = (1 + \sqrt{c})^2.$$

Matriz de correlación

Distribución de Marchenko-Pastur

- Si $n/p \rightarrow c > 0$, \widehat{F}_n converge a la distribución de Marchenko-Pastur m_c de parámetro c

$$m_c(dx) = \begin{cases} f_c(x)dx, & \text{if } c \geq 1 \\ (1-c)\delta_0(dx) + f_c(x)dx, & \text{if } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$f_c(x) = \frac{c}{2\pi x} \sqrt{(x-a)(b-x)} \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

$$a = (1 - \sqrt{c})^2, \quad b = (1 + \sqrt{c})^2.$$

- **Veremos aplicaciones en estadística multivariada, comunicación inalámbrica, genética, teoría de la privacidad, otras.**

Matriz de correlación

Distribución de Marchenko-Pastur

- Si $n/p \rightarrow c > 0$, \widehat{F}_n converge a la distribución de Marchenko-Pastur m_c de parámetro c

$$m_c(dx) = \begin{cases} f_c(x)dx, & \text{if } c \geq 1 \\ (1-c)\delta_0(dx) + f_c(x)dx, & \text{if } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$f_c(x) = \frac{c}{2\pi x} \sqrt{(x-a)(b-x)} \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

$$a = (1 - \sqrt{c})^2, \quad b = (1 + \sqrt{c})^2.$$

- **Veremos aplicaciones en estadística multivariada, comunicación inalámbrica, genética, teoría de la privacidad, otras.**
- La convergencia es en el mismo sentido que en el teorema de Wigner.

Matriz de correlación

Distribución de Marchenko-Pastur

- Si $n/p \rightarrow c > 0$, \widehat{F}_n converge a la distribución de Marchenko-Pastur m_c de parámetro c

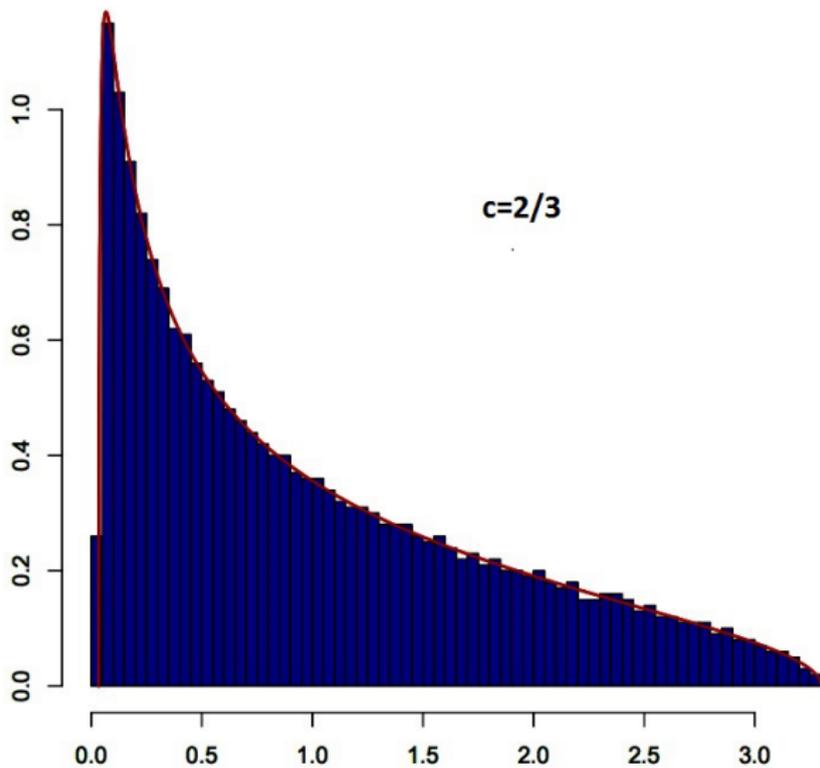
$$m_c(dx) = \begin{cases} f_c(x)dx, & \text{if } c \geq 1 \\ (1-c)\delta_0(dx) + f_c(x)dx, & \text{if } 0 < c < 1, \end{cases}$$

$$f_c(x) = \frac{c}{2\pi x} \sqrt{(x-a)(b-x)} \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$

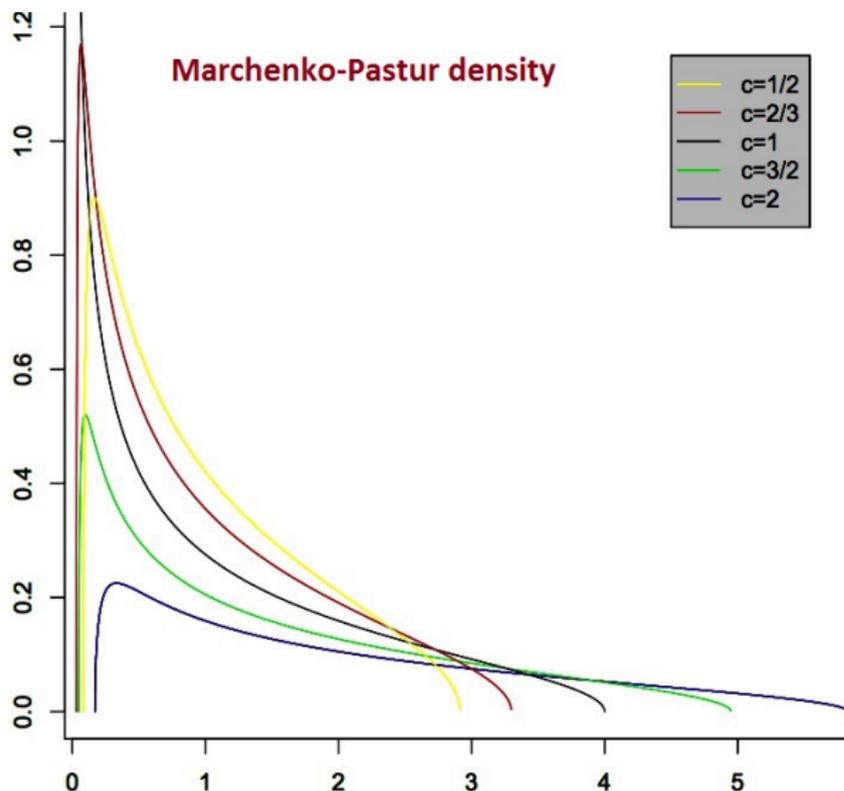
$$a = (1 - \sqrt{c})^2, \quad b = (1 + \sqrt{c})^2.$$

- **Veremos aplicaciones en estadística multivariada, comunicación inalámbrica, genética, teoría de la privacidad, otras.**
- La convergencia es en el mismo sentido que en el teorema de Wigner.
- Ojo con inconsistencia en literatura y VPA: n/p vs p/n .

Simulación Ley de Marchenko-Pastur

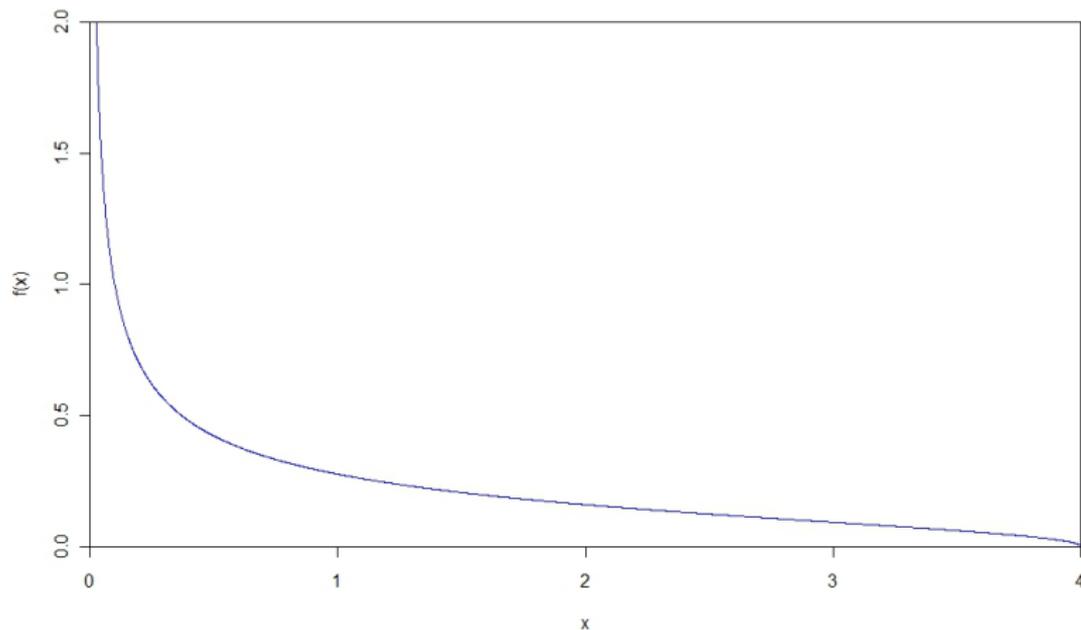


Distribución de Marchenko-Pastur



Distribución MP parámetro 1

$$c = 1, \text{ densidad } f_1(x) = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{x(4-x)} \mathbf{1}_{[0,4]}(x)$$



Un problema de estadística multivariada

Dimensión de muestra n igual dimensión de dato p

- $p/n \rightarrow c > 0$, da el **soporte de Marchenko-Pastur**:

$$[a = (1 - \sqrt{c})^2, b = (1 + \sqrt{c})^2].$$

- Caso Wishart:

$$nS_n = H_n H_n^\top \sim W_p(n, \Sigma),$$

H_n matriz de muestra de n i.i.d. the vectores $N_p(0, \Sigma)$, $\Sigma \in S_p^+$.

- *Problema estadístico*: Qué tan bien estiman los eigenvalores $\lambda_1^n \geq \dots \geq \lambda_p^n$ de S_n los eigenvalores $\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_p$ de Σ , si la *dimensión de datos* p y el *tamaño de muestra* n son del mismo orden?.
- **Johnstone** (2001). On the distribution of the largest eigenvalue in principal component analysis. *Ann. Statist.*
- **Johnstone** (2007). High dimensional statistical inference and random matrices. *Proc. ICM*. Madrid.

Un problema de estadística multivariada

Dimensión de muestra n igual dimensión de dato p

- Tomemos $p = n$, $c = 1$, $n = 10$ y muestra de vectores independientes $N_p(0, \Sigma = I_p)$.
- Una simulación de eigenvalores de S_{10} da

(0.003, 0.036, 0.095, 0.16, 0.30, 0.51, 0.78, 1.12, 1.40, 3.07).

- **Observamos lo disperso de estos eigenvalores y alejados de uno.**
- **El fenómeno lo explica la ley de MP:** ya que la DEE (ESD) de S_n with $p = n$ va a la distribución de MP con soporte:

$$a = (1 - \sqrt{1})^2 = 0 \text{ and } b = (1 + \sqrt{1})^2 = 4.$$

- **No es facil estimar los valores propios (poblacionales) de Σ cuando p, n son del mismo orden..**
- El caso $p > n$ aparece en genómica.

Distribución de Tracy-Widom

Distribución asintótica para el **eigenvalor máximo de eigenvalores de matrix de covarianza muestral** obteniendo la Tracy-Widom.

Sea $\lambda_{\max} = \lambda_1^n$ el valor propio más grande de $S_n \sim W_p(n, I_p)$.

Teorema (Johnstone) Caso Wishart. Con las constantes

$$r_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{p}, \quad q_n = r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{1/3},$$

se tiene que

$$\lim_n \mathbb{P} \left[\frac{\lambda_{\max} - r_n^2}{q_n} \leq t \right] = F_1(t)$$

donde F_1 es la distribución **Tracy-Widom**

$$F_1(t) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_t^\infty (q(x) + (x-t)q(x))^2 dx \right)$$

donde q es la solución de la ecuación diferencial de Painlevé II

$$q'' = tq + 2q^3, \quad q(t) \sim Ai(t) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

y Ai es la función de Airy. (Cálculo de percentiles).

Distribución de Tracy-Widom

Continuación de nuestro ejemplo:

- Supongamos que el eigenvalor máximo observado es 4.25.
- ¿Es esto consistente con la hipótesis $H_0 : \Sigma = I_p$?
- Por el teorema anterior, con $p = n = 10$:

$$\lim_n \mathbb{P} \left[\frac{\lambda_{\max} - r_n^2}{q_n} \leq t \right] = F_1(t)$$

$$r_n = \sqrt{n-1} + \sqrt{p}, \quad q_n = r_n \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{1/3}$$

$$\mathbb{P} (\lambda_{\max} > 4.25) \approx F_1 \left(\frac{10(4.25) - r_n^2}{q_n} \right) = 0.06.$$

Por lo tanto no rechazamos H_0 con nivel de significancia 5%.

- ¿Converge tan rápido?

Distribución Tracy-Widom

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)

Distribución Tracy-Widom

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)
- El Karoui, *Ann. Probab.* (2005), caso complejo.

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)
- El Karoui, *Ann. Probab.* (2005), caso complejo.
- Matrices dispersas (ralas): Hwang, Lee, Schnell (2018).

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^\top) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)
- El Karoui, *Ann. Probab.* (2005), caso complejo.
- Matrices dispersas (ralas): Hwang, Lee, Schnell (2018).
- Convergencia rápida

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)
- El Karoui, *Ann. Probab.* (2005), caso complejo.
- Matrices dispersas (ralas): Hwang, Lee, Schnell (2018).
- Convergencia rápida
 - Johnstone, Ma (2012) para GOE y GUE

Tracy, Widom *Comm. Math. Phys.* 1994, 1996).

- También se tiene para eigenvalor máximo de GOE, GUE y otros.
- ¿Condiciones en $H_n(j, k)$ ($\mathbf{H} = (H_n(j, k))$) para

$$\lambda_{\max}(S_n = \frac{1}{n}H_nH_n^T) \rightarrow^d TW?$$

- Bao, Pan, Zhou, *Ann. Statist.* (2015)
- El Karoui, *Ann. Probab.* (2005), caso complejo.
- Matrices dispersas (ralas): Hwang, Lee, Schnell (2018).
- Convergencia rápida
 - Johnstone, Ma (2012) para GOE y GUE
 - Similar a ensambles Laguerre (caso complejo de Wishart) y Jacobi.

Distribución Tracy-Widom

- ¿Relación con el curso de valores extremos?

Distribución Tracy-Widom

- ¿Relación con el curso de valores extremos?
- Debido a la fuerte dependencia de los valores propios, la distribución límite **no debiera** ser una de las distribuciones de extremos clásicas (Gumbel, Fréchet, Weibull).

- ¿Relación con el curso de valores extremos?
- Debido a la fuerte dependencia de los valores propios, la distribución límite **no debiera** ser una de las distribuciones de extremos clásicas (Gumbel, Fréchet, Weibull).
- En el seminario de probabilidad del 10 de octubre, Santiago Arenas dará ejemplos de ensamblajes de matrices aleatorias donde el eigenvalor máximo se va a una Gumbel (circular, circulantes, laplacianas).

Distribución Tracy-Widom

- ¿Relación con el curso de valores extremos?
- Debido a la fuerte dependencia de los valores propios, la distribución límite **no debiera** ser una de las distribuciones de extremos clásicas (Gumbel, Fréchet, Weibull).
- En el seminario de probabilidad del 10 de octubre, Santiago Arenas dará ejemplos de ensamblajes de matrices aleatorias donde el eigenvalor máximo se va a una Gumbel (circular, circulant, laplacianas).
- Universalidad de distribución Tracy-Widom:

Distribución Tracy-Widom

- ¿Relación con el curso de valores extremos?
- Debido a la fuerte dependencia de los valores propios, la distribución límite **no debiera** ser una de las distribuciones de extremos clásicas (Gumbel, Fréchet, Weibull).
- En el seminario de probabilidad del 10 de octubre, Santiago Arenas dará ejemplos de ensamblajes de matrices aleatorias donde el eigenvalor máximo se va a una Gumbel (circular, circulant, laplacianas).
- Universalidad de distribución Tracy-Widom:
 - Aparece cada día más en muchos contextos.

- ¿Relación con el curso de valores extremos?
- Debido a la fuerte dependencia de los valores propios, la distribución límite **no debiera** ser una de las distribuciones de extremos clásicas (Gumbel, Fréchet, Weibull).
- En el seminario de probabilidad del 10 de octubre, Santiago Arenas dará ejemplos de ensamblajes de matrices aleatorias donde el eigenvalor máximo se va a una Gumbel (circular, circulant, laplacianas).
- Universalidad de distribución Tracy-Widom:
 - Aparece cada día más en muchos contextos.
 - No solo en matrices aleatorias

Universalidad de la distribución Tracy-Widom

QUANTA illustrating science
MAGAZINE

STATISTICAL PHYSICS

At the Far Ends of a New Universal Law

A potent theory has emerged explaining a mysterious statistical law that arises throughout physics and mathematics.

