

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CIMAT

**Análisis asintótico espectral del
producto de gráficas y gráficas
k-distantes**

T E S I S

Que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
con Especialidad en
Probabilidad y Estadística

P r e s e n t a
Marco Tulio Gaxiola Leyva

Director de Tesis:
Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Guanajuato, Gto.. Julio de 2014

Integrantes del jurado

Presidente : Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión

Secretario: Dr. Gerónimo Uribe Bravo

Vocal: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Asesor:

Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Sustentante:

Marco Tulio Gaxiola Leyva

Análisis asintótico espectral del producto de gráficas y
gráficas k -distantes

Marco Tulio Gaxiola Leyva

Julio 2014

A mi madre

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento antes que nada a mis padres, Fausto Gaxiola Angulo (d.e.p.) y Aarona Leyva Cervantes por haberme dado la vida, y velar a toda hora para que ésta sea lo mejor posible.

A mis hermanos y a mis familiares, por siempre estar al pendiente de mis logros, y disfrutarlos como propios.

También quiero agradecer a mi amiga, mi compañera, mi esposa; gracias Sharo por tanta paciencia y tanto amor que me brindas a todo momento, te amo.

A todas las amistades que he hecho a lo largo de este camino, especialmente a los buenos amigos que he conocido durante la maestría.

También, doy las gracias a mi director de tesis Dr. Octavio Arizmendi Echegaray , por haberme aceptado como su alumno, por el tiempo y la paciencia dedicada a este trabajo.

Agradezco el tiempo dedicado a la revisión de esta tesis y los comentarios tan valiosos de los sinodales Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión y Dr. Gerónimo Uribe Bravo.

Finalmente, agradezco al Centro de Investigación en Matemáticas CIMAT y a todo el personal que ahí labora, por hacer mi estancia en este centro mucho más placentera. De igual

forma, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por la beca de maestría que recibí durante la misma.

A todos aquellos que por alguna razón no los mencioné, de verdad muchas gracias.

Contenido

Introducción	4
1 Polinomios Ortogonales	7
1.1 Sucesión de polinomios ortogonales y funcional de momentos	7
1.2 El criterio de Hamburger	10
1.2.1 Existencia de la sucesión de polinomios ortogonales	10
1.2.2 El problema de momentos	13
1.2.3 Ortogonalización de Gram-Schmidt	14
1.3 La fórmula de recurrencia fundamental	15
1.4 Coeficientes de Jacobi	17
1.5 Polinomios de Krawtchouk y de Hermite	21
1.5.1 Polinomios de Krawtchouk	21
1.5.2 Polinomios de Hermite	23
1.5.3 Convergencia de los polinomios de Krawtchouk a los polinomios de Hermite	27
1.6 Transformada de Cauchy y Fracciones Continuas	28
2 Probabilidad no-conmutativa	31
2.1 Espacio de Probabilidad No-Conmutativo	31
2.2 Nociones de Independencia	36
2.2.1 Convoluciones y Transformadas	42

<i>CONTENIDO</i>	2
2.3 Teoremas del Límite Central	44
2.4 Espacio de Fock	45
2.4.1 Descomposición cuántica	47
2.5 Fórmula de Accardi-Bozejko	49
2.6 Convergencia de potencias tensoriales de variables aleatorias	55
3 Gráficas	61
3.1 Conceptos básicos	61
3.1.1 Ejemplos de gráficas.	64
3.2 Teoría espectral de gráficas	65
3.2.1 Matrices asociadas a una gráfica	65
3.2.2 El espectro de una gráfica	66
3.3 Propiedades espectrales de una gráfica.	67
3.3.1 Caminatas	67
3.3.2 Diámetro	68
3.3.3 Conectividad	68
3.4 Ejemplo de gráficas y sus espectros	69
3.4.1 Gráficas regulares	72
3.4.2 Complementos	72
3.4.3 Gráficas coespectrales	73
4 Productos de Gráficas	74
4.1 Producto directo	74
4.2 Producto booleano	78
4.3 Producto monótono	81
4.4 Producto ortogonal	84
4.5 Producto Libre	87
5 Gráficas k-distantes	95
5.1 Gráficas k -distantes asociadas al Hiper cubo	97

<i>CONTENIDO</i>	3
5.2 Gráficas k -distantes asociadas al producto directo	102
5.3 Gráficas k -distantes asociadas al producto booleano	108
A Resultados Auxiliares	114
A.1 Producto de Kronecker	114

Introducción

El estudio de objetos combinatorios que van creciendo de manera determinista o aleatoria como particiones, permutaciones, caminatas, árboles, mapas, teselaciones, etcétera, se ha incrementado en los últimos años. De particular interés han sido la gráficas, dada su aplicabilidad en redes sociales, de comunicación, etc. El principal objetivo de esta tesis es el estudio de gráficas, desde el punto de vista de teoría espectral y combinatoria. En particular, nos interesa estudiar el análisis asintótico espectral de gráficas, producto de gráficas y las gráficas k -distantes asociadas a dichos productos. El estudio de las gráficas k -distantes, introducidas en 1989 por Brouwer, Cohen y Neumaier [8], ha tenido un gran auge gracias a los recientes trabajos de Kurihara [20], Obata [16], Hibino [15], y otros. Este trabajo estudia dichos resultados de manera unificada y autocontenida. Las herramientas que se necesitan para este estudio son Probabilidad No-Conmutativa y Polinomios Ortogonales con respecto a una medida de probabilidad.

Así, este trabajo se enmarca en la teoría de la probabilidad no-conmutativa, la cual fue iniciada por Hudson y Parthasarathy [18]. La probabilidad no-conmutativa se empezó a desarrollar desde los años 80's en respuesta a la necesidad de sentar las bases matemáticas de la física cuántica y surge a partir de las ideas de Von Neumann [26]. Al lector interesado en ahondar en estos temas, se le recomienda ver los libros de Obata [17], Speicher [27], Voiculescu, Dykema y Nica [40], Accardi, Lu y Volovich [4] y Meyer [24].

Una noción importante para el entendimiento de los productos de gráficas es el de independencia (no-conmutativa). En la teoría de la probabilidad no-conmutativa existen di-

ferentes nociones de independencia. La noción de independencia conmutativa se deriva de la independencia usual en la teoría de la probabilidad clásica. La noción de independencia libre fue introducida por Voiculescu [39]. La noción de independencia booleana se presenta en Speicher y Wourodi [36], y se usa implícitamente en el trabajo de Bozejko [7]. Por último, la noción de independencia monótona fue introducida por Muraki [25] y Lu [23] de manera independiente.

Es por esto que, una parte de este trabajo está dedicada al estudio de estos tipos de independencia, presentando las definiciones de cada una de ellas, así como ejemplos de variables aleatorias que cumplen cada uno de los distintos tipos de independencia.

Las nociones de independencia antes mencionadas corresponden también, a productos en gráficas bien estudiados. Es bien conocido que el producto cartesiano de las gráficas corresponde a la convolución clásica, tal cual se observa en Polya [33]. Recientemente, en los trabajos de Accardi, Hora y Obata [28], Accardi, Lenczewski y Salapata [3], entre otros, se ha encontrado que productos de gráficas bien conocidos corresponden a convoluciones en probabilidad no conmutativa. El producto libre de gráficas corresponde a la convolución libre de Voiculescu [39][41], el producto booleano de gráficas, estudiado en Woess [42] corresponde a convolución booleana, lo cual fue estudiado por Obata [29] y el producto monótono de gráficas está relacionado con la convolución monótona, estudiada por Krishnapur y Peres [19], este último hecho fue observado por Accardi, Ghorbal y Obata [2]. En el Capítulo 4 de esta tesis se explican, de manera detallada e ilustrativa, la descomposición de cada tipo de producto de gráficas, a partir de lo cual podemos afirmar que, la distribución de cada uno de los productos de gráficas, coincide con la distribución de la suma de variables aleatorias independientes, en el sentido correspondiente.

Por último, cabe mencionar que la descomposición cuántica, desarrollada por Hora y Obata [17], nos permite explicar el comportamiento de los productos de gráficas desde un punto de vista de la teoría clásica de Polinomios Ortogonales. La teoría de Polinomios Ortogonales tiene su origen en el trabajo de Legendre [22], acerca del movimiento de los

planetas. Además, fue desarrollada por Szego [37], Akhiezer [5], Favard [14], Shohat [35] y algunos otros.

En este trabajo se encuentra un compendio de las herramientas necesarias para estudiar el análisis asintótico espectral de los productos de gráficas, y las gráficas k -distantes asociadas a algunos productos de gráficas, desde el punto de vista de la probabilidad no-conmutativa. Además, una contribución de esta tesis es el Teorema 138, el cual es un resultado nuevo acerca del análisis asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al producto booleano de gráficas.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 se expone la teoría de los polinomios ortogonales, así como algunos resultados básicos en este marco teórico. De igual forma se definen los coeficientes de Jacobi, los cuales nos servirán más adelante para demostrar algunos resultados del tipo asintótico. En el Capítulo 2 se presenta la teoría de probabilidad no-conmutativa, se define lo que es un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo, se introducen distintos conceptos de independencia de variables aleatorias no-conmutativas. Además, en este capítulo se expone también la fórmula de Accardi-Bozejko, la cual nos da una relación entre los momentos de una distribución y sus coeficientes de Jacobi. El Capítulo 3 contiene teoría de gráficas básica y se presentan algunos ejemplos usuales de gráficas. Asimismo, se introduce la teoría espectral de gráficas. En el Capítulo 4 se presentan diferentes productos de gráficas, tales como: producto directo, producto booleano, producto monótono, producto ortogonal y producto libre. Además, en este capítulo se presenta un análisis asintótico espectral de cada uno de estos productos, a través de la descomposición de los mismos. Finalmente, en el Capítulo 5 se introduce el concepto de gráfica k -distante, y se presenta un estudio asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al hipercubo y al producto directo. En particular, se presenta un resultado nuevo, el cual está relacionado con el espectro de las gráficas k -distantes asociadas al producto booleano.

Capítulo 1

Polinomios Ortogonales

La teoría de los polinomios ortogonales tiene su origen en el trabajo de Legendre [22], acerca del movimiento de los planetas. Los polinomios ortogonales tienen aplicación en diversas ramas de las matemáticas, tales como la probabilidad y la estadística, además, de ser de gran utilidad en el ámbito de la mecánica cuántica.

En este capítulo estudiaremos la teoría de los polinomios ortogonales, dando la introducción a la misma, así como algunos teoremas importantes. Además, se mostrarán ejemplos de polinomios ortogonales exhibiendo las propiedades más importantes de estos. Al lector interesado en ahondar en estos temas, se le recomienda ver Chihara [10].

1.1 Sucesión de polinomios ortogonales y funcional de momentos

Definición 1 Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, y sea \mathcal{L} una función compleja en el espacio vectorial de todos los polinomios, definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^n] &= a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{L}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] &= \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2(x)],\end{aligned}$$

para todo número complejo α_i y todo polinomio $\pi_i(x)$ ($i = 1, 2$). A \mathcal{L} le llamamos el **funcional de momentos**, determinado por la **sucesión de momentos** $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Al número a_n le llamamos el momento de orden n (o el n -ésimo momento).

Una consecuencia inmediata de la definición, es que si tenemos el polinomio $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, entonces

$$\mathcal{L}[\pi(x)] = \sum_{k=0}^n c_k a_k.$$

Siempre se considera a x como una variable real, por lo que se tiene que

$$\mathcal{L}[\overline{\pi(x)}] = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} a_k,$$

donde \bar{z} denota al conjugado complejo del número complejo z .

Definición 2 Una sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se llama **sucesión de polinomios ortogonales**, con respecto al funcional de momentos \mathcal{L} , si para todo entero no negativo m y n se cumple que

- (i) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n ,
- (ii) $\mathcal{L}[P_n(x)P_m(x)] = 0$ para $m \neq n$,
- (iii) $\mathcal{L}[P_n^2(x)] \neq 0$.

Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales que además, cumple que $\mathcal{L}[P_n^2(x)] = 1$ para todo $n \geq 0$, entonces diremos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios **ortonormales**.

Si tenemos una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un funcional, se tiene que todo polinomio de grado n se puede escribir como combinación lineal de polinomios de dicha sucesión, de forma canónica.

Proposición 3 Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios ortogonales, con respecto al funcional \mathcal{L} . Se cumple, para todo polinomio $\pi(x)$ de grado n , que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x),$$

donde

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Demostración. Notemos que, como cada $P_k(x)$ es un polinomio de grado k , entonces $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ es una base para el subespacio vectorial de los polinomios de grado a lo más n , entonces podemos escribir al polinomio $\pi(x)$ como

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{con } c_n \neq 0.$$

Si en la igualdad anterior multiplicamos ambos lados por $P_m(x)$, con $m \leq n$, y aplicamos \mathcal{L} , gracias a la linealidad de \mathcal{L} obtendremos que

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_m \mathcal{L}[P_m^2(x)],$$

y dado que $\mathcal{L}[P_m^2(x)] \neq 0$, el resultado se cumple. ■

Corolario 4 Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales para \mathcal{L} y además, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es también una sucesión de polinomios ortogonales para \mathcal{L} , entonces existen constantes $c_n \neq 0$, tales que

$$Q_n = c_n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demostración. Por los mismos argumentos usados en la demostración anterior, sabemos que se cumple que

$$\mathcal{L}[Q_n P_n(x)] = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)],$$

de donde se sigue que si $k < n$,

$$\mathcal{L}[Q_n P_k(x)] = 0,$$

por lo tanto si tomamos $\pi(x) = Q_n(x)$ y aplicamos la proposición anterior, entonces se sigue el resultado. ■

Acabamos de demostrar que una sucesión de polinomios ortogonales está determinada de manera única, salvo multiplicación por escalares distintos de cero.

1.2 El criterio de Hamburger

1.2.1 Existencia de la sucesión de polinomios ortogonales

Con el fin de establecer un resultado para verificar la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales, dado un funcional de momentos \mathcal{L} , introducimos el concepto de *determinante de Hankel*, el cual se define como

$$\Delta_n = \det (a_{i+j})_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Teorema 5 *Sea \mathcal{L} un funcional de momentos con sucesión de momentos $\{a_n\}_{n \geq 0}$. Una condición necesaria y suficiente para que exista una sucesión de polinomios ortogonales para \mathcal{L} es*

$$\Delta_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demostración. Sea $P_n(x)$ un polinomio en x , de tal forma que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_{ni} x^i,$$

gracias a la Proposición 3 se tiene que

$$\mathcal{L} [x^m P_n(x)] = \sum_{i=0}^n c_{ni} a_{k+m} = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0, \quad m \leq n, \quad (1.1)$$

lo cual es equivalente al sistema

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ K_n \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

además, recordemos que, si existe una sucesión de polinomios ortogonales, ésta es determinada de manera única por los K_n en (1.1), esto implica que (1.1) tiene una única solución, por lo tanto $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Ahora, si $\Delta_n \neq 0$, entonces para $K_n \neq 0$ arbitrario, el sistema (1.2) tiene una única solución, por lo que existe un $P_n(x)$ que satisface la ecuación (1.1). Además, tenemos que

$$c_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

lo cual se cumple incluso para $n = 0$, si definimos $\Delta_{-1} = 1$. De lo anterior se sigue que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n , por lo tanto $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales para \mathcal{L} . ■

Definición 6 Decimos que un funcional de momentos \mathcal{L} es **positivo definido**, si para todo polinomio $\pi(x) \neq 0$, tal que $\pi(x)$ es no negativo para todo real x , se tiene que $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$.

Queremos relacionar el concepto de positivo definido con los determinantes de Hankel, para esto vamos a necesitar del siguiente resultado, el cual caracteriza polinomios no negativos.

Lema 7 Un polinomio $\pi(x)$ es no negativo para todo x real, si y solo si, existen polinomios reales $p(x)$ y $q(x)$, tales que

$$\pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Demostración. Si $\pi(x) \geq 0$ para todo real x , entonces $\pi(x)$ es un polinomio real, lo cual implica que sus raíces reales tienen multiplicidad impar y sus raíces imaginarias aparecen en pares conjugados. Entonces, podemos escribir

$$\pi(x) = r^2(x) \prod_{k=1}^m (x - \alpha_k - \beta_k i)(x - \alpha_k + \beta_k i),$$

donde $r(x)$ es un polinomio real, α_k y β_k son números reales. Podemos escribir

$$\prod_{k=1}^m (x - \alpha_k - \beta_k i)(x - \alpha_k + \beta_k i) = A(x) + iB(x),$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios reales, entonces obtenemos que

$$\pi(x) = r^2(x) [A^2(x) + B^2(x)].$$

■

Teorema 8 *El funcional de momentos \mathcal{L} es positivo definido si y solo si sus momentos son reales y $\Delta_n > 0$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Sea a_n real, $\Delta_n > 0$ para todo $n \geq 0$, entonces, gracias al Teorema 5 existe una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ para \mathcal{L} . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $P_n(x)$ es mónico. Tenemos que si $\pi_n(x)$ es un polinomio de grado n , cuyo n -ésimo coeficiente es a_n , entonces podemos escribir

$$\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x),$$

donde $\pi_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\pi_n(x) P_n(x)] &= a_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)] + \mathcal{L}[\pi_{n-1}(x) P_n(x)] \\ &= a_n \mathcal{L}[x^n P_n(x)], \end{aligned}$$

por lo que, de la ecuación (1.3), se obtiene que

$$\mathcal{L}[\pi_n(x) P_n(x)] = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (1.4)$$

por lo tanto, de (1.4) se concluye que

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0.$$

De acuerdo al sistema (1.2), se tiene que $P_n(x)$ es real. Si se tiene que $p(x)$ es un polinomio real de grado m , podemos escribir

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k(x),$$

donde a_k son todos reales y $a_m \neq 0$. Gracias a lo anterior se tiene que

$$\mathcal{L} [p^2(x)] = \sum_{j,k=0}^m a_j a_k \mathcal{L} [P_j(x) P_k(x)] = \sum_{k=0}^m a_k^2 \mathcal{L} [P_k^2(x)] > 0,$$

de donde, gracias al Lema 7 se sigue que \mathcal{L} es positivo definido.

Ahora, si suponemos que \mathcal{L} es positivo definido, podemos asegurar la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$, gracias al proceso de Gram-Schmidt. De nueva cuenta podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $P_n(x)$ es mónico. Utilizando el mismo argumento usado al principio de esta prueba, se tiene que

$$\mathcal{L} [P_n^2(x)] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0, \quad n \geq 0,$$

y como $\Delta_{-1} = 1$, se tiene entonces que $\Delta_n > 0$, para todo $n \geq 0$, lo que concluye la prueba.

■

1.2.2 El problema de momentos

El problema de momentos de Hamburger, relacionado a una sucesión de números reales dada $\{a_n\}_{n \geq 0}$, se refiere a encontrar una función monótona no decreciente ψ definida en $(-\infty, \infty)$, tal que

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si tal función ψ existe, entonces decimos que es una solución al problema de momentos de Hamburger.

Definición 9 Una función acotada, no decreciente ψ , cuyos momentos

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

son finitos, se dice que es una **función de distribución**.

Si nos enfocamos solamente, en encontrar la existencia de la solución al problema de momentos de Hamburger, nos damos cuenta que, gracias al Teorema 5, una condición necesaria

y suficiente para que exista la solución es, que el funcional de momentos correspondiente sea positivo definido, lo cual puede resumirse, gracias al Teorema 8, en el siguiente resultado.

Teorema 10 (Criterio de Hamburger) *Una condición necesaria y suficiente, para que el problema de momentos de Hamburger tenga solución es*

$$\Delta_n \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Notemos que, cuando se tiene que $\Delta_n = 0$ para todo n excepto un número finito, entonces se cumple que la función de distribución que le da solución al problema de momentos, tiene soporte finito.

1.2.3 Ortogonalización de Gram-Schmidt

Supongase que se tiene una distribución de probabilidad μ (la cual tiene momentos de todos los ordenes). Definimos el producto interno en $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x) \mu(dx),$$

aplicando la ortogonalización de Gram-Schmidt a $1, x, x^2, x^3, \dots$, obtenemos una sucesión de polinomios ortogonales $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$, de la forma

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_1 &= x - \frac{\langle P_0, x \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0, & P_2 &= x^2 - \frac{\langle P_0, x^2 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 - \frac{\langle P_1, x^2 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 \\ P_n &= x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle P_k, x \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$P_n(x) = x^n + \dots, \quad \langle P_m, P_n \rangle = 0 \quad \text{para } m \neq n.$$

1.3 La fórmula de recurrencia fundamental

Una de las propiedades más importantes de los polinomios ortogonales, es que, si se tiene una sucesión de polinomios ortogonales, entonces cualesquiera tres polinomios consecutivos se pueden escribir con una fórmula de recurrencia. En esta sección nos dedicaremos a describir esta relación fundamental.

Definición 11 Decimos que el funcional de momentos \mathcal{L} es *quasi-definido*, si y solo si, $\Delta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 12 Sea \mathcal{L} un funcional de momentos *quasi-definido* y sea $\{P_n(x)\}$, su correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales, entonces existen constantes c_n y $\lambda_n \neq 0$ tales que

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.5)$$

donde, por definición, $P_{-1}(x) = 0$.

Además, si \mathcal{L} es *positivo-definido*, entonces c_n es real y $\lambda_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$ (λ_1 es arbitrario).

Demostración. Dado que $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$, entonces podemos escribir

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k(x), \quad a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]},$$

pero como $xP_k(x)$ es un polinomio de grado $k+1$, entonces se tiene que $a_{nk} = 0$, para $0 \leq k < n-1$, además, $xP_n(x)$ es mónico, por lo tanto $a_{nn+1} = 1$, entonces se cumple que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{nn-1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

lo cual puede ser reescrito de la siguiente forma

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

lo cual es equivalente a (1.5) para $n \geq 2$, y para $n = 1$ definimos $P_{-1}(x) = 0$ y escogemos $c_1 = -P_1(0)$ (λ_1 es arbitrario).

Ahora, gracias a (1.5) se cumple que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^{n-2}P_n(x)] &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - c_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-1}(x)] - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-2}(x)], \\ 0 &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-2}(x)].\end{aligned}$$

Ahora, gracias a (1.4) se cumple que

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)P_n(x)] = a_n\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad \Delta_{-1} = 1,$$

por lo tanto, se cumple que

$$\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[x^n P_n(x)]}{\mathcal{L}[x^{n-1} P_{n-1}(x)]} = \frac{\Delta_{n-2} \Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

de donde, \mathcal{L} es quasi-definido, entonces se sigue que $\lambda_n \neq 0$, y si \mathcal{L} es positivo-definido entonces $\lambda_n > 0$. Por último, el hecho de que c_n sea real, se sigue de que $P_k(x)$ es real. ■

De la fórmula (1.5) podemos notar que

$$\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]} = \frac{\Delta_{n-2} \Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

de donde se sigue que

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1},$$

con $\lambda_1 = a_0 = \Delta_0$. También, si multiplicamos ambos lados de (1.5) por $P_{n-1}(x)$ y aplicamos \mathcal{L} , entonces

$$c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}.$$

Además, si d_n es el coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$, comparando los coeficientes de x^{n-1} en ambos lados de la fórmula (1.5), se tiene que $d_n = d_{n-1} - c_n$, por lo que se obtiene que el coeficiente de x^{n-1} en $P_n(x)$ es

$$-(c_1 + c_2 + \cdots + c_n).$$

En el caso en que $\{P_n(x)\}$ no es de polinomios mónicos, la sucesión cumplirá una fórmula de recurrencia de la forma

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0.$$

Si escribimos $P_n(x) = k_n \hat{P}_n(x)$, donde $\hat{P}_n(x)$ es mónico, encontramos que

$$A_n = k_n^{-1} k_{n+1}, \quad B_n = -c_{n+1} k_n^{-1} k_{n+1}, \quad C_n = \lambda_{n+1} k_{n-1}^{-1} k_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

donde $k_{-1} = 1$, y c_n, λ_n están dados por el Teorema 12 en términos de $\{\hat{P}_n(x)\}$.

1.4 Coeficientes de Jacobi

En la sección anterior, vimos que si tenemos una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$, con respecto a un funcional de momentos \mathcal{L} , entonces podemos escribir a cualquier polinomio de dicha sucesión, en términos de los dos polinomios consecutivos, es decir, para toda $n \geq 1$ se tiene que

$$P_n(x) = (x - c_n) P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),$$

lo cual puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1} P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x). \quad (1.6)$$

Esta ecuación nos sirve para, a continuación, definir los coeficientes de Jacobi.

Definición 13 *El par de sucesiones $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$, determinadas en la ecuación (1.6), son llamados los **coeficientes de Jacobi** de la sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ o del funcional de momentos \mathcal{L} .*

Bajo esta definición, podemos obtener, a partir de la fórmula de recurrencia (1.5), el siguiente corolario.

Corolario 14 Sea $\{P_n(x)\}$ la sucesión de polinomios ortogonales asociada a la medida de probabilidad μ , entonces los coeficientes de Jacobi $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ están determinados por

$$\begin{aligned}\omega_n \cdots \omega_2 \omega_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)^2 \mu(dx), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \alpha_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \mu(dx), \\ \alpha_n \omega_{n-1} \cdots \omega_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x P_{n-1}(x)^2 \mu(dx), \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

En particular, α_1 es la esperanza de μ y ω_1 es la varianza, es decir

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 \mu(dx).$$

Notemos que los coeficientes de Jacobi no definen una medida de probabilidad de manera única, esto debido a la no unicidad del problema de momentos. En cambio, los coeficientes de Jacobi muestran algunas otras propiedades de las medidas de probabilidad.

Proposición 15 Sean $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ los coeficientes de Jacobi de la medida de probabilidad μ . Si μ es simétrica, es decir, $\mu(-dx) = \mu(dx)$, entonces $\alpha_n = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$

Demostración. Sea $\{P_n(x)\}$ la sucesión de polinomios ortogonales asociada a μ . Definimos $Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$, entonces para $m \neq n$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x) Q_n(x) \mu(dx) &= (-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(-x) P_n(-x) \mu(dx) \\ &= (-1)^{m+n} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) \mu(dx) = 0,\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se obtiene de un cambio de variable, y del hecho de que la medida de probabilidad μ es simétrica. Como el polinomio $Q_n(x)$ es de grado n , se sigue que $P_n(x) = Q_n(x)$, es decir

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

Por otro lado, si reemplazamos x por $-x$ en la ecuación (1.6) entonces se tiene que

$$\begin{aligned}P_1(-x) &= -x - \alpha_1, \\ (-x) P_n(-x) &= P_{n+1}(-x) + \alpha_{n+1} P_n(-x) + \omega_n P_{n-1}(-x).\end{aligned}$$

Entonces, usando (1.7) en la ecuación anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x + \alpha_1, \\ xP_n(x) &= P_{n+1}(x) - \alpha_{n+1}P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x), \end{aligned}$$

por lo tanto, si comparamos esta última ecuación con la ecuación (1.6), podemos ver que $\alpha_n = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$ ■

En general, el recíproco de esta proposición no es válido, dada la no unicidad del problema de momentos. En cambio, se tiene la siguiente afirmación.

Proposición 16 *Sea μ una medida de probabilidad y $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ sus coeficientes de Jacobi. Si μ es la solución de un problema de momentos determinado, y además, se tiene que $\alpha_n \equiv 0$, entonces μ es simétrica.*

Demostración. Definimos una medida de probabilidad ν por

$$\nu(-E) = \mu(E), \quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Notemos que $\{Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociada a ν . Por otro lado, dado que $\alpha = 0$ para todo n , entonces la fórmula de recurrencia de $\{Q_n(x)\}$ coincide con la de $\{P_n(x)\}$, por lo tanto $P_n(x) = Q_n(x)$. Tenemos que para cada $m = 1, 2, \dots$, existen $c_{m,0}, c_{m,1}, \dots, c_{m,m-1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^m = P_m(x) - \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} P_k(x) = Q_m(x) - \sum_{k=0}^{m-1} c_{m,k} Q_k(x).$$

Gracias a la ortogonalidad se tiene que

$$M_m(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx) = c_{m,0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \nu(dx) = M_m(\nu),$$

para todo $m = 1, 2, \dots$. Como μ está determinada por sus momentos por hipótesis, entonces se concluye que $\mu = \nu$. ■

Ejemplo 17 Los *polinomios de Chebyshev de primera clase* $\{T_n(x)\}$ están definidos por

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Escribimos

$$\tilde{T}_0(x) = T_0(x) = 1, \quad \tilde{T}_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad n \geq 1.$$

Se cumple que $\{\tilde{T}_n(x)\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociada a la ley del *ar-coseno*

$$\frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad -2 < x < 2.$$

Los coeficientes de Jacobi son $\{\omega_n\} = \{2, 1, 1, \dots\}$ y $\{\alpha_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$.

Ejemplo 18 Los *polinomios de Chebyshev de segunda clase* $\{U_n(x)\}$ están definidos por

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Escribimos

$$\tilde{U}_n(x) = U\left(\frac{x}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se cumple que $\{\tilde{U}_n(x)\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociada a la ley del *semi-círculo de Wigner*, la cual está definida por

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Los coeficientes de Jacobi son $\{\omega_n\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ y $\{\alpha_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$.

Existe una relación entre los coeficientes de Jacobi de una medida de probabilidad y sus momentos, la cual está dada por la fórmula de Accardi-Bozejko (ver Teorema 61):

$$a_m = \sum_{\sigma \in NC_{1,2}(m)} \prod_{\substack{V \in \sigma \\ |V|=1}} \alpha_{d(V,\sigma)} \prod_{\substack{V \in \sigma \\ |V|=2}} \omega_{d(V,\sigma)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde $\{a_m\}$ son los momentos de la medida de probabilidad y (ω_m, α_m) son sus coeficientes de Jacobi, con $d(V, \sigma)$ la profundidad del bloque V en la partición σ (ver Sección 2.5).

1.5 Polinomios de Krawtchouk y de Hermite

1.5.1 Polinomios de Krawtchouk

En esta sección definiremos un tipo de polinomios ortogonales, los cuales nos servirán en el Capítulo 5 para hacer un análisis de la matriz de adyacencia de las gráficas k -distantes del producto directo de gráficas. Presentamos a continuación la definición de los polinomios de Krawtchouk, así como algunas propiedades importantes de los mismos, tales como: ortogonalidad, fórmula de recurrencia, normalización y algunas otras.

Dados un entero $N \geq 1$, y un número real $0 < p < 1$, definimos los *polinomios de Krawtchouk*: $k_n^{(N,p)}(x)$ como

$$\begin{aligned} k_n^{(N,p)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-N)_{n-k} (x-k+1)_k}{(n-k)!k!} p^{n-k} (1-p)^k \\ &= (-p)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-x)_k}{(-N)_k} p^{-k}, \end{aligned}$$

donde $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$.

Los polinomios de Krawtchouk son polinomios que son ortogonales con respecto a la distribución binomial $B(N, p)$, es decir, cumplen que

$$\sum_{x=0}^N k_m^{(N,p)}(x) k_n^{(N,p)}(x) \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^n \delta_{mn}.$$

Aplicando el Teorema 12, obtenemos que los polinomios de Krawtchouk cumplen la siguiente fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} k_0^{(N,p)}(x) &= 1, \\ k_1^{(N,p)}(x) &= x - pN \\ x k_n^{(N,p)}(x) &= (n+1) k_{n+1}^{(N,p)}(x) \\ &\quad + (pN + n - 2pn) k_n^{(N,p)}(x) + p(1-p)(N-n+1) k_{n-1}^{(N,p)}(x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tomando la siguiente normalización de los polinomios de Krawtchouk, tenemos que

$$K_n^{(N)}(x) := 2^n n! k_n^{(N,1/2)} \left(\frac{x+N}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

De un cambio de variable, se puede verificar que la sucesión de polinomios $\{K_n^{(N)}(x)\}$ cumple que es ortogonal con respecto a la distribución

$$\beta_N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{1}{2^N} \delta_{-N+2j},$$

el siguiente lema establece dicho resultado.

Lema 19 *La sucesión de polinomios $\{K_n^{(N)}(x)\}_{n \geq 0}$ es ortogonal con respecto a β_N .*

Dado que la sucesión $\{K_n^{(N)}(x)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces también cumplen una fórmula de recurrencia. Presentamos en el siguiente resultado dicha recurrencia.

Lema 20 *La sucesión de polinomios ortogonales $\{K_n^{(N)}(x)\}_{n \geq 0}$ cumple la siguiente fórmula de recurrencia:*

$$\begin{aligned} K_0^{(N)}(x) &= 1 \\ K_1^{(N)}(x) &= x \\ xK_n^{(N)}(x) &= K_{n+1}^{(N)}(x) + (N-n+1)nK_{n-1}^{(N)}(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Demostración. Aplicando la normalización (1.9) a la fórmula de recurrencia de los polinomios de Krawtchouk (1.8), obtenemos el resultado deseado. ■

1.5.2 Polinomios de Hermite

Definimos los *polinomios de Hermite* como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

y observemos que $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ son polinomios de grado n . Se tiene que

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),$$

es decir, H_n es par si n es par, e impar si n es impar.

Los primeros polinomios de Hermite son

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

La función generatriz

Sea $\psi(x, t) = e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = e^{2xt-t^2}$, y notemos que podemos escribir a ψ según su expansión en series de Taylor como

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t^n} \Big|_{t=0} \frac{t^n}{n!},$$

utilizando la siguiente igualdad

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial(x-t)} (-1),$$

entonces obtenemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^n} \Big|_{t=0} = e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial(x-t)^n} \Big|_{t=0} (-1)^n = e^{x^2} \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n} (-1)^n = H_n(x),$$

por lo tanto

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n,$$

de donde se concluye que ψ es la función generatriz de los polinomios de Hermite.

Fórmulas de recurrencia

A partir de la función generatriz de los polinomios de Hermite podemos encontrar relaciones entre los polinomios consecutivos (en grado). La manera de hacerlos es derivando parcialmente la función generatriz con respecto a una de las variables y luego comparar potencias de t en los desarrollos de Taylor resultates.

En primer lugar derivamos ψ con respecto a x

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2t\psi,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d}{dx} H_n(x) \right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} 2t^{n+1},$$

de aquí podemos reordenar los índices para obtener la siguiente igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(x)}{n!} t^{n+1} = H'_0(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H'_m(x)}{(m+1)!} t^{m+1},$$

comparando los coeficientes de las potencias de t en cada serie se encuentra que

$$\begin{aligned} H'_0(x) &= 0 \\ 2H_n(x) &= \frac{1}{n+1} H'_{n+1}(x) \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir como

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) \quad n \geq 0, \tag{1.11}$$

para poder escribir esta última igualdad definimos a los polinomios de Hermite con índice negativo tienen valor igual a cero.

Para encontrar otra fórmula de recurrencia procedemos de manera similar a la anterior, solo que ahora derivamos la función generatriz con respecto a la variable t ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (2x - 2t) \psi,$$

entonces se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1},$$

de igual manera reordenando los índices llegamos a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x H_n(x)}{n!} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n,$$

comparando potencias de t verificamos que

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \quad n \geq 0. \quad (1.12)$$

Si sustituimos la relación (1.11) en (1.12) se obtiene que

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H'_n(x).$$

Ortogonalidad

Un aspecto importante de los polinomios de Hermite es que son ortogonales con respecto a la función peso definida por e^{-x^2} . Para verificar este hecho, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que se tiene que $n \geq m$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} dx,$$

lo cual, si integramos por partes y usando la relación de recurrencia (1.11), nos da que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1} e^{-x^2}}{dx^{n-1}} dx,$$

por lo tanto si integramos por partes n veces, no queda la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n+m} 2^n m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} dx,$$

si tomamos $m < n$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n+m} 2^n m! \left. \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

esto último se debe a que $\frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}} = p_{n-m}(x) e^{-x^2}$, donde $p_{n-m}(x)$ es una función polinomial en x . Ahora, si $n = m$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n m! \sqrt{\pi},$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n m! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

Polinomios mónicos de Hermite

Los *polinomios mónicos de Hermite* se definen como

$$\tilde{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}. \quad (1.13)$$

Notemos que los polinomios de Hermite y los polinomios mónicos de Hermite se relacionan de la siguiente manera

$$H_n(x) = 2^{n/2} \tilde{H}_n(\sqrt{2}x),$$

por lo tanto, gracias a la relación de recurrencia (1.12), se tiene que

$$2^{\frac{n+1}{2}} \tilde{H}_{n+1}(\sqrt{2}x) = 2x 2^{n/2} \tilde{H}_n(\sqrt{2}x) - 2n 2^{\frac{n-1}{2}} \tilde{H}_{n-1}(\sqrt{2}x),$$

de donde obtenemos la siguiente relación de recurrencia para los polinomios mónicos de Hermite

$$\tilde{H}_{n+1}(x) = x \tilde{H}_n(x) - n \tilde{H}_{n-1}(x).$$

Se tiene también que los polinomios mónicos de Hermite son polinomios ortogonales con respecto a la distribución normal estándar $\mathcal{N}(0, 1)$, es decir, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple la igualdad siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_m(x) \tilde{H}_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = n! \delta_{nm}.$$

1.5.3 Convergencia de los polinomios de Krawtchouk a los polinomios de Hermite

Una característica importante de los polinomios de Krawtchouk, la cual será usada en el Capítulo 5 para el análisis asintótico espectral del producto directo de gráficas, es que bajo la normalización adecuada, estos convergen a los polinomios de Hermite.

Lema 21 *Para cada $k = 0, 1, 2, \dots$ se cumple que*

$$\tilde{H}_k(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-k/2} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x). \quad (1.14)$$

Demostración. Aplicando la normalización de la parte derecha de la ecuación (1.14) a la fórmula de recurrencia (1.10) obtenemos que

$$\begin{aligned} N^{-0/2} K_0^{(N)}(\sqrt{N}x) &= 1 = \tilde{H}_0(x), \\ N^{-1/2} K_1^{(N)}(\sqrt{N}x) &= \frac{\sqrt{N}x}{\sqrt{N}} = x = \tilde{H}_1(x), \end{aligned}$$

además, se tiene que para $k \geq 2$, se cumple

$$\sqrt{N}x K_k^{(N)}(\sqrt{N}x) = K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) + (N - k + 1) k K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x),$$

de donde, multiplicando ambos lados de la ecuación por $N^{-(k+1)/2}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x N^{-k/2} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x) &= N^{-(k+1)/2} K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) + N^{-(k+1)/2} (N - k + 1) k K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) \\ &= N^{-(k+1)/2} K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) + k N^{-(k-1)/2} K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) \\ &\quad - k^2 N^{-(k+1)/2} K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x) + k N^{-(k+1)/2} K_{k+1}^{(N)}(\sqrt{N}x), \end{aligned}$$

si escribimos

$$K'_k(x) = N^{-k/2} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x),$$

entonces tendremos que

$$x K'_k(x) = K'_{k+1}(x) + k K'_{k-1}(x) - \frac{k^2}{N} K'_{k-1}(x) + \frac{k}{N} K'_{k-1}(x),$$

de donde tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$, se obtiene el resultado. ■

1.6 Transformada de Cauchy y Fracciones Continuas

Sea \mathcal{M} el conjunto de las medidas de probabilidad en \mathbb{R} . Denotamos al semi-plano superior y al semi-plano inferior por \mathbb{C}^+ y \mathbb{C}^- , respectivamente.

Sea $\mu \in \mathcal{M}$, entonces definimos la transformada de Cauchy de μ por

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{z-x} \right) \mu(dx) \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

La relación entre convergencia débil y la transformada de Cauchy es la siguiente.

Proposición 22 *Sea $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de medidas de probabilidad, entonces las siguientes son equivalentes:*

- (i) $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ converge débilmente a una medida de probabilidad μ .
- (ii) Para todo $z \in \mathbb{C}^+$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\mu_n}(z) = G_\mu(z).$$

- (iii) Para todo z , tal que $\text{Im}(z) \geq b$, con $b > 0$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\mu_n}(z) = G_\mu(z).$$

Una medida de probabilidad μ tiene soporte finito si y solo si $\gamma_{m-1} = 0$ y $\gamma_n > 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $n = 0, 1, \dots, m-2$.

Si escribimos $z = x + iy$ se tiene la siguiente descomposición de la transformada de Cauchy

$$G_\mu(z) = G_\mu(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} \mu(dt) - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \mu(dt),$$

de donde podemos obtener las siguientes propiedades de G_μ .

Proposición 23 Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R} , entonces se cumple que

(i) $G_\mu(\mathbb{C}^\pm) \subset \mathbb{C}^\mp$ y $G_\mu(\bar{z}) = \overline{G_\mu(z)}$.

(ii) $|G_\mu(z)| \leq \frac{1}{\text{Im}(z)}$.

(iii) $\text{Im}(z) \text{Im} G_\mu(z) < 0$.

(iv) $\lim_{y \rightarrow \infty} y |G_\mu(iy)| < \infty$.

(v) $\lim_{y \rightarrow \infty} iy G_\mu(iy) = 1$.

La transformada de Cauchy se puede expresar como una fracción continua en términos de sus coeficientes de Jacobi, de la siguiente forma:

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} \mu(dt) = \frac{1}{z - \alpha_0 - \frac{\omega_0}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2 - \dots}}}$$

En el caso en que la medida de probabilidad μ tiene $2n+2$ momentos, podemos hacer un procedimiento de ortogonalización hasta el nivel n . En este caso la transformada de Cauchy tiene la forma

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z - \alpha_0 - \frac{\omega_0}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2 - \dots - \frac{\omega_{n-1}}{z - \alpha_n - \omega_n G_\nu(z)}}}}, \tag{1.15}$$

donde ν es una medida de probabilidad.

Proposición 24 Sea μ una medida de probabilidad con coeficientes de Jacobi

$(\{\omega_n(\mu)\}, \{\alpha_n(\mu)\})$, tales que para algún k , $\omega_k(\mu) = 0$. Si $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de medidas tales que $\omega_i(\mu_n) \rightarrow \omega_i(\mu)$ y $\alpha_i(\mu_n) \rightarrow \alpha_i(\mu)$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, entonces μ_n converge en distribución a μ .

Demostración. Sea G_{μ_n} la transformada de Cauchy de μ_n . Gracias a la ecuación (1.15)

podemos escribir a G_{μ_n} como

$$G_{\mu_n}(z) = \frac{1}{z - \alpha_0 - \frac{\omega_0}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{\ddots}}},$$

donde ν_k es una medida de probabilidad. De la Proposición 23 se sigue que $G_{\nu_k}(z)$ está acotada por 1 en el conjunto $\{z : \Im(z) \geq 1\}$, y dado que $\omega_k \rightarrow 0$, entonces se cumple que $\omega_k G_{\nu_k}(z) \rightarrow 0$, por lo tanto se cumple que

$$G_{\mu_n}(z) \rightarrow \frac{1}{z - \alpha_0 - \frac{\omega_0}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{\ddots}}},$$

en el conjunto $\{z : \Im(z) \geq 1\}$, lo cual implica la convergencia débil $\mu_n \rightarrow \mu$. ■

Capítulo 2

Probabilidad no-conmutativa

La probabilidad no-conmutativa se empezó a desarrollar desde los años 80's, por Hudson y Parthasaraty [18], como resultado de la necesidad de asentar las bases matemáticas de la física cuántica. Durante la última década el estudio a través de la probabilidad no-conmutativa del análisis asintótico espectral de gráficas se ha desarrollado considerablemente (ver Hora y Obata [17]).

En este capítulo estudiaremos la teoría de la probabilidad no-conmutativa, la cual nos servirá más adelante para el análisis asintótico espectral de las gráficas que van creciendo.

2.1 Espacio de Probabilidad No-Conmutativo

La teoría de la probabilidad clásica está basada en un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. En probabilidad no-conmutativa se cambia el enfoque y en lugar de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se estudia el par $(L^\infty(\Omega, \mathbf{P}), \mathbf{E})$, donde $\mathbf{E} : L^\infty(\Omega, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{C}$, es la esperanza con la que definimos los espacios L^p (ver Ejemplo 28). Desde este punto de vista es natural considerar cualquier álgebra en lugar de $L^\infty(\Omega, \mathbf{P})$ y cambiar a la esperanza \mathbf{E} por cualquier funcional lineal. Empecemos definiendo lo que es un álgebra.

Definición 25 *Un álgebra \mathcal{A} sobre un campo \mathbf{K} , es un espacio vectorial sobre \mathbf{K} el cual*

tiene definida una operación $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que para cualesquiera $\alpha \in \mathbf{K}$ y $x, y, z \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$(1) \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),$$

$$(2) x(y+z) = xy + xz,$$

$$(3) (x+y)z = xz + yz.$$

Si para todo $x, y \in \mathcal{A}$ se tiene que $xy = yx$, se dice que \mathcal{A} es un álgebra *conmutativa*, sin embargo nuestro principal interés de estudio está en el caso donde \mathcal{A} es un álgebra no-conmutativa. Cuando además, para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$ se cumple que $x(yz) = (xy)z = xyz$ se dice que el álgebra es *asociativa*. En este trabajo se considerarán solo álgebras asociativas.

Definición 26 Sea \mathcal{A} un álgebra. Decimos que \mathcal{A} es una $*$ -álgebra si \mathcal{A} está dotada de una involución antilineal $*$: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, es decir, una operación tal que $(a^*)^* = a$, $(ab)^* = b^*a^*$ y $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$.

Ahora, definimos un espacio de probabilidad no conmutativo. Este objeto dará un marco apropiado para el estudio de la teoría espectral de gráficas.

Definición 27 (Espacio de Probabilidad No-Conmutativo) (1) Un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo es un par (\mathcal{A}, φ) donde \mathcal{A} es un álgebra compleja con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal con $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$, donde $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ es la unidad en \mathcal{A} .

(2) Si \mathcal{A} es una $*$ -álgebra y φ es un **estado**, es decir, cumple que $\varphi(a^*a) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$, entonces el par (\mathcal{A}, φ) es llamado un $*$ -Espacio de Probabilidad No-Conmutativo.

De aquí en adelante se trabajará solo con $*$ -Espacios de Probabilidad No-Conmutativos, omitiendo la notación $*$.

A los elementos de \mathcal{A} se les llama **variables aleatorias no-conmutativas**, o solo variables aleatorias. A una variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ se le llama **real** o **autoadjunta** si se tiene que $a = a^*$.

A continuación presentamos algunos ejemplos de Espacios de Probabilidad No-Commutativos.

Ejemplo 28 (Espacio de probabilidad clásico) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sea

$$L^{\infty-} = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}),$$

el conjunto de todas las variables aleatorias que tienen momentos de todos los ordenes finitos. $L^{\infty-}$ es una $*$ -álgebra conmutativa, donde la función $*$: $L^{\infty-} \longrightarrow L^{\infty-}$ está definida por $(a + ib)^* = a - ib$ para variables aleatorias a y b reales. La esperanza

$$\mathbf{E}[a] = \int_{\Omega} a(\omega) \mathbf{P}(d\omega), \quad a \in L^{\infty-},$$

es un estado sobre $L^{\infty-}$, por lo tanto $(L^{\infty-}, \mathbf{E})$ es un Espacio de Probabilidad No-Commutativo.

Ejemplo 29 (Álgebra de matrices) Sea $M(n, \mathbb{C})$ el conjunto de las matrices complejas de tamaño $n \times n$. Si tomamos en cuenta las operaciones usuales de matrices, $M(n, \mathbb{C})$ es un $*$ -álgebra. Algunos estados de esta álgebra son los siguientes:

(i) (Traza)

$$\varphi_{tr}(a) = \frac{1}{n} Tr(a).$$

(ii) (Estado vector) Sea $\xi \in \mathbb{C}^n$ con $\|\xi\| = 1$. El estado vector se define como

$$\varphi_{\xi}(a) = \langle \xi, a\xi \rangle,$$

donde el producto interno de \mathbb{C}^n se define por

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

(iii) (Matriz de densidad) Sea $\rho \in M(n, \mathbb{C})$, tal que $\rho = \rho^* \geq 0$ y $Tr(\rho) = 1$, entonces

$$\varphi_{\rho}(a) = Tr(\rho a).$$

Observación 30 El estado $\varphi_1(M) = M_{11}$ conocido como estado vacío entra dentro de los incisos (ii) y (iii) del ejemplo anterior. En efecto, por un lado tomando $\xi = (1, 0, \dots, 0)$ se tiene que $\varphi_\xi(M) = \langle \xi, M\xi \rangle = M_{11} = \varphi_1(M)$, mientras que si tomamos

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

se cumple que $\varphi_\rho(M) = \text{Tr}(\rho M) = M_{11} = \varphi_1(M)$.

Observación 31 Existe una correspondencia uno a uno entre las matrices de rango 1 y los estados vector.

Ejemplo 32 (Álgebra de grupos) Sea G un grupo, definimos a $\mathbb{C}G$ como el **álgebra de grupo** (del grupo G). Esto es, $\mathbb{C}G$ es el espacio complejo vectorial cuya base está indexada por los elementos de G , y donde la multiplicación y la $*$ -operación están definidas de la manera natural:

$$\mathbb{C}G := \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in \mathbb{C}, \text{ con un número finito de } \alpha_g \neq 0 \right\},$$

con

$$\left(\sum \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum \beta_h h \right) := \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g,h: gh=k} \alpha_g \beta_h \right) k,$$

y

$$\left(\sum \alpha_g g \right)^* := \sum \bar{\alpha}_g g^{-1}.$$

Sea e el elemento unidad de G . El funcional $\tau_G : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$ que está dado por la fórmula

$$\tau_G \left(\sum \alpha_g g \right) := \alpha_e,$$

se define como la **traza canónica** de $\mathbb{C}G$. El par $(\mathbb{C}G, \tau_G)$ es un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo.

Definimos los **momentos mixtos** de $a \in \mathcal{A}$ como

$$\varphi(a^{\epsilon_1} a^{\epsilon_2} \cdots a^{\epsilon_m}), \quad \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}.$$

Decimos que dos variables aleatorias a, b en los Espacios de Probabilidad No-Commutativos (\mathcal{A}, φ) y (\mathcal{B}, ψ) , respectivamente, se llaman **estocásticamente equivalentes** si todos sus momentos mixtos coinciden. Notemos que en el caso donde se tiene una variable aleatoria real, es suficiente considerar la sucesión de momentos

$$\varphi(a^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

($a^0 = 1_{\mathcal{A}}$ por definición).

Teorema 33 *Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad No-Commutativo. Para una variable aleatoria real $a = a^* \in \mathcal{A}$, existe una medida de probabilidad μ en \mathbb{R} , tal que*

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Demostración. Sea $M_m = \varphi(a^m)$ y consideremos el determinante de Hankel

$$\Delta_m = |H_m|, \quad H_m = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_m \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_m & M_{m+1} & \cdots & M_{2m} \end{bmatrix},$$

entonces, gracias al Teorema 10, basta demostrar que $\Delta_m \geq 0$ para todo $m = 0, 1, \dots$. Sea $m \geq 1$ y consideremos

$$x = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_m a^m, \quad c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C},$$

notemos que $x \in \mathcal{A}$ y

$$0 \leq \varphi(x^* x) = \sum_{i,j=0}^m \bar{c}_i c_j \varphi(a^{i+j}) = \sum_{i,j=0}^m \bar{c}_i c_j M_{i+j},$$

como esto es válido para cualquier elección de $c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, se tiene que la matriz H_m es positiva definida para todo m . ■

La medida de probabilidad μ mencionada en el Teorema 33 se define como la *distribución* de la variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ (con respecto al estado φ), la cual en general no está determinada de manera única, esto depende de si el problema de momentos está (o no) determinado.

2.2 Nociones de Independencia

En probabilidad no-conmutativa, en general se tienen álgebras no conmutativas. Esto permite definir diferentes nociones de independencia. La independencia nos da una forma de calcular los momentos mixtos de variables aleatorias. En esta sección presentaremos 4 tipos de independencia (ver Muraki [25]), los cuales nos servirán, más adelante, para el estudio asintótico espectral de gráficas que van creciendo, cuyas matrices de adyacencia pueden ser descompuestas en suma de variables aleatorias independientes.

Definición 34 (*Independencia tensorial*) Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son variables aleatorias ***independientes en el sentido clásico*** si a y b conmutan y además, se tiene que

$$\varphi(a^n b^m) = \varphi(a^n) \varphi(b^m) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Decimos que a y b son ***independientes en el sentido tensorial*** si se cumple que

$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \dots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(a^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \varphi\left(b^{\sum_{i=1}^k n_i}\right),$$

para todo $m_i, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplo 35 Consideremos el espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi_{tr})$, definido en el Ejemplo 29, donde $\mathcal{A} = M_{n \times n}$ el álgebra de las matrices cuadradas de $n \times n$, y

$$\varphi_{tr}(M) = tr(M) = \frac{Tr}{n}(M),$$

para $M \in \mathcal{A}$. Sean $A \in M_{m \times m}$ y $B \in M_{l \times l}$, tales que $ml = n$, sean I_m e I_l , la matriz identidad de $m \times m$ y $l \times l$, respectivamente. Tenemos que $(A \otimes I_l), (I_m \otimes B) \in \mathcal{A}$ (ver Apéndice A). Sean $m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} & \varphi_{tr}((A \otimes I_l)^{m_1} (I_m \otimes B)^{n_1} \cdots (A \otimes I_l)^{m_k} (I_m \otimes B)^{n_k}) \\ &= \varphi_{tr}((A^{m_1} \otimes I_l^{m_1})(I_m^{n_1} \otimes B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes I_l^{m_k})(I_m^{n_k} \otimes B^{n_k})) \\ &= \varphi_{tr}((A^{m_1} \otimes B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes B^{n_k})) \\ &= \varphi_{tr}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i} \otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) = \frac{Tr}{n}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i} \otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) \\ &= \frac{Tr}{m}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \frac{Tr}{l}\left(B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) \\ &= \frac{Tr}{ml}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i} \otimes I_l\right) \frac{Tr}{lm}\left(I_m \otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) \\ &= \frac{Tr}{n}\left((A \otimes I_l)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \frac{Tr}{n}\left((I_m \otimes B)^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) \\ &= \varphi_{tr}\left((A \otimes I_l)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \varphi_{tr}\left((I_m \otimes B)^{\sum_{i=1}^k n_i}\right), \end{aligned}$$

de donde se concluye que $(A \otimes I_l)$ y $(I_m \otimes B)$ son variables aleatorias tensorialmente independientes con respecto al funcional φ_{tr} .

Definición 36 (Independencia libre) Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad

No-Conmutativo, decimos que dos variables aleatorias $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son **independientes en el sentido libre** (o **libres**) si para cualesquiera polinomios P_i, Q_i $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $\varphi(P_i(a)) = 0 = \varphi(Q_j(b))$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, se cumple que

$$\varphi(P_1(a)Q_1(b) \cdots P_n(a)Q_n(b)) = 0.$$

Ejemplo 37 Sean \mathcal{A}_{G_1} y \mathcal{A}_{G_2} las álgebras de grupo (ver Ejemplo 32) de los grupos libres G_1 y G_2 . Y sea

$$\varphi\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \alpha_e.$$

Sean $a \in \mathcal{A}_{G_1}$ y $b \in \mathcal{A}_{G_2}$, y sean $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$, polinomios en la variable x tales que

$$\varphi(P_i(a)) = 0 = \varphi(Q_j(b)), \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

esto es, que si escribimos

$$P_i(a) = \sum_{g \in G} (p_i)_g g \text{ y } Q_j(b) = \sum_{g \in G} (q_j)_g g,$$

entonces $(p_i)_e = 0 = (q_j)_e$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$. Gracias a lo anterior y al hecho de que los grupos G_1 y G_2 son libres, entonces se cumple que

$$\varphi(P_1(a) Q_1(b) \cdots P_n(a) Q_n(a)) = 0.$$

Definición 38 (Independencia booleana) Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son variables aleatorias **independientes en el sentido booleano** si

$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \prod_{i=1}^k \varphi(a^{m_i}) \varphi(b^{n_i}),$$

para todo $m_i, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplo 39 Sea $\mathcal{A} = M_{n \times n}$ el álgebra de las matrices cuadradas de $n \times n$, entonces (\mathcal{A}, φ_1) es un Espacio de Probabilidad No-Commutativo (ver Observación 30). Sean $A \in M_{m \times m}$ y $B \in M_{l \times l}$, tales que $ml = n$, P_m y P_l son las proyección de rango 1 al espacio generado por $(1, 0, 0, \dots, 0)$, donde el vector es de tamaño m y l , respectivamente. Sean $m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} & \varphi_1((A \otimes P_l)^{m_1} (P_m \otimes B)^{n_1} \cdots (A \otimes P_l)^{m_k} (P_m \otimes B)^{n_k}) \\ &= \varphi_1((A^{m_1} \otimes P_l^{m_1}) (P_m^{n_1} \otimes B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes P_l^{m_k}) (P_m^{n_k} \otimes B^{n_k})) \\ &= \varphi_1((A^{m_1} \otimes P_l) (P_m \otimes B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes P_l) (P_m \otimes B^{n_k})) \\ &= \varphi_1((A^{m_1} P_m \otimes P_l B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes P_l) (P_m \otimes B^{n_k})) \\ & \quad \vdots \\ &= \varphi_1(A^{m_1} P_m \cdots A^{m_k} P_m \otimes P_l B^{n_1} \cdots P_l B^{n_k}). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que si $M, N \in M_{m \times m}$ entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
 MP_m NP_m &= \begin{pmatrix} M_{11}^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21}^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1}^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ N_{21}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{m1}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} M_{11}^{m_1} N_{11}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21}^{m_1} N_{11}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1}^{m_1} N_{11}^{m_2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

por lo que se cumple que

$$A^{m_1} P_m \cdots A^{m_k} P_m = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^k A_{11}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21}^{m_1} \prod_{i=2}^k A_{11}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}^{m_1} \prod_{i=2}^k A_{11}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

de manera similar podemos concluir que

$$P_l B^{n_1} \cdots P_l B^{n_k} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^k B_{11}^{n_i} & B_{11}^{n_1} \prod_{i=2}^k B_{12}^{n_i} & \cdots & B_{11}^{n_1} \prod_{i=2}^k B_{1l}^{n_i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
 & \varphi_1 (A^{m_1} P_m \cdots A^{m_k} P_m \otimes P_l B^{n_1} \cdots P_l B^{n_k}) \\
 = & \varphi_1 \left(\left(\begin{array}{cccc} \prod_{i=1}^k A_{11}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \prod_{i=1}^k A_{21}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=1}^k A_{m1}^{m_i} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} \prod_{i=1}^k B_{11}^{n_i} & \prod_{i=1}^k B_{12}^{n_i} & \cdots & \prod_{i=1}^k B_{1l}^{n_i} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \right) \\
 = & \prod_{i=1}^k A_{11}^{m_i} \prod_{i=1}^k B_{11}^{n_i} \\
 = & \prod_{i=1}^k A_{11}^{m_i} B_{11}^{n_i} = \prod_{i=1}^k \varphi_1 (A^{m_i} \otimes P_l) \varphi_1 (P_m \otimes B^{n_i}),
 \end{aligned}$$

de donde concluimos que $(A^{m_i} \otimes P_l)$, $(P_m \otimes B^{n_i}) \in (\mathcal{A}, \varphi_1)$ son variables aleatorias booleanamente independientes.

Definición 40 (Independencia monótona) Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son variables aleatorias **independientes en el sentido monótono** si

$$\varphi (a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi (a^{\sum_{i=1}^k m_i}) \prod_{i=1}^k \varphi (b^{n_i}),$$

para todo $m_i, n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplo 41 Sea $\mathcal{A} = M_{n \times n}$ el álgebra de las matrices cuadradas de $n \times n$, sea $M \in \mathcal{A}$, entonces (\mathcal{A}, φ_1) es un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo (ver Observación 30). Sean $A \in M_{m \times m}$ y $B \in M_{l \times l}$, tales que $ml = n$. Sean $m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

se cumple que

$$\begin{aligned}
& \varphi_1((A \otimes P_l)^{m_1} (I_m \otimes B)^{n_1} \cdots (A \otimes P_l)^{m_k} (I_m \otimes B)^{n_k}) \\
&= \varphi_1((A^{m_1} \otimes P_l) (I_m \otimes B^{n_1}) \cdots (A^{m_k} \otimes P_l) (I_m \otimes B^{n_k})) \\
&= \varphi_1\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i} \otimes P_l B^{n_1} \cdots P_l B^{n_k}\right) \\
&= \varphi_1\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \varphi_1(P_l B^{n_1} \cdots P_l B^{n_k}) \\
&= \varphi_1\left((A \otimes P_l)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \prod_{i=1}^k \varphi_1((I_m \otimes B)^{n_i}),
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $A \otimes P_l$, $I_m \otimes B \in (\mathcal{A}, \varphi_1)$, son variables aleatorias monótonamente independientes.

A continuación presentamos el concepto de álgebras ortogonales, con respecto a un par de funcionales, el cual nos servirá para construir variables aleatorias ortogonales (ver Lenczewski [3]).

Definición 42 Sea $(\mathcal{A}, \varphi, \psi)$ un álgebra unitaria con un par de funcionales lineales normalizados, y sea \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 dos subálgebras no unitarias de \mathcal{A} . Decimos que \mathcal{A}_2 es **ortogonal** a \mathcal{A}_1 con respecto a (φ, ψ) si:

- (i) $\varphi(bw_2) = \varphi(w_1b) = 0$,
- (ii) $\varphi(w_1a_1ba_2w_2) = \psi(b) (\varphi(w_1a_1a_2w_2) - \varphi(w_1a_1) \varphi(a_2w_2))$,

para cualquier $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1$, $b \in \mathcal{A}_2$ y cualesquiera elementos w_1, w_2 del álgebra unitaria $\text{alg}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ generada por \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Decimos que $a, b \in \mathcal{A}$ son **ortogonales**, o **independientes en el sentido ortogonal**, con respecto a (φ, ψ) si el álgebra generada por a es ortogonal al álgebra generada por b .

2.2.1 Convoluciones y Transformadas

Dadas dos variables aleatorias $a_1, a_2 \in (\mathcal{A}, \varphi)$ con funciones de distribución μ_1 y μ_2 respectivamente, entonces nos interesa conocer la distribución de la variable aleatoria

$$a = a_1 + a_2.$$

Cuando las variables aleatorias a_1 y a_2 cumplen algún tipo de independencia, la variable aleatoria a se llama la convolución de a_1 y a_2 .

El estudio de la suma de variables aleatorias independientes clásicas, está dado por la convolución clásica en teoría de la medida. Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes (en el sentido clásico), con distribución μ y ν respectivamente, entonces la convolución clásica $\mu * \nu$ nos da la distribución de $X_1 + X_2$.

Sean μ y ν las funciones de distribución de dos variables aleatorias a y b respectivamente, entonces definimos $\mu \uplus \nu$ como la *convolución booleana* de μ con ν asociada a la independencia booleana. Se define a $\mu \triangleright \nu$ como la *convolución monótona* de μ con ν asociada a la independencia monótona. Denotamos por $\mu \boxplus \nu$ a la *convolución aditiva libre* asociada a la independencia libre. Por último, definimos a continuación la *convolución ortogonal*.

Definición 43 Sean a y b dos variables aleatorias en el álgebra unitaria \mathcal{A} la cual es ortogonal con respecto al par de funcionales lineales normalizados (φ, ψ) , tales que μ es la φ -distribución de a y ν es la ψ -distribución de b , entonces la **convolución aditiva ortogonal** $\mu \vdash \nu$ se define como la φ -distribución de $a + b$.

Ahora, sea μ una medida de probabilidad con sucesión de momentos $(M_n)_{n \geq 0}$, definimos su *función generadora de momentos* como la serie formal de potencias

$$M_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n.$$

Las correspondientes *transformada de Cauchy*, *transformada K*, *transformada recíproca de Cauchy* y *transformada R*, se definen respectivamente como:

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z} M_\mu \left(\frac{1}{z} \right) \quad (2.2)$$

$$K_\mu(z) = z - \frac{1}{G_\mu(z)} \quad (2.3)$$

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)} \quad (2.4)$$

$$R_\mu(z) = -\frac{1}{z} + G_\mu^{-1}z. \quad (2.5)$$

Directo de las definiciones anteriores y las definiciones de las convoluciones (según cada tipo de independencia) obtenemos las siguientes igualdades.

Proposición 44 *Sean las correspondientes transformada de Cauchy, transformada K, transformada recíproca de Cauchy y transformada R, como se definen arriba, entonces las siguientes igualdades se cumplen:*

$$K_{\mu \uplus \nu}(z) = K_\mu(z) + K_\nu(z) \quad (2.6)$$

$$R_{\mu \boxplus \nu}(z) = R_\mu(z) + R_\nu(z) \quad (2.7)$$

$$F_{\mu \triangleright \nu}(z) = F_\mu(F_\nu(z)) \quad (2.8)$$

$$K_{\mu \dashv \nu}(z) = K_\mu(F_\nu(z)). \quad (2.9)$$

Proposición 45 *Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$F_{\mu \uplus \nu}(z) = F_\mu(z) + F_\nu(z) - z \quad (2.10)$$

$$F_{\mu \dashv \nu}(z) = F_\mu(F_\nu(z)) - F_\nu(z) + z. \quad (2.11)$$

Demostración. De (2.3) y (2.4) se tiene que

$$K_{\mu \uplus \nu}(z) = z - \frac{1}{G_{\mu \uplus \nu}(z)} = z - F_{\mu \uplus \nu}(z),$$

de lo anterior y de (2.6) se sigue que

$$K_{\mu\uplus\nu}(z) = z - F_\mu(z) + z - F_\nu(z),$$

por lo que, gracias a las dos igualdades anteriores se cumple (2.10).

Ahora, para verificar (2.11), tenemos que de (2.9) y (2.6) se sigue que

$$z - F_{\mu\uplus\nu}(z) = K_{\mu\uplus\nu}(z) = F_\nu(z) - F_\mu(F_\nu(z)),$$

de donde se sigue que se cumple (2.11), concluyendo la prueba. ■

2.3 Teoremas del Límite Central

En esta sección se establecen resultados del tipo asintóticos de la convolución de variables aleatorias que son independientes en alguno de los sentidos (tensorial, booleando, monótono o libre). Estos resultados son conocidos como Teoremas del Límite Central, dada su analogía con el Teorema del Límite Central clásico (ver, por ejemplo, Athreya y Lahiri [6], Capítulo 11). Para ver las demostraciones de los teoremas aquí citados, se le recomienda al lector Nica y Speicher [27], Speicher y Wourodi [36] y Muraki [25].

Teorema 46 (del Límite Central Tensorial) *Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias reales en un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo, independientes en el sentido tensorial, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i \right)^m \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde la medida de probabilidad del lado derecho de la igualdad es una distribución normal estándar.

Teorema 47 (del Límite Central libre) Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias reales en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, independientes en el sentido libre, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^m \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^m \sqrt{4 - x^2} dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde la medida de probabilidad del lado derecho de la igualdad es la ley semicircular de Wigner.

Teorema 48 (del Límite Central booleano) Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias reales en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, independientes en el sentido booleano, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^m \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_1) dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde la medida de probabilidad del lado derecho es la distribución de Bernoulli.

Teorema 49 (del Límite Central monótono) Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias reales en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, independientes en el sentido monótono, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^m \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2 - x^2}} dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde la medida de probabilidad del lado derecho es la ley del arco seno normalizada.

2.4 Espacio de Fock

En esta sección definiremos una familia de espacios de Probabilidad No-Commutativos, la cual jugará un papel muy importante en los capítulos siguientes, para el análisis espectral de gráficas.

Definición 50 Una sucesión $\{\omega_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Jacobi si una de las siguientes condiciones se cumple:

- (i) [Tipo infinita] $\omega_n > 0$ para todo n .
- (ii) [Tipo finita] existe un número $m_0 \geq 1$ tal que $\omega_n = 0$ para todo $n \geq m_0$ y $\omega_n > 0$ para todo $n < m_0$.

La sucesión $\{0, 0, 0, \dots\}$ es, por definición, una sucesión de Jacobi. A toda sucesión finita de números positivos le podemos asociar una sucesión de Jacobi, simplemente concatenándole una sucesión infinita de ceros.

Dada una sucesión de Jacobi $\{\omega_n\}$, consideramos un espacio de Hilbert de la siguiente manera: Si $\{\omega_n\}$ es del tipo infinita, sea Γ un espacio de Hilbert de dimensión infinita con base ortonormal $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots\}$. Si $\{\omega_n\}$ es del tipo finita, entonces, sea Γ un espacio de Hilbert de dimensión m_0 con base ortonormal $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{m_0-1}\}$. Al vector Φ_0 le llamamos el *vector vacío*.

Ahora, definimos los operadores lineales B^\pm sobre Γ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B^+ \Phi_n &= \sqrt{\omega_{n+1}} \Phi_{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ B^- \Phi_0 &= 0, & B^- \Phi_n = \sqrt{\omega_n} \Phi_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

donde, por definición, $B^+ \Phi_{m_0-1} = 0$ cuando $\{\omega_n\}$ es del tipo finita. Llamaremos a B^- el *operador aniquilador* y a B^+ el *operador creador*.

Definición 51 Un par de sucesiones $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ se llaman **parámetros de Jacobi** o **coeficientes de Jacobi** si alguna de las dos condiciones siguientes se cumple:

- (i) $\{\omega_n\}$ es una sucesión de Jacobi del tipo infinita y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinita de reales.
- (ii) $\{\omega_n\}$ es una sucesión de Jacobi del tipo finita con longitud m_0 y $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_0+1}\}$ es una sucesión finita de reales con $m_0 + 1$ términos.

Dados unos parámetros de Jacobi $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$, definimos un espacio de Hilbert Γ con base ortonormal $\{\Phi_n\}$, el operador aniquilador B^- y el operador creador B^+ como arriba. Además, definimos el *operador conservador* B° , por

$$B^\circ \Phi_n = \alpha_{n+1} \Phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Definición 52 Con cada parámetros de Jacobi $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ asociamos un **espacio de Fock**

$$(\Gamma, \{\omega_n\}, B^+, B^-, B^\circ),$$

el cual se obtiene como arriba. Cuando $\{\alpha_n = 0\}$ es una sucesión nula, omitimos B° y $\{\alpha_n\}$.

Notemos que

$$(B^+)^* = B^-, \quad (B^-)^* = B^+, \quad (B^\circ)^* = B^\circ.$$

Sea \mathcal{A} el $*$ -álgebra generado por B^+ , B^- , B° , es decir, el conjunto de todos los polinomios (no-conmutativos) en B^+ , B^- , B° . Entonces, la función φ_0 , definida por

$$\varphi_0(a) = \langle \Phi_0, a\Phi_0 \rangle, \quad a \in \mathcal{A},$$

es un estado en \mathcal{A} . A $(\mathcal{A}, \varphi_0) = (\mathcal{A}, \Phi_0)$ lo definimos como un *espacio de probabilidad de Fock con estado vacío*.

2.4.1 Descomposición cuántica

Teorema 53 Sea μ una medida de probabilidad y $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ sus coeficientes de Jacobi. Sea

$$(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-, B^\circ)$$

el espacio de Fock asociado a $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$, entonces se cumple que

$$M_m(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx) = \langle \Phi_0, (B^+ + B^\circ + B^-)^m \Phi_0 \rangle.$$

Demostración. A partir de que

$$\|P_n\| = \sqrt{\omega_n \cdots \omega_1},$$

y de la fórmula de recurrencia (1.6), se obtiene que

$$x \frac{P_n(x)}{\sqrt{\omega_n \cdots \omega_1}} = \sqrt{\omega_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)}{\sqrt{\omega_{n+1} \cdots \omega_1}} + \alpha_{n+1} \frac{P_n(x)}{\sqrt{\omega_n \cdots \omega_1}} + \sqrt{\omega_n} \frac{P_{n-1}(x)}{\sqrt{\omega_{n-1} \cdots \omega_1}}.$$

Si definimos una isometría $U : \Gamma \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$, tal que

$$U\Phi_n = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\omega_n \cdots \omega_1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

entonces se tiene que

$$xU\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1}}U\Phi_{n+1} + \alpha_{n+1}U\Phi_n + \sqrt{\omega_n}U\Phi_{n-1},$$

de donde

$$\begin{aligned} U^*xU\Phi_n &= \sqrt{\omega_{n+1}}\Phi_{n+1} + \alpha_{n+1}\Phi_n + \sqrt{\omega_n}\Phi_{n-1} \\ &= (B^+ + B^\circ + B^-)\Phi_n, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$U^*xU = (B^+ + B^\circ + B^-).$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0, (B^+ + B^\circ + B^-)^m \Phi_0 \rangle &= \langle U\Phi_0, U(B^+ + B^\circ + B^-)^m \Phi_0 \rangle \\ &= \langle U\Phi_0, x^m U\Phi_0 \rangle \\ &= \langle P_0, x^m P_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx) = M_m(\mu), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

Corolario 54 Sea X una variable aleatoria clásica con distribución μ . Sea

$(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-, B^\circ)$ el espacio de Fock asociado a los parámetros de Jacobi $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ de μ , entonces

$$\mathbf{E}[X^m] = \langle \Phi_0, (B^+ + B^\circ + B^-)^m \Phi_0 \rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo anterior podemos decir que una variable aleatoria clásica es estocásticamente equivalente a $B^+ + B^\circ + B^-$. También se dice que $B^+ + B^\circ + B^-$ es una *realización algebraica* de X . En este sentido, se escribe

$$X \stackrel{s}{=} B^+ + B^\circ + B^-,$$

y el lado derecho de la ecuación se dice que es una *descomposición cuántica* de X .

2.5 Fórmula de Accardi-Bozejko

En esta sección, estamos interesados en exponer una fórmula que nos relacione los momentos de una variable aleatoria con sus coeficientes de Jacobi. Dicha fórmula fue primero introducida por Accardi y Bozejko [1].

Para poder establecer una fórmula que nos de una relación entre los momentos y los coeficientes de Jacobi de una variable aleatoria, es indispensable introducir algunos conceptos, así como algunas proposiciones relacionadas con estos.

Sean $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$, coeficientes de Jacobi y sea $(\Gamma, \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ el espacio de Fock asociado a $\{\omega_n\}$ y B° el operador conservador definido por

$$B^\circ = \alpha_{N+1}.$$

|||Lo que nos interesa es la sucesión de momentos de la variable aleatoria $B^+ + B^\circ + B^-$ en el Espacio de Probabilidad No-Conmutativo $(L(\Gamma), \Phi_0)$:

$$M_m = \langle \Phi_0, (B^+ + B^\circ + B^-)^m \Phi_0 \rangle, \quad m = 1, 2, \dots$$

Podemos expandir el lado derecho de la igualdad anterior. Aprovechando la linealidad del funcional, obtenemos que

$$M_m = \sum_{\epsilon} \langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle,$$

donde $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$, donde $\epsilon_j \in \{+, -, \circ\}$, para todo $j = 1, 2, \dots, m$.

Para analizar el efecto que tiene $B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1}$ sobre el vector vacío Φ_0 , asociaremos una sucesión de puntos en \mathbb{Z}^2 que empiezan en $(0, 0)$, de la siguiente manera. Dado $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \in \{+, -, \circ\}^m$, la sucesión de puntos en \mathbb{Z}^2 que le asociamos es la siguiente:

$$(0, 0), (1, \epsilon_1), (2, \epsilon_1 + \epsilon_2), \dots, (m, \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_m),$$

donde los números $+1, -1, 0$ se asignan a ϵ_i según sea $\epsilon = +, -, \circ$.

Vamos a definir el conjunto \mathcal{E}_m^+ , como el conjunto de las sucesiones que empiezan en $(0, 0)$ y terminan en $(m, 0)$, estando solamente en el plano superior, es decir

$$\mathcal{E}_m^+ = \left\{ \begin{array}{l} (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \in \{+, -, \circ\}^m : \\ \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \\ \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{m-1} + \epsilon_m = 0. \end{array} \right\}.$$

Notemos que si $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \in \{+, -, \circ\}^m \setminus \mathcal{E}_m^+$ entonces se tiene que

$$\langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle = 0.$$

Para verificar la igualdad anterior, notemos que tenemos dos casos: el primero, el caso donde $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{m-1} + \epsilon_m \neq 0$, entonces se tendría que

$$\langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, c_n \Phi_n \rangle = 0$$

donde $c_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, lo cual se sigue del hecho de que Φ_0 y Φ_n son ortogonales. El segundo caso, se tiene cuando, para algún $k < m$, $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k < 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{k-1} = 0$ y $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k = -1$ entonces se tendría que

$$\langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_{k-1}} c_{k-1} \Phi_{-1} \rangle = 0,$$

ya que por definición $c_{k-1} \Phi_{-1} = 0$.

Por lo tanto, de lo anterior se sigue que

$$M_m = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_m^+} \langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle. \quad (2.12)$$

Definición 55 Sea S un conjunto finito. Una colección \mathfrak{I} de subconjuntos no vacíos de S se llama **partición** de S si

$$S = \bigcup_{v \in \mathfrak{I}} v, \quad v \cap v' = \emptyset, \quad v \neq v'.$$

Una partición se llama: (i) una **partición por pares** si $|v| = 2$ para todo $v \in \mathfrak{I}$; (ii) una **partición por pares con singuletes** si $|v| = 2$ o $|v| = 1$ para todo $v \in \mathfrak{I}$. Un elemento $v \in \mathfrak{I}$ se llama **singulete** si $|v| = 1$.

A continuación asociaremos una partición $\mathfrak{I}(\epsilon)$ de $\{1, 2, \dots, m\}$ a cada $\epsilon \in \mathcal{E}_m^+$. En general, podemos considerar a $\epsilon \in \{+, -, \circ\}^m$, como una función $\epsilon : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{+, -, \circ\}$, y entonces obtener una partición

$$\{1, 2, \dots, m\} = \epsilon^{-1}(\circ) \cup \epsilon^{-1}(+) \cup \epsilon^{-1}(-).$$

Sea $\epsilon \in \mathcal{E}_m^+$, dado que $|\epsilon^{-1}(+)| = |\epsilon^{-1}(-)|$, podemos escribir

$$\epsilon^{-1}(\circ) = \{s_1 < \dots < s_j\}, \quad \epsilon^{-1}(\{+, -\}) = \{t_1 < \dots < t_{2k}\},$$

donde $j + 2k = m$, y dividimos a $\{t_1 < \dots < t_{2k}\}$ en una unión de pares como sigue. Primero sea $1 \leq \alpha \leq 2k$ tal que

$$\epsilon(t_1) = \dots = \epsilon(t_\alpha) = +, \quad \epsilon(t_{\alpha+1}) = -,$$

el cual existe siempre que $\epsilon^{-1}(\{+, -\}) \neq \emptyset$. Entonces, tomamos el par $\{t_\alpha < t_{\alpha+1}\}$, y escribimos

$$\{t'_1 < \dots < t'_{2k-2}\} = \{t_1 < \dots < t_{2k}\} \setminus \{t_\alpha < t_{\alpha+1}\},$$

similarmente, aplicando este argumento repetidas veces, obtenemos la partición por pares

$$\{t_1 < \dots < t_{2k}\} = \{l_1 < r_1\} \cup \dots \cup \{l_k < r_k\},$$

donde $\epsilon(l_1) = \dots = \epsilon(l_k) = +$ y $\epsilon(r_1) = \dots = \epsilon(r_k) = -$. Finalmente, escribimos a $\mathfrak{I}(\epsilon)$ como

$$\mathfrak{I}(\epsilon) = \{\{s_1\}, \dots, \{s_j\}, \{l_1 < r_1\}, \dots, \{l_k < r_k\}\}, \quad (2.13)$$

la cual es una partición por pares con singuletes.

Definición 56 Sea \mathfrak{J} una partición por pares con singuletes de $\{1, 2, \dots, m\}$, la cual sin pérdida de generalidad la podemos escribir como

$$\mathfrak{J} = \{\{s_1\}, \dots, \{s_j\}, \{l_1, r_1\}, \dots, \{l_k, r_k\}\},$$

donde

$$s_1 < \dots < s_j, \quad l_1 < \dots < l_k, \quad l_1 < r_1, \dots, \quad l_k < r_k.$$

Decimos que \mathfrak{J} es una **partición que no se cruza** si para cualquier $1 \leq \alpha, \beta \leq k$, se cumple que

$$[l_\alpha, r_\alpha] \subset [l_\beta, r_\beta] \quad \text{o} \quad [l_\beta, r_\beta] \subset [l_\alpha, r_\alpha] \quad \text{o} \quad [l_\alpha, r_\alpha] \cap [l_\beta, r_\beta] = \emptyset,$$

donde $[l, r] = \{u : l \leq u \leq r\}$. $\mathcal{P}_{NCP}(m)$ y $\mathcal{P}_{NCPS}(m)$ son el conjunto de las particiones por pares que no se cruzan de $\{1, 2, \dots, m\}$ y el conjunto de particiones por pares con singuletes que no se cruzan de $\{1, 2, \dots, m\}$, respectivamente.

Lema 57 Sea $\epsilon \in \mathcal{E}_m^+$ y $\mathfrak{J}(\epsilon)$ la partición a pares con singuletes de $\{1, 2, \dots, m\}$ definida en (2.13), entonces $\mathfrak{J}(\epsilon) \in \mathcal{P}_{NCPS}(m)$. Además, el mapeo $\epsilon \mapsto \mathfrak{J}(\epsilon)$ es una biyección de \mathcal{E}_m^+ a $\mathcal{P}_{NCPS}(m)$.

Para ver una demostración del lema anterior, se le sugiere al lector ver [17].

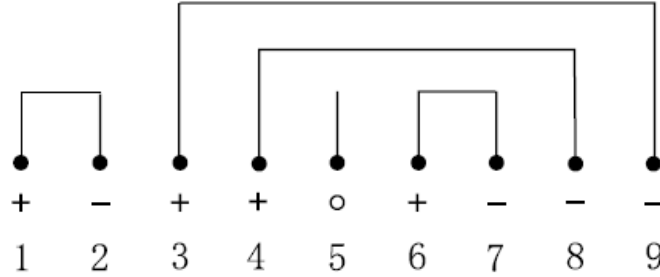
Definición 58 Sea $\mathfrak{J} \in \mathcal{P}_{NCPS}(m)$. La **profundidad** de $v \in \mathfrak{J}$ se define como

$$d_{\mathfrak{J}}(v) = \begin{cases} |\{\{a < b\} \in \mathfrak{J} : a < s < b\}| + 1, & \text{si } v = \{s\} \\ |\{\{a < b\} \in \mathfrak{J} : a < l < r < b\}| + 1, & \text{si } v = \{l < r\} \end{cases}.$$

Por ejemplo, si tenemos la partición

$$\mathfrak{J} = \{\{5\}, \{1, 2\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{6, 7\}\},$$

la cual puede ser vista geoméricamente como



Entonces se tiene que

$$d_{\mathfrak{J}}(\{1, 2\}) = 1, \quad d_{\mathfrak{J}}(\{4, 8\}) = 2, \quad d_{\mathfrak{J}}(\{5\}) = 3.$$

Directo de la definición de profundidad, y la forma en que construimos la partición $\mathfrak{J}(\epsilon)$, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 59 *Sea $\mathfrak{J}(\epsilon) \in \mathcal{P}_{NCPS}(m)$ la partición correspondiente a $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \in \mathcal{E}_m^+$, entonces para $v \in \mathfrak{J}(\epsilon)$, se cumple que*

$$d_{\mathfrak{J}(\epsilon)}(v) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{s-1} \epsilon_i + 1, & \text{si } v = \{s\}, \\ \sum_{i=1}^{l-1} \epsilon_i + 1 = \sum_{i=1}^{r-1} \epsilon_i, & \text{si } v = \{l < r\}. \end{cases}$$

Proposición 60 *Sea $(\Gamma_{\{\omega_n\}}, B^+, B^-)$ un espacio de Fock y $B^\circ = \alpha_{N+1}$ el operador conservador, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión real, entonces*

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Phi_0 \rangle \\ = & \sum_{\mathfrak{J} \in \mathcal{P}_{NCPS}(m)} \prod_{\substack{v \in \mathfrak{J} \\ |v|=1}} \alpha(d_{\mathfrak{J}}(v)) \prod_{\substack{v \in \mathfrak{J} \\ |v|=2}} \omega(d_{\mathfrak{J}}(v)), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{cases} \langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^{2m-1} \Phi_0 \rangle = 0, \\ \langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^{2m} \Phi_0 \rangle = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathcal{P}_{NCPS}(2m)} \prod_{v \in \mathfrak{J}} \omega(d_{\mathfrak{J}}(v)). \end{cases}$$

Demostración. Gracias a la ecuación (2.12) se tiene que

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Phi_0 \rangle = \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_m^+} \langle \Phi_0, B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_2} B^{\epsilon_1} \Phi_0 \rangle.$$

Sea $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\epsilon) \in \mathcal{P}_{NCPS}(m)$ la partición correspondiente a $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m) \in \mathcal{E}_m^+$, es decir

$$\mathfrak{J}(\epsilon) = \{\{s_1\}, \dots, \{s_j\}, \{l_1, r_1\}, \dots, \{l_k, r_k\}\}.$$

En primer lugar, consideremos un singulete $s = s_i$. Dado que $B^{\epsilon_{s-1}} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_0 \in \mathbb{C} \oplus_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{s-1}}$ y $B^{\epsilon_s} = B^\circ$, gracias al Lema 59 se obtiene que

$$\begin{aligned} B^{\epsilon_s} B^{\epsilon_{s-1}} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_0 &= \alpha(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{s-1} + 1) B^{\epsilon_{s-1}} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_0 \\ &= \alpha(d_{\mathfrak{J}}(\{s\})) B^{\epsilon_{s-1}} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_0. \end{aligned}$$

Si aplicamos un argumento similar al aplicado arriba, entonces se tiene que

$$B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_0 = \left\{ \prod_{i=1}^j \alpha(d_{\mathfrak{J}}(\{s_i\})) \right\} [[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0,$$

donde $[[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}]]$ se obtiene de $B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}$ omitiendo los términos de la forma B° . Del argumento anterior, se sigue que $[[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}]]$ es el producto de k operadores creación B^+ y k operadores aniquilador B^- , los cuales forman una partición que no se cruza. Entonces, existe $\{l, r\} = \{l_i, r_i\}$, tal que, B^{ϵ_r} y B^{ϵ_l} son consecutivos. De lo anterior obtenemos que

$$[[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_r} B^{\epsilon_l} \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0 = [[B^{\epsilon_m} \dots B^- B^+ \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0.$$

Dado que la acción de B° no afecta en el nivel del número de vector, en la expresión $[[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0 \in \mathbb{C} \oplus_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{s-1}}$, entonces, de nueva cuenta gracias al Lema 59, $B^- B^+$ es un escalar $\omega(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{l-1} + 1) = \omega(d_{\mathfrak{J}}(\{l, r\}))$, por lo tanto tenemos que

$$[[B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0 = \omega(d_{\mathfrak{J}}(\{l, r\})) [[B^{\epsilon_m} \dots \check{B}^{\epsilon_r} \check{B}^{\epsilon_l} \dots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0,$$

donde $\check{B}^{\epsilon_r} \check{B}^{\epsilon_l}$ significa que $B^{\epsilon_r} B^{\epsilon_l}$ se omiten. Repitiendo el argumento se obtiene que

$$[[B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_1}]] \Phi_0 = \left\{ \prod_{i=1}^k \omega(d_{\mathcal{J}}(l_i, r_i)) \right\} \Phi_0,$$

de donde se sigue el resultado deseado. ■

Ahora estamos en condiciones de poder demostrar la Fórmula de Accardi-Bozejko.

Teorema 61 (Fórmula de Accardi-Bozejko) *Sea μ una medida de probabilidad, con sucesión de momentos $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y coeficientes de Jacobi (ω_n, α_n) , entonces se cumple que*

$$a_m = \sum_{\sigma \in NC_{1,2}(m)} \prod_{\substack{V \in \sigma \\ |V|=1}} \alpha_{d(V,\sigma)} \prod_{\substack{V \in \sigma \\ |V|=2}} \omega_{d(V,\sigma)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Demostración. Del Teorema 53 tenemos que

$$a_n = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^n \Phi_0 \rangle, \quad m = 1, 2, \dots$$

El resultado se sigue de la Proposición 60, y del hecho de que si μ es simétrica, entonces tenemos que $\alpha_n = 0$ para todo n (ver Proposición 15). ■

Observemos que los primeros cuatro momentos de una medida de probabilidad en términos de sus coeficientes de Jacobi son:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_1^2 + \omega_1 \\ a_3 &= \alpha_1^3 + 2\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_1 \\ a_4 &= \alpha_1^4 + 3\alpha_1^2\omega_1 + 2\alpha_2\alpha_1\omega_1 + \alpha_2^2\omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.6 Convergencia de potencias tensoriales de variables aleatorias

Sea (\mathcal{A}, φ) un Espacio de Probabilidad No-Commutativo, para $N \geq 1$ consideremos la N -ésima potencia tensorial $(\mathcal{A}^{\otimes N}, \varphi^{\otimes N})$. Para una variable aleatoria real $b = b^* \in \mathcal{A}$, definimos

$b(i) \in \mathcal{A}^{\otimes N}$ como

$$b(i) = 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes b \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

donde b está en la i -ésima posición. Definimos a \mathcal{B}_N como la $*$ -álgebra generada por $b(1), b(2), \dots, b(N)$. Notemos que \mathcal{B}_N es una $*$ -álgebra conmutativa.

Sean $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que $i_j \neq i_k$ para $j \neq k$, entonces definimos a $b(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{B}_N$ como

$$\begin{aligned} b(i_1, \dots, i_n) &= b(i_1) \cdots b(i_n) \\ &= 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes b \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes b \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

donde b aparece en las i_j -ésimas posiciones, $j = 1, 2, \dots, n$. Además, para $1 \leq n \leq N$ escribimos

$$\begin{aligned} b^{(N,n)} &= \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq N} b(i_1, \dots, i_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \neq}} b(i_1, \dots, i_n), \end{aligned}$$

donde, por definición para $n = 0$, se tiene que

$$b^{(N,0)} = 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}}.$$

La independencia tensorial (y dada la conmutatividad, también la clásica), se puede verificar de manera análoga a lo hecho en el Ejemplo 35. Nos interesa hacer un análisis asintótico de la distribución de $b^{(N,n)}$ cuando $N \rightarrow \infty$. Para esto, recordemos los siguientes teoremas.

Teorema 62 (Ley de grandes números clásica) *Sea $b = b^* \in (\mathcal{A}, \varphi)$ una variable aleatoria real en un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo tal que $\varphi(b) = 0$ y $\varphi(b^2) = 1$, entonces*

$$\frac{b^{(N,1)}}{N} \xrightarrow{m} \varphi(b),$$

cuando $N \rightarrow \infty$, donde la convergencia es en momentos.

Teorema 63 (Teorema del Límite Central clásico) Sea $b = b^* \in (\mathcal{A}, \varphi)$ una variable aleatoria real en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo tal que $\varphi(b) = 0$ y $\varphi(b^2) = 1$, entonces se cumple que

$$\frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}} \xrightarrow{m} Z,$$

cuando $N \rightarrow \infty$, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0, 1)$.

Además, tenemos que el Teorema 63 se puede generalizar, para lo cual vamos a necesitar el siguiente Lema.

Lema 64 Sea $b = b^* \in (\mathcal{A}, \varphi)$ una variable aleatoria real en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo tal que $\varphi(b) = 0$ y $\varphi(b^2) = 1$, definimos $F^{(N,n)}(y) \in \mathcal{A}^{\otimes N}$ como

$$F^{(N,n)}(y) = \sum 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes y \otimes 1_{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes b \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}},$$

donde b aparece $n - 1$ veces y y solo una, además, la suma se toma sobre todos los arreglos posibles bajo dichas condiciones, entonces para $n = 1, 2, \dots$, se cumple que

$$\frac{F^{(N,n)}(b^2 - 1)}{N^{(n+1)/2}} \xrightarrow{m} 0.$$

Teorema 65 Sea $b = b^* \in (\mathcal{A}, \varphi)$ una variable aleatoria real en un Espacio de Probabilidad No-Commutativo tal que $\varphi(b) = 0$ y $\varphi(b^2) = 1$, entonces se cumple que

$$\frac{b^{(N,n)}}{N^{n/2}} \xrightarrow{m} \frac{1}{n!} \tilde{H}_n(Z) \quad n = 1, 2, \dots,$$

cuando $N \rightarrow \infty$, donde \tilde{H}_n es el n -ésimo polinomio mónico de Hermite (ver (1.13)) y Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0, 1)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} b^{(N,1)} b^{(N,1)} &= \left(\sum_{1 \leq i \leq N} b(i) \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq N} b(i) \right) = \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ \neq}} b(i_1, i_2) + \sum_{1 \leq i \leq N} b^2(i) \\ &= 2b^{(N,2)} + \sum_{1 \leq i \leq N} b^2(i) = 2b^{(N,2)} + N + \sum_{1 \leq i \leq N} (b^2 - 1)(i), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{2b^{(N,2)}}{N} &= \frac{b^{(n,1)}}{\sqrt{n}} \frac{b^{(n,1)}}{\sqrt{n}} - 1 - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (b^2 - 1)(i) \\ &= \left(\frac{b^{(n,1)}}{\sqrt{n}} \right)^2 - 1 - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (b^2 - 1)(i), \end{aligned}$$

pero del Teorema 63 se sigue que

$$\left(\frac{b^{(n,1)}}{\sqrt{n}} \right)^2 \xrightarrow{m} Z^2,$$

y del Teorema 62 se tiene que

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (b^2 - 1)(i) \xrightarrow{m} 0,$$

ya que $\varphi(b^2) = 1$, por lo tanto,

$$\frac{2b^{(N,2)}}{N} \xrightarrow{m} Z^2 - 1 = \tilde{H}_2(Z),$$

lo que demuestra el Teorema para $n = 2$.

Procedemos a demostrar el Teorema en general. Haciendo cálculos iterados, análogos a los hechos en el caso $n = 2$, obtenemos que para $1 \leq n \leq N$ se cumple que

$$b^{(N,1)}b^{(N,n)} = (n+1)b^{(N,n+1)} + (N-n+1)b^{(N,n-1)} + F^{(N,n)}(b^2 - 1),$$

si multiplicamos la ecuación anterior por el coeficiente $n!/N^{(n+1)/2}$ y despejamos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!b^{(N,n+1)}}{N^{(n+1)/2}} &= \frac{b^{(N,1)}n!b^{(N,n)}}{N^{1/2}N^{n/2}} - \frac{n(n-1)!b^{(N,n-1)}}{N^{(n-1)/2}} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-1)!b^{(N,n-1)}}{NN^{(n-1)/2}} - \frac{n!F^{(N,n)}(b^2 - 1)}{N^{(n+1)/2}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Lo que necesitamos demostrar es la existencia de un polinomio $p_n(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ que no depende de N , tal que

$$Y_{nN} \equiv \frac{n!b^{(N,n)}}{N^{n/2}} - p_n \left(\frac{b^{(N,1)}}{N^{1/2}}, \frac{F^{(N,1)}(b^2 - 1)}{N}, \dots, \frac{F^{(N,n-1)}(b^2 - 1)}{N^{n/2}} \right),$$

es una variable aleatoria en \mathcal{B}_N y $Y_{nN} \xrightarrow{m} 0$. La afirmación es válida para $n = 1$ con

$$p_1(x) = x, \quad Y_{1N} = 0,$$

y para $n = 2$, ya vimos que

$$p_2(x, y_1) = x^2 - 1 - y_1, \quad Y_{2N} = 0.$$

Entonces, procedemos a realizar la prueba por inducción. Supongamos que la afirmación se cumple para $n \geq 2$, entonces la ecuación (2.15) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!b^{(N,n+1)}}{N^{(n+1)/2}} &= \frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}} (p_n + Y_{nN}) - n(p_n + Y_{n-1,N}) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{N} (p_{n-1} + Y_{n-1,N}) - \frac{n!F^{(N,n)}(b^2-1)}{N^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}} p_n - np_{n-1} - n! \frac{F^{(N,n)}(b^2-1)}{N^{(n+1)/2}} \\ &\quad + \frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}} Y_{nN} - \left\{ n - \frac{n(n-1)}{N} \right\} Y_{n-1,N} + \frac{n(n-1)}{N} p_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si definimos a

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n) &= xp_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &\quad - np_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-2}) - n!y_n, \end{aligned} \quad (2.17)$$

entonces se cumple que

$$\begin{aligned} Y_{n+1,N} &= \frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}} Y_{nN} - \left\{ n - \frac{n(n-1)}{N} \right\} Y_{n-1,N} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{N} p_{n-1} \left(\frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}}, \frac{F^{(N,1)}(b^2-1)}{N}, \dots, \frac{F^{(N,n-2)}(b^2-1)}{N^{(n-1)/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Combinando las ecuaciones (2.16), (2.17) y (2.18), se obtiene que

$$\frac{(n+1)!b^{(N,n+1)}}{N^{(n+1)/2}} = p_{n+1} \left(\frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}}, \frac{F^{(N,1)}(b^2-1)}{N}, \dots, \frac{F^{(N,n)}(b^2-1)}{N^{(n+1)/2}} \right) + Y_{n+1,N}.$$

De la combinación del Lema 64 y el Teorema 63 se cumple que

$$p_{n-1} \left(\frac{b^{(N,1)}}{\sqrt{N}}, \frac{F^{(N,1)}(b^2-1)}{N}, \dots, \frac{F^{(N,n-2)}(b^2-1)}{N^{(n-1)/2}} \right) \xrightarrow{m} p_{n-1}(Z, 0, \dots, 0),$$

lo cual junto con la hipótesis de inducción implica que

$$\frac{b^{(N,n)}}{N^{n/2}} \xrightarrow{m} p_n(Z, 0, \dots, 0) \quad n = 1, 2, \dots$$

También se tiene que

$$p_1(x) = x \quad p_2(x, 0) = x^2 - 1,$$

y de la ecuación 2.18 se obtiene que

$$p_{n+1}(x, 0, \dots, 0) = xp_n(x, 0, \dots, 0) - np_{n-1}(x, 0, \dots, 0),$$

lo cual cumple la misma recurrencia que cumplen los polinomios mónicos de Hermite, de donde

$$p_n(x, 0, \dots, 0) = \tilde{H}_n(x),$$

por lo tanto

$$\frac{b^{(N,n)}}{N^{n/2}} \xrightarrow{m} \frac{1}{n!} \tilde{H}_n(Z) \quad n = 1, 2, \dots,$$

lo cual concluye la prueba. ■

Capítulo 3

Gráficas

En este capítulo se presenta la teoría de gráficas. El estudio de la teoría de gráficas tiene su origen en el siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, el cual resolvió Leonard Euler [13] en 1736.

Actualmente la teoría de gráficas tiene aplicación en diversas ramas de la ciencia, principalmente en el análisis de redes complejas, tales como: redes neuronales, redes sociales, telecomunicaciones, etcétera. Además, esta teoría ha tenido aplicaciones en la química, mediante el estudio de las estructuras de moléculas muy grandes.

De especial interés es el estudio del espectro de una gráfica. A través del espectro de una gráfica podemos obtener información acerca del número de caminatas que hay entre un vértice y otro, también se obtiene información acerca de la conectividad de la gráfica, de la coloración, de las subestructuras de la gráfica, etcétera. Es por esto que en este capítulo se encuentra una sección dedicada al estudio del espectro de una gráfica.

3.1 Conceptos básicos

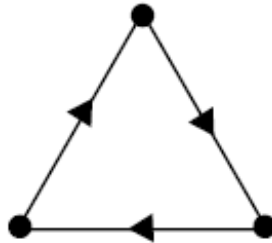
Empezamos con la definición básica de la teoría, esto es, una gráfica.

Definición 66 Sea V un conjunto no vacío y sea E un subconjunto de $V \times V$. El par $G = (V, E)$ se llama **gráfica** con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E . Decimos que dos vértices $v_i, v_j \in V$ son *adyacentes* si $(v_i, v_j) \in E$ y escribimos $v_i \sim v_j$.

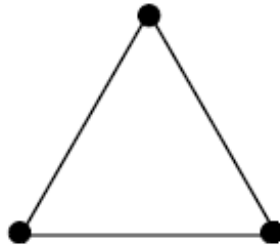
Llamamos **lazo** a una arista de la forma (v_i, v_i) y decimos que una gráfica es **simple** cuando no tiene lazos. Una gráfica se dice **no dirigida** si $(v_i, v_j) \in E$ siempre que $(v_j, v_i) \in E$.

A toda gráfica podemos asociarle una representación geométrica. Esto consiste en asociar puntos en \mathbb{R}^2 a los vértices y líneas (o arcos) que unan esos puntos a las aristas. Es decir, ponemos una línea entre el punto asociado a v_i y el punto asociado a v_j si el par de aristas (v_i, v_j) y (v_j, v_i) están en E , y una flecha del punto asociado a v_i al punto asociado a v_j si la arista (v_i, v_j) está en E pero (v_j, v_i) no.

Ejemplo 67 Una representación geométrica de $G_1 = (V_1, E_1)$, donde $V_1 = \{1, 2, 3\}$ y $E_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ sería:



Ejemplo 68 Una representación geométrica de $G_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_2 = \{1, 2, 3\}$ y $E_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$ sería:



Definición 69 Para un vértice $v \in V$ de G , el grado de v se define como $\deg(v) := \deg_G(v) = |\{w \in V : w \sim v\}|$.

Una gráfica es **finita** si $|V| < \infty$ y **localmente finita** si para todo $v \in V$, se tiene que $\deg(v) < \infty$. En lo siguiente de este trabajo consideraremos solamente gráficas finitas (o localmente finitas), simples y no dirigidas.

Algunos tipos de gráficas importantes son los siguientes.

Definición 70 Un **camino** es una gráfica $P = (V, E)$ de la forma $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$.

Definición 71 Una **caminata** es una generalización de camino, donde se puede repetir aristas.

Los vértices v_1 y v_k se dicen **enlazados** por P y son llamados los finales del camino y a los vértices v_2, \dots, v_{k-1} se les llama los vértices interiores de P . La longitud de un camino es el número de sus aristas. P_k denota el camino de longitud k . En el caso $k = 0$, $P_k = P_0 = v_1 = \bullet$.

Definición 72 Una gráfica G es **completa** si $\deg(v) = |V| - 1$ para todo $v \in V$, y se denota como K_n donde $n = |V|$.

Definición 73 Un **ciclo** $C = (V, E)$ es una gráfica de la forma $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ y $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, v_0)\}$.

Existen gráficas que pueden tener representaciones geométricas distintas, pero que para fines de estudio de las mismas podrían no ser tan diferentes. Para poder hacer una distinción entre gráficas definimos lo que es un isomorfismo de gráficas.

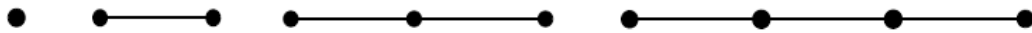
Definición 74 Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Decimos que G y G' son **isomorfas**, y escribimos $G \simeq G'$, si existe una biyección $\varphi : V \rightarrow V'$, tal que $xy \in E$, si y solo si, $\varphi(x)\varphi(y) \in E'$.

3.1.1 Ejemplos de gráficas.

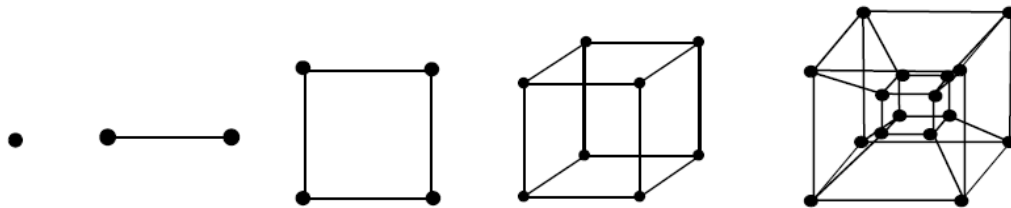
Las representaciones geométricas de algunas gráficas importantes son las siguientes.

Ejemplos

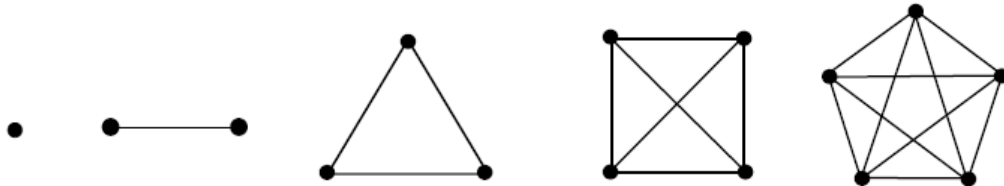
- El camino de tamaño n , P_n . $V = \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $E = \{(i, j) : |i - j| = 1\}$.



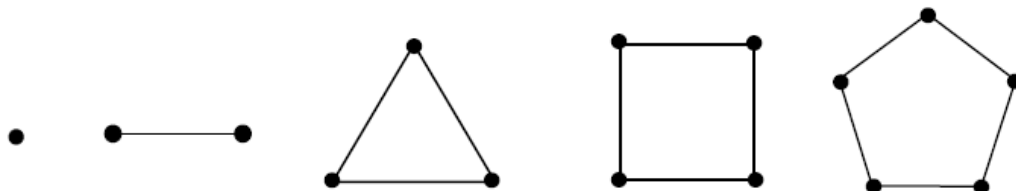
- El cubo de dimensión n , Q_n . $V = \{\{0, 1\}^n\}$, $E = \{(v_i, v_j) \in V : \|v_i - v_j\| = 1\}$, donde para $v \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ denota la norma usual.



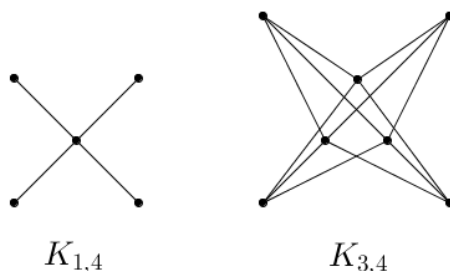
- La gráfica completa, K_n . $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(i, j) : i \neq j\}$.



- El ciclo de tamaño n , C_n . $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $E = \{(i, j) : |i - j| = 1 \text{ mod } n\}$.



- La gráfica bipartita $K_{n,m} = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m\}$ y $E = \{(v, w) \in V \times V : v \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ y } w \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \text{ o } v \in \{n+1, n+2, \dots, n+m\} \text{ y } w \in \{1, 2, \dots, n\}\}$



3.2 Teoría espectral de gráficas

3.2.1 Matrices asociadas a una gráfica

En esta sección, se introducen algunas matrices asociadas a una gráfica, las cuales nos sirven para definir el espectro de la gráfica.

Definición 75 Sea G una gráfica sin aristas múltiples. La **matriz de adyacencia** de G es la matriz A , indexada por el conjunto de vértices $V(G)$, donde $A_{xy} = 1$ si $xy \in E(G)$ y $A_{xy} = 0$ en otro caso.

Definición 76 Sea G una gráfica simple. La **matriz de incidencia** de G es la matriz M de 0's y 1's, con los renglones indexados por el conjunto de vértices y columnas indexadas por el conjunto de aristas, donde $M_{xe} = 1$ si el vértice x es un extremo de la arista e .

Definición 77 Sea G una gráfica dirigida sin lazos. La **matriz de incidencia dirigida** de G es la matriz N , con renglones indexados por $V(G)$ y columnas por $E(G)$, donde $N_{xe} = -1, 1, 0$, cuando x es extremo final de e , extremo de inicio de e , o no está en e , respectivamente.

Definición 78 Sea G una gráfica simple. La **matriz de Laplace** de G es la matriz L indexada por $V(G)$, con suma de renglones igual a cero, donde $L_{xy} = -A_{xy}$ para $x \neq y$, donde A es la matriz de adyacencia de G . Si D es la matriz diagonal, indexada por $V(G)$, tal que D_{xx} es el grado de x , entonces $L = D - A$. A la matriz $Q = D + A$ se le llama **matriz de Laplace sin signo** de G .

Una propiedad importante de la matriz de Laplace L y la matriz de Laplace sin signo Q es que son positivas semidefinidas. Además, se tiene que $Q = MM^T$ y $L = NN^T$, donde M es la matriz de incidencia de G y N es la matriz de incidencia dirigida de la gráfica dirigida que se obtiene al orientar las aristas de G de manera arbitraria.

3.2.2 El espectro de una gráfica

El espectro de una gráfica finita G es por definición el espectro de su matriz de adyacencia, es decir, es el conjunto de eigenvalores junto con su multiplicidad. El espectro de Laplace de una gráfica simple es el espectro de la matriz de Laplace L .

Definición 79 El **polinomio característico** de G , es el de A , o sea, es el polinomio p_A definido por

$$p_A(\theta) = \det(\theta I - A).$$

Ejemplo 80 Sea $G = P_3$, entonces la matriz de adyacencia sería

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$p_A(\theta) = \theta^3 - 2\theta.$$

El espectro es $\sqrt{2}$, 0 , $-\sqrt{2}$. Los **eigenvectores** son

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Para un *eigenvector* u , escribimos u_x , como la etiqueta del vértice x . Tenemos que $Au = \theta u$ si y solo si $\sum_{x \rightarrow y} u_y = \theta u_x \forall x$. La matriz de Laplace L , está dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

dependiendo de la forma en que se indexa el conjunto de vértices. El espectro es 0, 1 y 3. Los *eigenectores* de Laplace son

$$\begin{array}{ccc} \overset{1}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} \\ \hline & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \overset{1}{\bullet} & \overset{0}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} \\ \hline & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \overset{1}{\bullet} & \overset{-2}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} \\ \hline & & \end{array}$$

Se tiene que $Lu = \theta u$ si y solo si $\sum_{x \rightarrow y} u_y = (d_x - \theta) u_x \forall x$, donde d_x es el grado del vértice x .

3.3 Propiedades espectrales de una gráfica.

3.3.1 Caminatas

El número de caminatas que se encuentran en una gráfica son de especial importancia en el estudio de la teoría espectral de gráficas. Las propiedades del producto de matrices nos permite establecer que la entrada xy de la n -ésima potencia de una matriz, está contando el número de caminatas de tamaño n que empiezan en el vértice x y terminan en el vértice y . Lo anterior se resume en la siguiente proposición.

Proposición 81 *Sea h un entero no negativo, entonces $(A^h)_{xy}$ es el número de caminatas de longitud h que van de x a y . En particular*

- (i) Se cumple que $(A^2)_{xx} = \text{deg}(x)$.
- (ii) $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{|V|} \lambda_i^2 = 2|E|$, donde λ_i es un *eigenvalor* de A .
- (iii) $\text{Tr}(A^3)$ es seis veces el número de triángulos de G .

3.3.2 Diámetro

Proposición 82 *Sea G una gráfica no dirigida. Todos los eigenvalores de G son ceros si y solo si G no tiene aristas. Lo mismo se cumple para los eigenvalores de Laplace y los eigenvalores de Laplace sin signo.*

El diámetro de una gráfica es, por definición, el máximo de las distancias entre todos sus vértices. El diámetro de una gráfica tiene la siguiente propiedad.

Proposición 83 *Sea G una gráfica conexa con diámetro d . Entonces G tiene al menos $d+1$ eigenvalores distintos, tiene al menos $d+1$ eigenvalores de Laplace distintos y al menos $d+1$ eigenvalores de Laplace sin signo distintos.*

Demostración. Sea M una matriz simétrica. Sean $\theta_1, \dots, \theta_t$ los eigenvalores distintos de M , entonces

$$(M - \theta_1 I)(M - \theta_2 I) \cdots (M - \theta_t I) = 0,$$

de donde obtenemos que M^t es una combinación lineal de I, M, \dots, M^{t-1} . Si $d(x, y) = t$ con $x, y \in V(G)$, entonces $(M^i)_{xy} = 0$ para $i = 0, 1, \dots, t-1$ y $(M^t)_{xy} > 0$, lo cual es una contradicción. Por lo que $t > d$. Aplicamos esto a $M = A$, $M = nI - L$ y $M = Q$. ■

3.3.3 Conectividad

El espectro de una gráfica desconexa se puede encontrar a partir del espectro de sus componentes.

Proposición 84 *Sea G una gráfica con componentes G_i $i = 1, \dots, s$, entonces el espectro de G es la unión de los espectros de las gráficas G_i .*

Proposición 85 *La multiplicidad del cero como eigenvalor de Laplace de una gráfica no dirigida G es igual al número de componentes conexas de G .*

Demostración. Gracias a la proposición anterior, nos basta probar que una gráfica conexa tiene a cero como eigenvalor de Laplace con multiplicidad 1. Tenemos que $L = NN^T$, donde N es la matriz de incidencia orientada. Notemos que $Lu = 0$ si y solo si $N^T u = 0$, para verificar esto, supongamos que $Lu = 0$, entonces

$$0 = Lu = u^T Lu = u^T NN^T u = \langle N^T u, N^T u \rangle,$$

lo cual implica que $N^T u = 0$. Por lo tanto si $xy \in E(G)$, $u_x - u_y = 0$. Como G es conexa u es un vector constante, lo cual implica que el eigenespacio del 0 es de dimensión 1. ■

Proposición 86 *Sea G una gráfica k -regular, entonces k es el eigenvalor más grande de G y su multiplicidad es el número de componentes de G .*

Demostración. Basta ver que $L = kI - A$ ■

3.4 Ejemplo de gráficas y sus espectros

Supongamos que G es una gráfica simple no dirigida con n vértices. En este caso, como G es no dirigida, entonces la matriz de adyacencia A es real simétrica, esto implica que todos sus eigenvalores son reales. Además, como G es una gráfica simple, A tiene ceros en su diagonal, su traza $Tr(A)$ (y por lo tanto la suma de sus eigenvalores) es cero.

Similarmente, L es real y simétrica, por lo que el espectro de Laplace es real. Además, L es positiva semidefinida, por lo que podemos denotar los eigenvalores por μ_1, \dots, μ_n , donde $0 = \mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$. La suma de estos eigenvalores es $Tr(L)$, lo cual es igual al doble del número de aristas de G . Finalmente Q tiene espectro real y no negativo. Tenemos que $Tr(Q) = Tr(L)$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de gráficas comunes y sus espectros.

Ejemplo 87 Gráficas completas. Sea K_4 la gráfica completa de cuatro vértices, entonces la matriz de adyacencia de K_4 está dada por

$$A_{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se puede ver que el espectro de la gráfica K_4 está dado por

$$\text{Spec}(K_4) = \{3, -1, -1, -1\}.$$

En general, para K_n se tiene que $A_{K_n} = J_n - I_n$, donde J_n es una matriz cuadrada de $n \times n$ con entradas todas iguales a 1, e I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Como J_n tiene espectro $\{n^{(1)}, 0^{(n-1)}\}$, I_n tiene espectro $\{1^{(n)}\}$ y además J_n e I_n son matrices simultáneamente triangularizables, entonces se tiene que

$$\text{Spec}(K_n) = \{(n-1)^{(1)}, (-1)^{(n-1)}\}.$$

Ejemplo 88 Caminos. Sea P_2 el camino de longitud 2, entonces la matriz de adyacencia de P_2 está dada por

$$A_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde podemos ver que el espectro de la gráfica P_2 está dado por

$$\text{Spec}(P_2) = \{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}.$$

En general se tiene que

$$\text{Spec}(P_n) = \{2 \cos(\pi j / (n+1)) : j = 1, \dots, n \text{ con multiplicidad } 1\}.$$

Ejemplo 89 Ciclos. Sea C_4 el ciclo de tamaño 4, entonces la matriz de adyacencia de C_4 está dada por

$$A_{C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde podemos ver que el espectro de la gráfica C_4 está dado por

$$\text{Spec}(C_4) = \{2, 0, 0, -2\}.$$

En general, C_n tiene matriz de adyacencia circulante. Una matriz circulante con renglón inicial (c_0, \dots, c_{n-1}) tiene eigenvalores $\sum c_i \omega_i$, donde ω_i es la i -ésima raíz de la unidad. Por lo tanto, los eigenvalores de C_n son de la forma

$$2 \cos(2\pi j/n) \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

todos con multiplicidad 2, excepto el 2 y posiblemente el -2 .

Ejemplo 90 Gráfica bipartita completa. Sea $K_{1,4}$ la gráfica bipartita completa de 5 vértices, entonces su matriz de adyacencia está dada por

$$A_{K_{1,4}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde podemos ver que el espectro de la gráfica $K_{1,4}$ está dado por

$$\text{Spec}(K_{1,4}) = \{2^{(1)}, -2^{(1)}, 0^{(3)}\}.$$

En general, se tiene que la gráfica $K_{m,n}$ tiene una matriz de adyacencia de 2, por lo tanto se tiene que el 0 es un eigenvalor con multiplicidad $m+n-2$ y se tienen otros dos eigenvalores no triviales. Como la gráfica es simple, entonces la suma de los eigenvalores tiene que ser

cero, de donde podemos ver que los eigenvalores no triviales son $\pm\lambda$. Para encontrar λ se resuelve la ecuación $Ax = \lambda x$. Por simetría, se tiene que el eigenvector x tiene que tener m coordenadas iguales a α y n coordenadas iguales a β , entonces

$$Ax = (m\beta, \dots, m\beta, n\alpha, \dots, n\alpha).$$

Este vector tiene que ser un múltiplo de $x = (\alpha, \dots, \alpha, \beta, \dots, \beta)$. Por lo tanto se tiene que $m\beta = \lambda\alpha$ y $n\alpha = \lambda\beta$, es decir, $mn\beta = \lambda^2\beta$ y $\lambda = \sqrt{mn}$. Por lo tanto se cumple que

$$\text{Spec}(K_{m,n}) = \left\{ \sqrt{mn}^{(1)}, -\sqrt{mn}^{(1)}, 0^{(m+n-2)} \right\}.$$

3.4.1 Gráficas regulares

Si G es una gráfica k -regular, la suma de cada renglón, de su matriz de adyacencia es k . Además, para cada θ eigenvalor se tiene que $|\theta| \leq k$ (de lo contrario si $|\theta| > k$ la matriz $tI - A$ es estrictamente diagonal dominante y por lo tanto no singular, por lo que t no sería eigenvalor).

Si G es k -regular, entonces $L = kI - A$. De aquí se obtiene que si G tiene eigenvalores

$$k = \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n,$$

y eigenvalores de Laplace

$$0 = \mu_1 \leq \dots \leq \mu_n,$$

entonces

$$\theta_i = k - \mu_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Los eigenvalores de $Q = kI + A$ son $2k, k + \theta_2, \dots, k + \theta_n$.

3.4.2 Complementos

Si G tiene matriz de adyacencia A , entonces \bar{G} tiene matriz de adyacencia $\bar{A} = J - I - A$ y matriz de Laplace $\bar{L} = nI - J - L$, donde J es la matriz cuadrada en cuyas entradas tiene solo 1's.

Si G es k -regular con eigenvalores $\theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$, entonces los eigenvalores del complemento son

$$n - k - 1, -1 - \theta_n, \dots, -1 - \theta_2.$$

3.4.3 Gráficas coespectrales

Definición 91 *Dos gráficas con el mismo espectro son llamadas coespectrales.*

Si dos gráficas son coespectrales, no necesariamente son isomorfas.

Ejemplo 92 $K_{1,4}$ y $K_1 + C_4$



ambas tienen espectro $2^{(1)}, 0^{(3)}, (-2)^{(1)}$ y claramente no son isomorfas.

Capítulo 4

Productos de Gráficas

En este capítulo estudiaremos distintos productos de gráficas. Dadas dos gráficas G_1 y G_2 , obtenemos una nueva gráfica a partir de estas dos como un "producto" entre ellas, es decir, $G_1 \sharp G_2$. Estudiaremos cinco tipos de productos: directo, booleano, monótono, ortogonal y libre. Además, presentaremos resultados sobre descomposición de estos productos desde el punto de vista de probabilidad no-conmutativa. Las principales referencias de este capítulo son Obata [30] y Accardi, Lenczewski y Salapata [3].

4.1 Producto directo

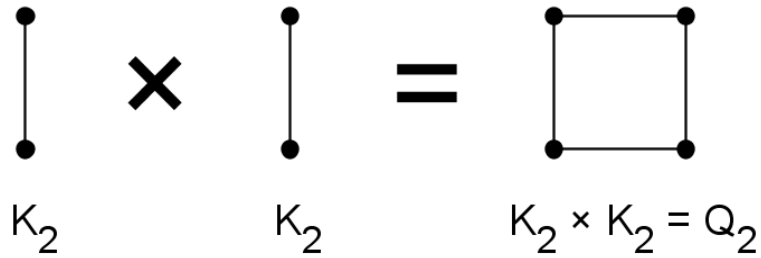
En esta sección estudiaremos el producto directo (o cartesiano) de gráficas. Este producto está asociado con la convolución clásica. Estudiaremos la descomposición de las matrices de adyacencia asociadas a este producto.

Definición 93 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas. El **producto directo** (cartesiano) de G_1 con G_2 está denotado por $G_1 \times G_2$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E , de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ la arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ si y solo si alguna de las condiciones se satisfacen

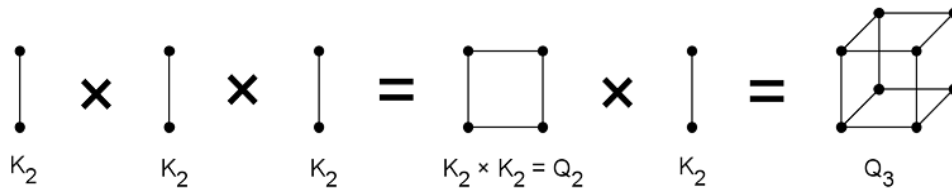
1. $v_1 = v_2$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2$.

A continuación presentamos algunos ejemplos de producto directo de gráficas, entre los cuales se exponen al hipercubo visto como un producto directo de la gráfica completa de dos vértices K_2 consigo misma.

Ejemplo 94 *El hipercubo Q_n , puede ser visto como el producto directo n -veces de K_2 consigo mismo. A continuación se muestra Q_2 visto como el producto directo de K_2 con K_2 , es decir, $Q_2 = K_2 \times K_2$,*



Entonces, podemos escribir también a Q_3 como $Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2 = Q_2 \times K_2$,

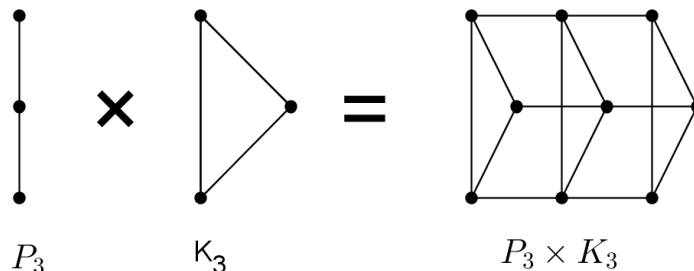


así, de manera inductiva, se tiene que

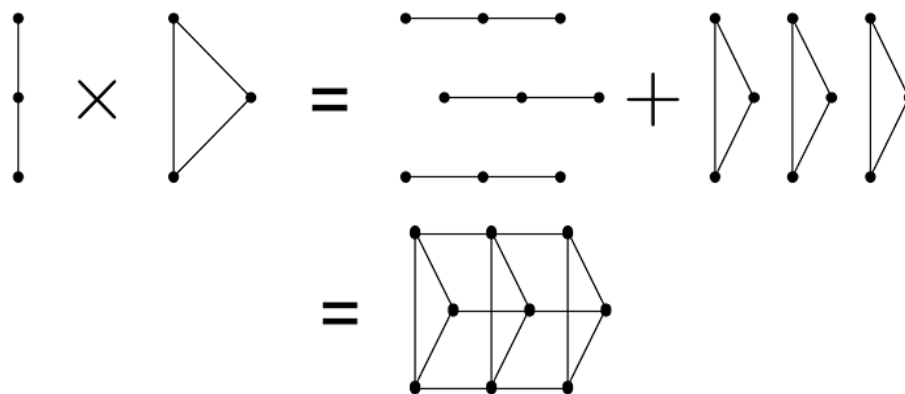
$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2 = \underbrace{K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2}_{n\text{-veces}}$$

Ejemplo 95 *El producto directo del camino de longitud 3 P_3 , con la gráfica completa de tres*

vértices K_3 ,



El producto directo de estas dos gráficas puede ser visto geoméricamente de la siguiente manera:



es decir, el producto directo de la gráfica P_3 y K_3 , explicado en palabras, consiste en hacer tres (número de vértices de K_3) copias de la gráfica P_2 , y tomar tres (número de vértices de P_2) copias de la gráfica K_3 , posteriormente unir los vértices correspondientes de cada gráfica. Lo anterior se puede escribir en términos de las matrices de adyacencia A_{P_2} y A_{K_3} , de la siguiente forma:

$$A_{P_2 \times K_3} = A_{P_2} \otimes I_3 + I_3 \otimes A_{K_3},$$

donde I_3 es la matriz identidad de 3×3 .

Lo explicado en el ejemplo anterior se cumple en general para el producto directo de dos gráficas finitas. Esto establece el siguiente teorema.

Teorema 96 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas finitas, entonces la matriz de adyacencia de $G_1 \times G_2$, puede ser descompuesta como una suma en términos de las matrices de adyacencia A_{G_1} y A_{G_2} de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \times G_2} = A_{G_1} \otimes I_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2},$$

donde I_d es la matriz identidad de $d \times d$.

Demostración. Sean $x, x' \in V_1$ y $y, y' \in V_2$. Directo de la definición del producto de Kronecker se tiene que

$$(A_{G_1} \otimes I_{|V_2|})_{(x,y)(x',y')} = (A_{G_1})_{xx'} (I_{|V_2|})_{yy'} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \sim x' \text{ y } y = y', \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De igual forma se tiene que

$$(I_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = (I_{|V_1|})_{xx'} (A_{G_2})_{yy'} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x' \text{ y } y \sim y', \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que las condiciones (i) $x \sim x'$ y $y = y'$; (ii) $x = x'$ y $y \sim y'$ no ocurren al mismo tiempo, entonces se cumple que

$$(A_{G_1} \otimes I_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \sim (x', y'), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo que se tiene que la matriz $A_{G_1} \otimes I_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2}$ coincide con la matriz de adyacencia de $G_1 \times G_2$. ■

Corolario 97 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas finitas, sea $G_1 \times G_2 = (V, E)$ el producto directo de estas dos gráficas, entonces la variable aleatoria $A_{G_1 \times G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_{tr})$ es la suma de dos variables aleatorias tensorialmente independientes.

Demostración. Se sigue directo del Teorema 96 y el Ejemplo 35. ■

De lo anterior podemos concluir que, el espectro del producto directo de una gráfica finita consigo misma, es igual en distribución, a la suma de variables aleatorias independientes en

el sentido tensorial, e idénticamente distribuidas. Este hecho se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 98 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita conexa. Sea G^N el producto directo de la gráfica G consigo misma N veces, y sea A_{G^N} su matriz de adyacencia, entonces se cumple que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left(\left(\frac{A_{G^N}}{\sqrt{N} \left(\frac{|V|}{2|E|} \right)^{1/2}} \right)^m \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 1, 2, \dots,$$

donde la medida de probabilidad que aparece al lado derecho de la ecuación, corresponde a una distribución de probabilidad normal estándar.

Demostración. Notemos que la variable aleatoria A tiene la misma distribución, bajo el funcional φ_{tr} , que $A \otimes I_{|V|}$, entonces, del Corolario 97 se tiene que A_{G^N} tiene la misma distribución que A^{*N} , de donde, aplicando el Teorema 46 se sigue el resultado. ■

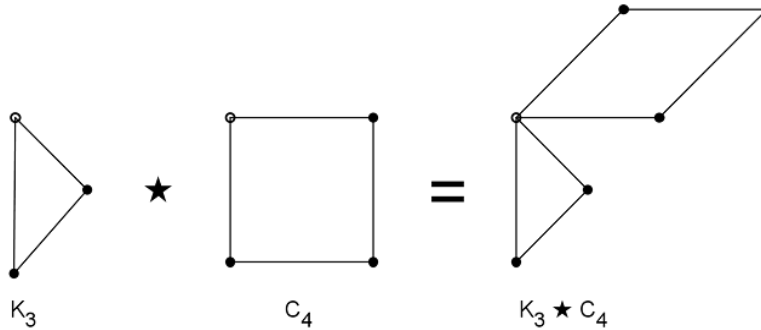
4.2 Producto booleano

Definición 99 *Sean $G_1 = (V_1, E_1, r_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2, r_2)$ dos gráficas con raíz. El **producto booleano (o estrella)** de G_1 con G_2 , denotado por $G_1 \star G_2$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E , de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ la arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ si y sólo si alguna de las condiciones se satisfacen*

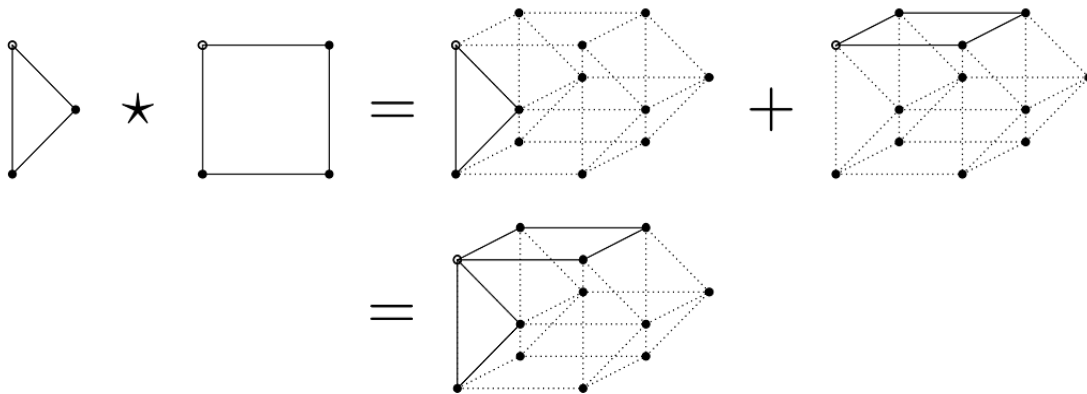
1. $v_1 = v_2 = r_1$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2 = r_2$.

Ejemplo 100 *El producto booleano de la gráfica completa de 3 vértices K_3 , con el ciclo de*

longitud 4 C_4 ,



Esta representación geométrica puede ser vista como la unión de dos subgráficas de $G_1 \star G_2$:



es decir, el producto booleano de la gráfica K_3 con la gráfica C_4 , explicado en palabras, consiste en hacer una copia de K_3 y una copia de la gráfica C_4 , y "pegar" las raíces de ambas gráficas. Lo anterior se puede escribir en términos de las matrices de adyacencia A_{K_3} y A_{C_4} de la siguiente manera:

$$A_{K_3 \star C_3} = A_{K_3} \otimes P_4 + P_3 \otimes A_{C_4},$$

donde P_4 y P_3 son la proyección de rango 1 al espacio generado por $(1, 0, 0, 0)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente.

Lo anterior se cumple de manera general para el producto booleano de dos gráficas finitas. Esto es lo que establece el siguiente resultado.

Teorema 101 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas con raíz, entonces la matriz de adyacencia del producto booleano $G_1 \star G_2$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \star G_2} = A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|} \otimes A_{G_2},$$

donde P_d es la proyección de rango 1 al espacio generado por el vector $(1, 0, \dots, 0)$, con la longitud del vector igual a d .

Demostración. Sean $x, x' \in V_1$ y $y, y' \in V_2$. Directo de la definición del producto de Kronecker se tiene que

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|})_{(x,y)(x',y')} = (A_{G_1})_{xx'} (P_{|V_2|})_{yy'} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \sim x' \text{ y } y = y' = e_2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De igual forma se tiene que

$$(P_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = (P_{|V_1|})_{xx'} (A_{G_2})_{yy'} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x' = e_1 \text{ y } y \sim y', \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que las condiciones (i) $x \sim x'$ y $y = y' = e_2$ y (ii) $x = x' = e_1$ y $y \sim y'$ no se pueden cumplir al mismo tiempo, entonces se cumple que

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \sim (x', y'), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Gracias a lo anterior, se cumple que la matriz $A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|} \otimes A_{G_2}$ coincide con la matriz de adyacencia de $G_1 \star G_2$. ■

El teorema anterior nos permite, poder descomponer, a la matriz de adyacencia del producto booleano de dos gráficas, como la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido booleano.

Corolario 102 Sean $G_1 = (V_1, E_1, e_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2, e_2)$ dos gráficas finitas con raíz, sea $G_1 \star G_2 = (V, E, e)$ el producto booleano de estas dos gráficas, entonces la variable aleatoria $A_{G_1 \star G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_1)$ es la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido booleano. Además, si la distribución espectral de G_1 y G_2 está dada por μ y ν , respectivamente, entonces la distribución espectral de $(G_1 \star G_2, e)$ está dada por $\mu \uplus \nu$.

Demostración. Se sigue del Teorema 101, el Ejemplo 39 y la definición de convolución booleana. ■

Teorema 103 (Obata [29]) Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz. Para $N \geq 1$, sea $A_{G^{\star N}}$ la matriz de adyacencia del producto booleano de G consigo misma N veces, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_1 \left(\left(\frac{A_{G^{\star N}}}{\sqrt{N} \deg(e_1)} \right)^m \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_1) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Demostración. Notemos que la variable aleatoria A tiene la misma distribución, bajo el funcional φ_1 , que $A \otimes P_{|V|}$, por lo que del Corolario 102 se sigue que $A_{G^{\star N}}$, tiene la misma distribución que $A^{\uplus N}$, por lo tanto, aplicando el Teorema 48, se cumple el resultado. ■

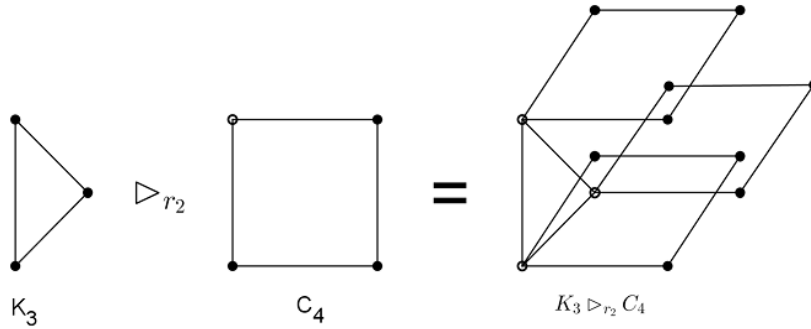
4.3 Producto monótono

Definición 104 Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas. Fijamos un vértice $r_2 \in V_2$ (la raíz). El **producto monótono** de G_1 con G_2 , denotado por $G_1 \triangleright_{r_2} G_2$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y el conjunto de aristas E , de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ la arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ si y solo si alguna de las condiciones se satisfacen

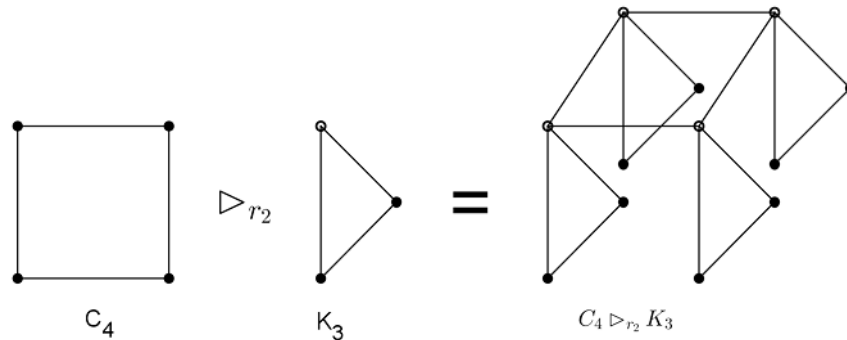
1. $v_1 = v_2$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2 = r_2$.

Una de las características del producto monótono es que no es conmutativo, para ver esto, tenemos el siguiente ejemplo.

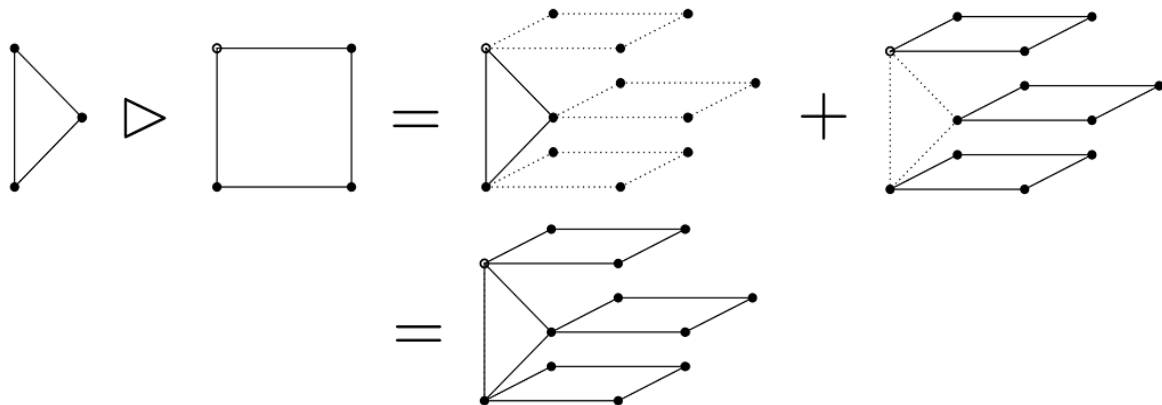
Ejemplo 105 El producto monótono de K_3 con (C_4, r_2) ,



notemos que es distinto del producto monótono de C_4 con (K_3, r_2) ,



En el caso $K_3 \triangleright C_4$, notemos que podemos ver gráficamente el producto monótono como:



es decir, lo que se está haciendo en el producto monótono es tomar una copia de K_3 y pegar una copia de C_4 , por la raíz, a cada uno de los vértices de K_3 , es decir, en términos de la

matriz de adyacencia se tiene que

$$A_{K_3 \triangleright C_4} = A_{K_3} \otimes P_4 + I_3 \otimes A_{C_4},$$

donde P_4 es la proyección de rango 1 al espacio generado por $(1, 0, 0, 0)$ e I_3 es la matriz identidad de 3×3 .

Lo expuesto en el ejemplo anterior, se puede generalizar, de manera análoga a lo hecho en el producto booleano, al siguiente resultado.

Teorema 106 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) gráficas con raíz, entonces la matriz de adyacencia del producto monótono $G_1 \triangleright G_2$ puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \triangleright G_2} = A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2}.$$

Demostración. Sean $x, x' \in V_1$ y $y, y' \in V_2$. Directo de la definición de producto de Kronecker se tiene que

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|})_{(x,y)(x',y')} = (A_{G_1})_{xx'} (P_{|V_2|})_{yy'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \text{ y } y = y' = e_2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De igual manera se tiene que

$$(I_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = (I_{|V_1|})_{xx'} (A_{G_2})_{yy'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \text{ y } y \sim y' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que las condiciones (i) $x \sim x'$ y $y = y' = e_2$ y (ii) $x = x'$ y $y \sim y'$, no se cumplen simultáneamente, entonces se tiene que

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \sim (x', y') \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Corolario 107 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) gráficas con raíz y sea $G_1 \triangleright G_2 = (V, E)$, entonces la variable aleatoria $A_{G_1 \triangleright G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_1)$ es la suma de dos variables aleatorias monótonamente independientes respecto al funcional φ_1 . Además, si μ y ν son las distribuciones espectrales de G_1 y G_2 , respectivamente, entonces la distribución espectral de $G_1 \triangleright G_2$ está dada por $\mu \triangleright \nu$.

Demostración. Se sigue del Teorema 106, el Ejemplo 41 y la definición de convolución monótona. ■

Teorema 108 (Accardi, Ben Ghorbal y Obata [2]) Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz. Para $N \geq 1$, sea $A_{G \triangleright N}$ la matriz de adyacencia del producto monótono de G consigo misma N veces, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_1 \left(\left(\frac{A_{G \triangleright N}}{\sqrt{N} \deg(e_1)} \right)^m \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}} dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Demostración. Notemos que la variable aleatoria A tiene la misma distribución, bajo el funcional φ_1 , que $A \otimes P_{|V|}$ y que $I_{|V|} \otimes A$, por lo que del Corolario 107 se sigue que $A_{G \triangleright N}$, tiene la misma distribución que $A^{\triangleright N}$, por lo tanto, aplicando el Teorema 49, se cumple el resultado. ■

4.4 Producto ortogonal

Usaremos la siguiente notación para gráficas con raíz. Si V es el conjunto de vértices de la gráfica con raíz $G = (V, E, e)$, se define

$$V^0 = V \setminus \{e\}.$$

A continuación se define el producto ortogonal, el cual sirve, junto con el producto estrella de gráficas, para hacer una descomposición del producto libre de dos gráficas $G_1 * G_2$ usando copias de G_1 y G_2 .

Definición 109 Sean $G_1 = (V_1, E_1, e_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2, e_2)$ dos gráficas con raíz. El producto ortogonal de G_1 con G_2 se define como la gráfica con raíz $G_1 \vdash G_2 = (V_1 \vdash V_2, E, e)$, donde

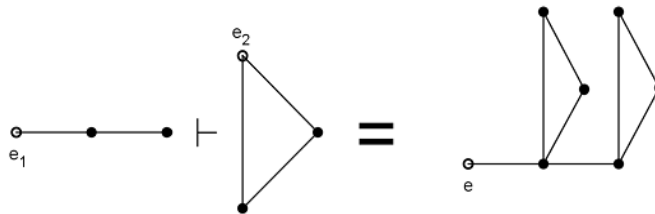
$$V_1 \vdash V_2 := (V_1^0 \times V_2) \cup \{e\},$$

con $e = (e_1, e_2)$, y conjunto de aristas E , de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ la arista $((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \in E$ si y solo si alguna de las siguientes condiciones se satisface

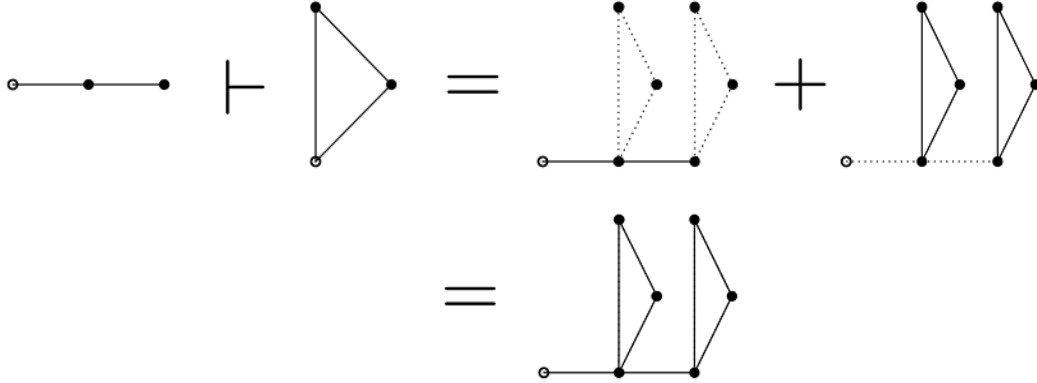
1. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2 = e_2$
2. $v_1 = v_2 \neq e_1$ y $w_1 \sim w_2$.

Nótese que el producto ortogonal de G_1 con G_2 se asemeja al producto monótono de estas mismas, solo se diferencia en que en el producto monótono se pega (por la raíz e_2) una copia de G_2 en cada vértice de G_1 , en cambio en el producto ortogonal se pega una copia de la segunda gráfica en cada vértice de la primera, excepto en la raíz de la primer gráfica.

Ejemplo 110 El producto ortogonal del camino de longitud 2 (con raíz e_1) (P_2, e_1) , con la gráfica completa de 3 vértices (con raíz e_2) (K_3, e_2) , está dado por:



Notemos que gráficamente, podemos ver lo anterior como



es decir, lo que se hace al hacer el producto ortogonal de P_2 con K_3 es tomar una copia de P_2 y pegar una copia de K_3 por la raíz, en cada uno de los vértices de la copia de P_2 , excepto en la raíz de P_2 . Lo anterior puede ser visto en las matrices de adyacencia de la siguiente forma:

$$A_{P_2 \vdash K_3} = A_{P_2} \otimes P_3 + P_3^\perp \otimes A_{K_3},$$

donde P_3 denota la proyección de rango 1 al espacio generado por $(1, 0, 0)$ y $P_3^\perp = I_3 - P_3$.

Lo explicado en el ejemplo anterior se puede generalizar para el producto ortogonal de dos gráficas, como un análogo a los Teoremas 96, 101 y 106.

Teorema 111 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) gráficas con raíz, entonces la matriz de adyacencia del producto ortogonal $G_1 \vdash G_2$ se puede descomponer de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \vdash G_2} = A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|}^\perp \otimes A_{G_2}.$$

Demostración. Sean $x, x' \in V_1$ y $y, y' \in V_2$. De la definición del producto de Kronecker se cumple que

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|})_{(x,y)(x',y')} = (A_{G_1})_{xx'} (P_{|V_2|})_{yy'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \text{ y } y = y' = e_2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De igual forma se cumple que

$$(P_{|V_1|}^\perp \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = (P_{|V_1|}^\perp)_{xx''} (A_{G_2})_{yy'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \neq e_1 \text{ y } y \sim y' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que las condiciones (i) $x \sim x'$ y $y = y' = e_2$ y (ii) $x = x' \neq e_1$ y $y \sim y'$ no se cumplen al mismo tiempo, entonces

$$(A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|}^\perp \otimes A_{G_2})_{(x,y)(x',y')} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \sim (x', y') \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Notemos que, gracias al Teorema 106 y al Teorema 111, se tiene que

$$A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2} = (A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|}^\perp \otimes A_{G_2}) + P_{|V_1|} \otimes A_{G_2},$$

de donde se concluye que

$$G_1 \triangleright G_2 = (G_1 \vdash G_2) \star G_2.$$

En el caso del producto ortogonal de una gráfica G consigo misma N veces, no se tiene un resultado del tipo Teorema del Límite Central, pues el comportamiento asintótico de G^{+N} no es universal, es decir, depende de la estructura de G . Sin embargo, el límite G^{+N} aparecerá en la descomposición del producto libre (ver Teorema 123).

4.5 Producto Libre

En esta sección se presenta el producto libre de gráficas. Este producto está asociado canónicamente con la independencia libre de variables aleatorias. De igual manera se estudiará una descomposición (de las *ramas*) del producto libre de gráficas usando el producto ortogonal y técnicas de la probabilidad no-conmutativa. Dicha descomposición, así como una descomposición cuántica de este mismo producto de gráficas, son estudiadas en Accardi, Lenczewski & Salapata [3].

Para poder definir el producto libre de gráficas, necesitamos definir el producto libre de conjuntos con raíz. Sean $(G_i, e_i) = (V_i, E_i, e_i)$ gráficas con raíz, donde $i \in I$, con I un conjunto de índices finito. El *producto libre de conjuntos con raíz* (V_i, e_i) , $i \in I$, se define como el conjunto con raíz $(*_{i \in I} V_i, e)$, donde

$$*_{i \in I} V_i = \{e\} \cup \{v_1 v_2 \cdots v_m : v_k \in V_k^0 \text{ y } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m, m \in \mathbb{N}\},$$

y e es la palabra vacía.

Definición 112 *El producto libre de gráficas con raíz* (G_i, e_i) , $i \in I$, se define como la gráfica con raíz $(*_{i \in I} G_i, e)$ con conjunto de vértices $*_{i \in I} V_i$ y conjunto de aristas $*_{i \in I} E_i$ el cual esta definido por

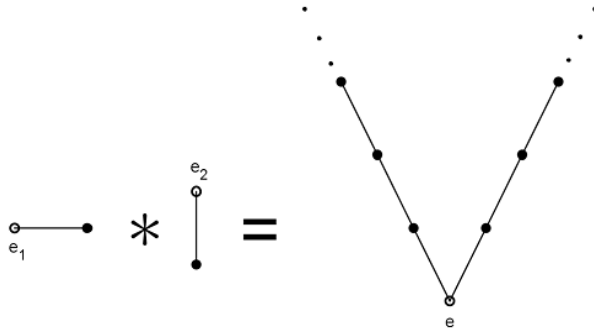
$$*_{i \in I} E_i := \left\{ (vu, v'u) : (v, v') \in \bigcup_{i \in I} E_i \text{ y } u, vu, v'u \in *_{i \in I} V_i \right\}.$$

Este producto se denota como $*_{i \in I} (G_i, e_i)$ o simplemente $*_{i \in I} G_i$.

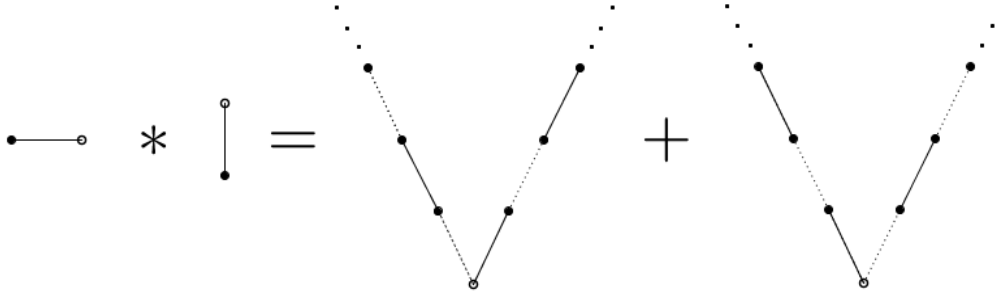
Ejemplo 113 *El producto libre de la gráfica completa de dos vértices K_2 con raíz x , consigo misma. Notemos que si $G_i = (V_i, E_i)$, con $V_i = \{e_i, x\}$ y $E_i = \{(e_i, x)\}$, $i = 1, 2$, entonces $G_1 * G_2 = (V_1 * V_2, E_1 * E_2)$, donde*

$$\begin{aligned} V_1 * V_2 &= \{e, x, y, xy, yx, xyx, yxy, \dots\} \\ E_1 * E_2 &= \{(e, x), (e, y), (x, yx), (y, xy), (yx, xyx), (xy, yxy), \dots\}, \end{aligned}$$

lo cual tiene la siguiente representación geométrica



Observemos que $G_1 * G_2 \cong \mathbb{Z}$, donde \mathbb{Z} es el camino infinito sin extremos, con raíz en el 0. Además, notemos que podemos descomponer este producto como:



Lo cual se puede describir en términos de las matrices de adyacencia de cada uno de los factores del producto libre, como

$$A_{K_2 * K_2} = A^{(1)} + A^{(2)},$$

donde $A^{(1)}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica que se genera al pegar copias de la primer gráfica (primer factor del producto libre) en todos los vértices, excepto en la raíz, de la segunda gráfica, y $A^{(2)}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica que se genera al pegar copias de la segunda gráfica en todos los vértices, excepto en la raíz, de la primer gráfica.

Para poder establecer un teorema que generalice lo descrito en el ejemplo anterior, es necesario introducir algunos conceptos. En primer lugar necesitamos escribir al conjunto de las palabras que no empiezan con un elemento de V_j^0 , para $j = 1, 2$. Este conjunto se puede escribir como unión de conjuntos de palabras que no empiezan con un elemento de V_j^0 y además, las palabras tienen longitud finita. Sea

$$W_j(n) = \{v_1 v_2 \cdots v_n \in V_1 * V_2 : v_1 \notin V_j^0\} \quad n \geq 1.$$

Es decir, $W_j(n)$ es, en efecto, el conjunto de palabras de longitud n que no empiezan con un elemento de V_j^0 . Por lo que, el conjunto de palabras que no empiezan con un elemento de V_j^0 es

$$W_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_j(n),$$

con $W_j(0) = e$ para todo j .

Definición 114 Sea A_{G_i} la matriz de adyacencia de la gráfica (G_i, e_i) , donde $i = 1, 2$. Definimos las copias de G_1 y G_2 en $G_1 * G_2$ por la fórmula

$$(A_{G_i}(n))_{\omega, \omega'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\omega, \omega'\} = \{xu, x'u\} \text{ para } \{x, x'\} \in E_i \text{ y } u \in W_i(n-1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 115 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas finitas conexas, y sea $G_1 * G_2$ el producto libre entre estas dos gráficas, entonces la matriz de adyacencia $A_{G_1 * G_2}$ admite una descomposición de la forma $A_{G_1 * G_2} = A^{(1)} + A^{(2)}$, donde

$$A^{(i)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{G_i}(n) \quad i = 1, 2.$$

Demostración. Notemos que si $\omega, \omega' \in V_1 * V_2$, entonces se tiene que

$$(A^{(1)})_{\omega, \omega'} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{G_1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\omega, \omega'\} = \{xu, x'u\} \text{ para } \{x, x'\} \in E_1 \text{ y } u \in W_1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

y

$$(A^{(2)})_{\omega, \omega'} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{G_2}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\omega, \omega'\} = \{xu, x'u\} \text{ para } \{x, x'\} \in E_2 \text{ y } u \in W_2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Dado que $V_1 * V_2 = W_1 \cup W_2$, entonces se tiene que

$$(A^{(1)} + A^{(2)})_{\omega, \omega'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\omega, \omega'\} = \{xu, x'u\} \text{ para } \{x, x'\} \in E_1 \cup E_2 \text{ y } u \in V_1 * V_2 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que era lo que se quería demostrar. ■

A continuación presentamos la definición de *ramas* del producto libre de gráficas, el cual fue introducido por Quenell [34]. Este concepto nos servirá para hacer una descomposición del producto libre de gráficas en dos productos (ortogonal y monótono) de las gráficas factores. Para alcanzar este objetivo, necesitamos definir los siguientes conceptos.

Definición 116 Sea $(V_i, e_i)_{i \in I}$ una familia finita de conjuntos con raíz. Se dice que (S_j, e) es una **rama** de $*_{i \in I} (V_i, e_i)$ **subordinada** a (V_j, e_j) , donde $j \in I$ y

$$S_j = \{e\} \cup \{v_1 v_2 \cdots v_m \in *_{i \in I} (V_i, e_i) : v_m \in V_j^0, m \in \mathbb{N}\},$$

es el subconjunto de $*_{i \in I} (V_i, e_i)$ que consiste de la palabra vacía y palabras que terminan en letras de V_j^0 .

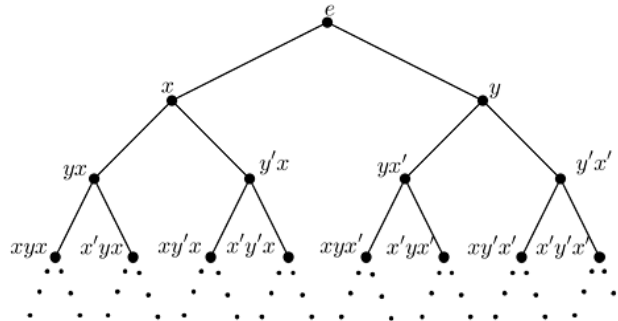
Definición 117 Sea $(G_i, e_i)_{i \in I}$ una familia finita de gráficas con raíz. Se dice que (\mathcal{B}_j, e) es la **rama** de $*_{i \in I} (G_i, e_i)$ **subordinada** a (G_j, e_j) , donde $j \in I$ y

$$\mathcal{B}_j \equiv \mathcal{B}_j((G_i)_{i \in I}),$$

es la subgráfica de $*_{i \in I} (G_i, e_i)$ restringida al conjunto S_j .

En el caso cuando se tiene el producto libre de dos gráficas, entonces $G_1 * G_2$ consiste de dos ramas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 con raíz común e . La rama $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_1(G_1, G_2)$ "comienza" con una copia de G_1 y la rama $\mathcal{B}_2 \equiv \mathcal{B}_2(G_1, G_2)$ "comienza" con una copia de G_2 . Por ejemplo, cuando se tiene un árbol binario (visto como producto libre de dos gráficas), las ramas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son las "hojas" izquierda y derecha de dicho árbol, respectivamente.

Ejemplo 118 Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_1 = \{e_1, x, x'\}$, $V_2 = \{e_2, y, y'\}$ con $x \sim e_1 \sim x'$ y $y \sim e_2 \sim y'$, sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 las ramas del producto libre $G_1 * G_2$ subordinadas a G_1 y G_2 , respectivamente. En la siguiente representación geométrica se puede observar que $\mathbb{T}_2 \cong \mathcal{B}_1 (\cong \mathcal{B}_2)$.



Teorema 119 *La matriz de adyacencia de la rama $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_1(G_1, G_2)$ se puede descomponer en la suma $A_{\mathcal{B}_1} = A^{(1)} + A^{(2)}$, donde*

$$A^{(1)} = \sum_{n \text{ impar}} A_1(n), \quad A^{(2)} = \sum_{n \text{ par}} A_2(n).$$

Lo mismo se cumple para la rama $\mathcal{B}_2 \equiv \mathcal{B}_2(G_1, G_2)$, solo que se intercambian los pares e impares de las sumas.

Teorema 120 *La rama \mathcal{B}_1 es el límite inductivo de la sucesión $G_1 \vdash_m G_2$ dada por la recursión*

$$G_1 \vdash_1 G_2 = G_1 \vdash G_2, \quad G_1 \vdash_m G_2 = G_1 \vdash (G_2 \vdash_{m-1} G_1),$$

donde $m > 1$. Lo mismo se cumple para \mathcal{B}_2 .

Demostración. Consideremos, sin pérdida de generalidad, la rama \mathcal{B}_1 . Recordemos que la rama \mathcal{B}_1 comienza con una copia de G_1 , por lo que escribimos que $\mathcal{B}_1(0)$ es igual a G_1 , y decimos que su raíz es e_1 . Para obtener $\mathcal{B}_1(1)$ es necesario pegar una copia de $\mathcal{B}_2(0) = G_2$ en cada uno de los vértices de G_1 excepto en la raíz e_1 , y volvemos a escoger a e_1 como la raíz, con lo cual estaríamos obteniendo una gráfica con raíz $(\mathcal{B}_1(1), e_1)$ la cual es igual a $G_1 \vdash G_2$. De manera similar podemos obtener la gráfica con raíz $(\mathcal{B}_2(1), e_2)$.

Ahora, notemos que, si nos restringimos a palabras de tamaño a lo más m , entonces decimos que la aproximación m -ésima de la rama \mathcal{B}_1 se obtiene al pegar copias (por su raíz) de $(\mathcal{B}_2(m-1), e_2)$, a cada vértice de (G_1, e_1) , excepto en su raíz. Esto es, se tiene que

$$\mathcal{B}_1(m) = G_1 \vdash \mathcal{B}_2(m-1) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2(m) = G_2 \vdash \mathcal{B}_1(m-1) \quad \forall m \geq 1.$$

Notemos que

$$\mathcal{B}_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_i(n) \quad i = 1, 2,$$

lo cual prueba el teorema. ■

Lo que buscamos es, encontrar una descomposición del producto libre de gráficas, la cual este basada en una descomposición ortogonal de las ramas del producto libre. Para esto, presentamos los siguientes lemas.

Lema 121 *El producto libre $G_1 * G_2$ admite la descomposición*

$$G_1 * G_2 = \mathcal{B}_1 * \mathcal{B}_2,$$

a la cual llamaremos la **descomposición estrella** de $G_1 * G_2$.

Demostración. Por la definición del producto libre, se tiene que $G_1 * G_2$ lo podemos obtener al pegar las raíces de las ramas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 . Pegar dos gráficas por sus raíces sabemos que es la definición del producto estrella, por lo tanto se cumple el resultado. ■

Lema 122 *El producto libre $G_1 * G_2$ admite la descomposición*

$$G_1 * G_2 = G_1 \triangleright \mathcal{B}_2 = G_2 \triangleright \mathcal{B}_1,$$

a la cual llamaremos la **descomposición monótona** de $G_1 * G_2$.

Demostración. Solo demostraremos la primer igualdad, la segunda igualdad se prueba análogamente. Notemos que la rama \mathcal{B}_1 puede ser vista como una copia de G_1 a la cual se le pegan ortogonalmente copias de la rama \mathcal{B}_2 , es decir

$$\mathcal{B}_1 = G_1 \vdash \mathcal{B}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = G_2 \vdash \mathcal{B}_1.$$

Gracias al Lema 121, sabemos que podemos obtener a $G_1 * G_2$ pegando las ramas \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 por sus raíces. De igual forma, \mathcal{B}_2 está pegado a e y la rama \mathcal{B}_1 se reemplaza por $G_1 \vdash \mathcal{B}_2$, lo que quiere decir que una copia de \mathcal{B}_2 está pegada a cada vértice $v \in V_1^0$. Esto último significa que la rama \mathcal{B}_2 está pegada en todos los vértices de la gráfica G_1 , lo cual es la definición del producto monótono, lo que concluye la prueba. ■

A continuación se presentan las descomposiciones *estrella-ortogonal* y *monótona-ortogonal*, las cuales se pueden obtener al combinar el Teorema 119 con el Lema 121 y el Teorema 120 con el Lema 122, respectivamente.

Teorema 123 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas finitas conexas con raíz, entonces el producto libre $G_1 * G_2$ admite la descomposición

$$G_1 * G_2 = (G_1 \vdash (G_2 \vdash (G_1 \vdash \dots))) * (G_2 \vdash (G_1 \vdash (G_2 \vdash \dots))),$$

a la cual llamaremos la **descomposición estrella-ortogonal** de $G_1 * G_2$.

Teorema 124 Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas finitas conexas con raíz, entonces el producto libre $G_1 * G_2$ admite la descomposición

$$\begin{aligned} G_1 * G_2 &= G_1 \triangleright (G_2 \vdash (G_1 \vdash (G_2 \vdash \dots))) \\ &= G_2 \triangleright (G_1 \vdash (G_2 \vdash (G_1 \vdash \dots))), \end{aligned}$$

a la cual llamaremos la **descomposición monótona-ortogonal** de $G_1 * G_2$.

Capítulo 5

Gráficas k -distantes

En este capítulo se presentan resultados del tipo asintótico acerca del espectro de las *gráficas k -distante* asociadas a algunos productos de gráficas, los cuales ya hemos definido en el capítulo anterior. Las gráficas k -distantes se definen a partir de una gráfica, a través de la *distancia gráfica*. En particular estudiaremos las gráficas k -distantes asociadas a los productos directo y booleano.

En la primera sección se presenta un resultado en cuanto al análisis asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al hipercubo, probado por Obata [28], mediante el uso de la teoría de los polinomios ortogonales, así como una descomposición de la matriz de adyacencia de la gráfica k -distante asociada al hipercubo de dimensión N . En la segunda sección de este capítulo se expone un resultado del tipo asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al producto directo de una gráfica finita consigo misma, el cual fue probado por Hibino, Lee y Obata [16], mediante la aplicación de la teoría de polinomios ortogonales y la probabilidad no-conmutativa. Por último, en la tercera sección de este capítulo se prueba un resultado asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al producto booleano de una gráfica finita consigo misma. Este resultado es nuevo y representa una aportación de esta tesis al estudio del análisis asintótico espectral del producto de gráficas.

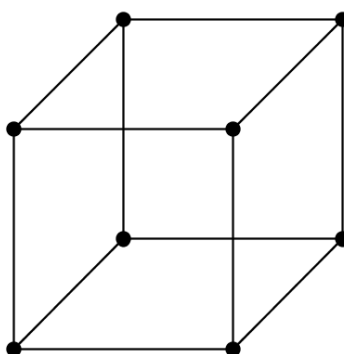
A continuación introducimos el concepto de gráfica k -distante, así como algunos ejemplos.

Definición 125 Dada una gráfica $G = (V, E)$ y un número entero positivo k definimos a la **gráfica k -distante** como $G^{[k]} = (V, E^{[k]})$, con

$$E^{[k]} = \{(x, y) : x, y \in V, \partial_G(x, y) = k\},$$

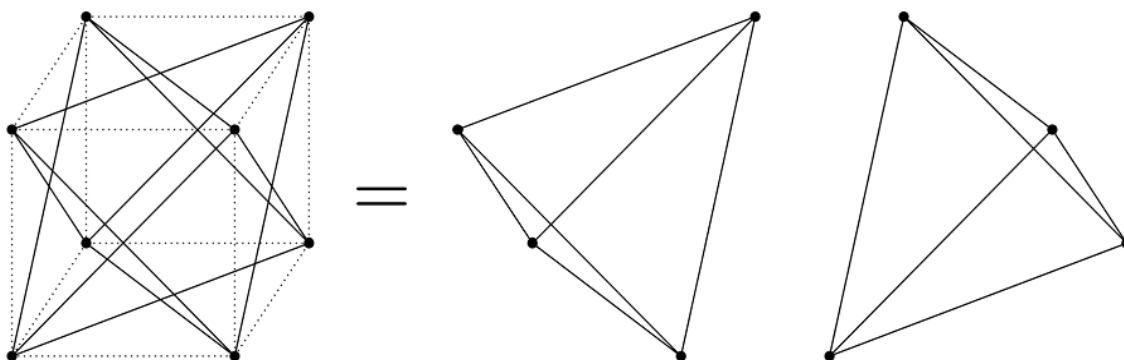
donde ∂_G es la distancia gráfica.

Ejemplo 126 Recordemos que el hipercubo de dimensión 3 se puede ver representado geoméricamente de la siguiente manera:



Q_3

Entonces, la gráfica 2-distante de Q_3 tiene la siguiente forma:



5.1 Gráficas k -distantes asociadas al Hipercubo

En el Capítulo 3 se mostró el ejemplo de la gráfica nombrada como Hipercubo, y en el Capítulo 4 se explica cómo el hipercubo de dimensión N puede ser visto como el producto directo de la gráfica completa K_2 consigo misma N veces. En esta sección se presenta un resultado del tipo asintótico, acerca de la distribución espectral de la gráfica k -distante asociada al hipercubo de dimensión N . Dicho resultado será demostrado usando propiedades de los polinomios de Krawtchouk y los polinomios de Hermite, vistas en el Capítulo 1. Esta demostración fue presentada en Obata [28].

Recordemos que

$$A_{K_2} = A_{Q_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y de la aplicación iterada del Teorema 96, se obtiene que para $N \in \mathbb{N}$

$$A_{Q_N} = \sum_{i=1}^N I_2 \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes I_2, \quad (5.1)$$

donde la matriz A_{Q_1} se encuentra en la i -ésima posición en cada sumando, y la matriz I_2 denota la matriz identidad de 2×2 .

Similarmente, para $k = 1, 2, \dots, N$, podemos expresar la matriz de adyacencia de $Q_N^{[k]}$ como

$$A_{Q_N^{[k]}} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq N} I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2, \quad (5.2)$$

donde la matriz A_{Q_1} aparece k veces en cada una de las i_j -ésimas posiciones para $j = 1, 2, \dots, k$.

Para simplificar la notación, escribiremos

$$A^{[k]} = A_{Q_N^{[k]}}, \quad A = A^{[1]} = A_{Q_N^{[1]}}, \quad I_N = A^{[0]} = A_{Q_N^{[0]}}.$$

Lema 127 Sea $N \geq 1$ fijo, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} A^{[0]} &= I_N, & A^{[1]} &= A, \\ AA^{[k]} &= (k+1)A^{[k+1]} + (N-k+1)A^{[k-1]}, & k &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Demostración. De las ecuación (5.1) se sigue que

$$AA^{[k]} = \left(\sum_{i=1}^N I_2 \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes I_2 \right) A^{[k]},$$

haciendo uso de la distributividad del producto de Kronecker, se sigue que

$$AA^{[k]} = (A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes I_2) A^{[k]} + (I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes I_2) A^{[k]} + \cdots + (I_2 \otimes \cdots \otimes A_{Q_1}) A^{[k]},$$

de donde, gracias a la ecuación (5.2), notando que $(A_{Q_1})^2 = I_2$ y utilizando la propiedad del producto mixto de Kronecker (ver Proposición 140), se obtiene que

$$\begin{aligned} AA^{[k]} &= \sum_{2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq N} \underbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{fijo}} \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \\ &+ \sum_{2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq N} \underbrace{A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes I_2}_{\text{fijo}} \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq N \\ i_j \neq 2 \quad \forall j=1, 2, \dots, k-1}} I_2 \otimes \underbrace{I_2}_{\text{fijo}} \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq N \\ i_j \neq 2 \quad \forall j=1, 2, \dots, k}} I_2 \otimes \underbrace{A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \\ &\vdots \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{k-1} \leq N-1} I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \underbrace{I_2}_{\text{fijo}} \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq N-1} I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes A_{Q_1} \otimes \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \underbrace{A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \end{aligned}$$

sumando y restando coeficientes, para completar sumas, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 AA^{[k]} &= A^{[k-1]} - \sum_{2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq N} \underbrace{A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_2 \\
 &+ A^{[k+1]} - \sum_{2 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq N} \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_2 \\
 &+ A^{[k-1]} - \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq N \\ i_j \neq 2 \quad \forall j=1, 2, \dots, k-2}} I_2 \otimes \underbrace{A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_2 \\
 &+ A^{[k+1]} - \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq N \\ i_j \neq 2 \quad \forall j=1, 2, \dots, k+1}} I_2 \otimes \underbrace{I_2}_{\text{fijo}} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_2 \\
 &\vdots \\
 &+ A^{[k-1]} - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq N-1} I_2 \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes \underbrace{A_{Q_1}}_{\text{fijo}} \\
 &+ A^{[k+1]} - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{k+1} \leq N-1} I_2 \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes \dots \otimes A_{Q_1} \otimes I_2 \otimes \dots \otimes \underbrace{I_2}_{\text{fijo}},
 \end{aligned}$$

por lo tanto la siguiente igualdad se cumple

$$\begin{aligned}
 AA^{[k]} &= NA^{[k-1]} + NA^{[k+1]} - (k-1)A^{[k-1]} - (N - (k+1))A^{[k+1]} \\
 &= (N - (k-1))A^{[k-1]} + (N - (N - (k+1)))A^{[k+1]} \\
 &= (N - k + 1)A^{[k-1]} + (k+1)A^{[k+1]},
 \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Poniendo cuidado en la recurrencia (5.3), nos damos cuenta que haciendo la normalización adecuada se obtiene el siguiente resultado.

Lema 128 *La matriz de adyacencia de la gráfica k -distante del hipercubo Q_N , está dada por*

$$A^{[k]} = \frac{1}{k!} K_k^{(N)}(A). \quad (5.4)$$

Demostración. Del Lema 127 se tiene que

$$k!AA^{[k]} = k!((k+1)A^{[k+1]} + (N-k+1)A^{[k-1]}).$$

Factorizando, se tiene que

$$A(k!A^{[k]}) = (k+1)!A^{[k+1]} + (N-k+1)k(k-1)!A^{[k-1]}.$$

Por otro lado, gracias al Lema 20 se sigue que

$$AK_k^{(N)}(A) = K_{k+1}^{(N)}(A) + (N-k+1)kK_{k-1}^{(N)}(A),$$

de donde podemos ver que $k!A^{[k]}$ y $K_k^{(N)}(A)$ cumplen la misma recurrencia, por lo que se cumple (5.4). ■

Para el análisis asintótico espectral del hipercubo necesitamos de los siguientes lemas.

Lema 129 *Sea $N \geq 1$, sea $A = A^{[1]} = A^{[N,1]}$ la matriz de adyacencia del hipercubo N -dimensional Q_N , entonces los momentos de la variable aleatoria A , con respecto al funcional φ_{tr} , coinciden con los momentos de β_N (ver Subsección 1.5.1), es decir*

$$\varphi_{tr}(A^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \beta_N(dx), \quad m = 1, 2, \dots$$

Demostración. Dado que el espectro de A_{Q_1} está dado por $\{-1^{(1)}, 1^{(1)}\}$, gracias a las ecuaciones (5.1) y (A.3) se tiene entonces que $-N+2j$ es un eigenvalor de A con multiplicidad $\binom{N}{j}$, de donde se sigue el resultado. ■

Lema 130 *Sea $A^{[N,k]}$ la matriz de adyacencia de la gráfica k -distante asociada al hipercubo Q_N , entonces*

$$\varphi_{tr}\left(\left(A^{[N,k]}\right)^m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}K_k^{(N)}(x)\right)^m \beta_N(dx).$$

Demostración. Del Lema 129, se sigue que

$$A^{[N,k]} = \frac{1}{k!} K_k^{(N)}(A),$$

notemos que $\frac{1}{k!} K_k^{(N)}(A)$ está en la misma álgebra que A (por ser un polinomio en A). Además, se cumple que si X es una variable aleatoria y $P(x)$ es un polinomio en x , entonces

$$\varphi((P(X))^m) = \int (P(t))^m \mu_X(dt),$$

entonces, del Lema 128 se sigue que

$$\varphi\left(\left(A^{[N,k]}\right)^m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} K_k^{(N)}(x)\right)^m \beta_N(dx).$$

■

Ahora estamos en posición de demostrar el siguiente teorema, el cual fue probado en [28].

Teorema 131 *Sea $k \geq 1$, entonces se cumple que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left(\left(\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \right)^m \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \tilde{H}_k(x) \right)^m \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Demostración. Se tiene que

$$\varphi_{tr} \left(\left(\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \right)^m \right) = \frac{1}{N^{k/2}} \varphi_{tr} \left(\left(A^{[N,k]} \right)^m \right),$$

de donde, gracias al Lema 130, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_{tr} \left(\left(\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \right)^m \right) &= \frac{1}{N^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} K_k^{(N)}(x) \right)^m \beta_N(dx) \\ &= \frac{1}{N^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x) \right)^m \tilde{\beta}_N(dx), \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\beta}_N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \frac{1}{2^N} \delta_{-\sqrt{N}+2j/\sqrt{N}},$$

entonces, gracias al Teorema del Límite Central (ver Teorema 63) y a la convergencia de los polinomios de Krawtchouk a los polinomios de Hermite (ver Lema 21), en el límite se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left(\left(\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \right)^m \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x) \right)^m \tilde{\beta}_N(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \tilde{H}_k(x) \right)^m \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

En otras palabras, lo que se acaba de demostrar es que

$$\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \xrightarrow{m} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z),$$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0, 1)$, y la convergencia de la variable aleatoria $A^{[N,k]}/N^{k/2}$ a la variable aleatoria $\frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z)$ es en momentos.

5.2 Gráficas k -distantes asociadas al producto directo

En esta sección se presenta un análisis asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al producto directo de cualquier gráfica finita consigo misma. El caso $k = 1$ se presentó en el Capítulo 4, en forma del Teorema del Límite Central Tensorial para gráficas. En el caso $k \geq 2$ se utiliza teoría de polinomios ortogonales y probabilidad no-conmutativa, para verificar la convergencia del espectro de la gráfica k -distante asociada al producto directo. El resultado que exponemos a continuación fue demostrado por Hibino, Lee y Obata [16].

Teorema 132 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita conexa, tal que $|V| \geq 2$. Para $N \geq 1$ y $k \geq 1$ sea $G^{[N,k]}$ la gráfica k -distante de $G^N = G \times \cdots \times G$ (el producto cartesiano de G consigo misma N veces) y $A^{[N,k]}$ la matriz de adyacencia de $G^{[N,k]}$, entonces para $k \geq 1$ la distribución espectral de $N^{-k/2} A^{[N,k]}$ converge en momentos, cuando $N \rightarrow \infty$, a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria*

$$\left(\frac{2|E|}{|V|} \right)^{k/2} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z),$$

donde \tilde{H}_k es el polinomio mónico de Hermite de grado k (ver Sección 1.5) y Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0, 1)$.

Para demostrar el Teorema 132 necesitamos establecer un marco de teoría de probabilidad no-conmutativa.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita, sea $M(V)$ la $*$ -álgebra de las matrices cuadradas indexadas por el conjunto de vértices V . El álgebra de adyacencia $\mathcal{A}(G)$, es decir, el álgebra generada por la matriz de adyacencia de G , es una $*$ -álgebra de $M(V)$. Dado que $\mathcal{A}(G^{[N,k]})$ es una $*$ -subálgebra de $M(V)^{\otimes N}$, la traza normalizada (ver Ejemplo 35) en $\mathcal{A}(G^{[N,k]})$ coincide con la restricción de $\varphi_{tr}^{\otimes N}$ en $M(V)^{\otimes N}$, lo que escribiremos como φ de aquí en adelante.

Utilizando notación análoga a la empleada en la Sección 2.6, escribimos

$$A^{(N,n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq N} A(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ \neq}} A(i_1, \dots, i_n),$$

y definimos la variable aleatoria real $C(N, k)$ tal que

$$A^{[N,k]} = A^{(N,k)} + C(N, k).$$

Para poder demostrar el Teorema 132 basta probar que

$$C(N, k) \xrightarrow{m} 0,$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

Recordemos que la matriz de adyacencia de G^N se puede escribir como

$$\begin{aligned} A_{G^N} &= \sum_{i=1}^N 1_{\mathcal{A}(G)} \otimes \dots \otimes A_G \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{A}(G)} \\ &= \sum_{i=1}^N A(i) = A^{(N,1)}, \end{aligned}$$

donde A_G está en la i -ésima posición de cada sumando. Lo anterior implica que

$$A^{[N,1]} = A^{(N,1)}.$$

Sin embargo, para $k \geq 2$, la igualdad $A^{[N,k]} = A^{(N,k)}$ no se cumple en general.

Antes de demostrar el Teorema 132, demostraremos los siguientes lemas.

Lema 133 Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita conexa, para $\xi, \eta \in V$ sea $\partial_G(\xi, \eta)$ la distancia en G entre los vértices ξ y η . Sea G^N el producto directo de la gráfica G consigo misma N veces, entonces

$$\partial_{G^N}(x, y) = \sum_{i=1}^N \partial_G(\xi_i, \eta_i),$$

donde $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in V^N$.

Demostración. Para llegar del vértice x al vértice y , es necesario recorrer un camino en G^N , lo cual se debe de hacer a través de vértices que sean vecinos en G^N . Para que dos vértices $x' = (\xi'_1, \dots, \xi'_N)$, $y' = (\eta'_1, \dots, \eta'_N)$ sean vecinos en G^N , es necesario que tengan todas las entradas iguales a excepción de una, en la cual los vértices correspondientes deben de ser vecinos en G . El resultado se sigue de la anterior observación. ■

Definimos a continuación, para fines prácticos la matriz de distancia de G . Para $k = 1, 2, \dots$, sea $D^{[k]}$ la *matriz k -distante* de G , la cual es una matriz cuadrada indexada por el conjunto de vértices V y definida por

$$(D^{[k]})_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } \partial_G(x, y) = k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $D^{[k]}$ coincide con la matriz de adyacencia de la gráfica k -distante de G . Por definición $A_G = D^{[1]}$ y $A^{[1,k]} = D^{[k]}$.

En la búsqueda de una expresión explícita para $C(N, k)$, utilizamos el caso $k = 2$ para ilustrar. Sean $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in V^N$, tales que

$$\partial_{G^N}(x, y) = \sum_{i=1}^N \partial_G(\xi_i, \eta_i) = 2,$$

lo cual funciona si y solo si alguno de los dos casos siguientes ocurre:

(i) Existen $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq N$, tales que $\partial_G(\xi_{i_1}, \eta_{i_1}) = \partial_G(\xi_{i_2}, \eta_{i_2}) = 1$ y $\partial_G(\xi_j, \eta_j) = 0$ para todo $j \neq i_1, i_2$.

(ii) Existe $1 \leq i \leq N$ tal que $\partial_G(\xi_i, \eta_i) = 2$ y $\partial_G(\xi_j, \eta_j) = 0$ para todo $j \neq i$.

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{[N,2]} &= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq N} D^{[1]}(i_1, i_2) + \sum_{1 \leq i \leq N} D^{[2]}(i) \\ &= A^{(N,2)} + C(N, 2). \end{aligned}$$

Aplicamos el argumento anterior a $A^{[N,k]}$ para un k arbitrario. Para $k \geq 1$, sea

$$\Lambda(k) = \left\{ \lambda = (j_1, j_2, \dots) : j_n \geq 0 \text{ enteros tales que } \sum_{h=1}^{\infty} h j_h = k \right\},$$

a los elementos de $\Lambda(k)$ se les llama *particiones* de k . Para $\lambda = (j_1, j_2, \dots) \in \Lambda(k)$ definimos

$$C(\lambda) = \sum 1_{\mathcal{A}(G)} \otimes \dots \otimes D^{[h]} \otimes \dots \otimes D^{[h]} \otimes \dots \otimes 1_{\mathcal{A}(G)},$$

donde $D^{[h]}$ aparece j_h veces y la suma se hace sobre todos los posibles arreglos. Notemos que si $\lambda_0 = (k, 0, \dots)$, entonces

$$C(\lambda_0) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq N} D^{[1]}(i_1, \dots, i_k) = A^{(N,k)}.$$

Lema 134 Para $k \geq 1$ se cumple que

$$A^{[N,k]} = A^{(N,k)} + \sum_{\lambda \in \Lambda(k) \setminus \{\lambda_0\}} C(\lambda).$$

Demostración. Sean $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_N) \in V^N$, si $(A^{[N,k]})_{xy} = 1$, entonces $\partial_{G^N}(x, y) = k$, lo cual ocurre si y solo si

$$\sum_{i=1}^N \partial_G(\xi_i, \eta_i) = k,$$

y si contamos el número de pares (ξ_i, η_i) que están a distancia h , nos damos cuenta de que

$$A^{[N,k]} = \sum_{\lambda \in \Lambda(k)} C(\lambda),$$

de donde se sigue el resultado. ■

Lema 135 *Sea $\lambda \in \Lambda(k) \setminus \{\lambda_0\}$, entonces se cumple que*

$$\frac{C(\lambda)}{N^{k/2}} \xrightarrow{m} 0.$$

Demostración. Sea $\lambda = (j_1, j_2, \dots)$ y definimos $J = \sum j_n$. Sea $M(m)$ el máximo de los valores absolutos de los momentos mixtos de $D^{[1]}, D^{[2]}, \dots$, de grado menor o igual que m . Tenemos que

$$C(\lambda)^m = \sum 1_{\mathcal{A}(G)} \otimes \cdots \otimes (*) \otimes \cdots \otimes (*) \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}(G)},$$

por expansión explícita, donde $(*)$ es un monomio en $D^{[1]}, D^{[2]}, \dots$, de grado a lo más m . Para calcular el valor de $\varphi(C(\lambda)^m)$, los términos que tienen un monomio $D^{[h]}$ de grado 1, no se toman en cuenta, pues $\varphi(D^{[h]}) = 0$, por lo tanto solo necesitamos términos donde en cada $(*)$ se encuentre un monomio de grado al menos 2.

Separamos a $\varphi(C(\lambda)^m)$ en la siguiente suma

$$\varphi(C(\lambda)^m) = S + R,$$

donde

$$S = \sum \varphi(1_{\mathcal{A}(G)} \otimes \cdots \otimes (*) \otimes \cdots \otimes (*) \otimes \cdots \otimes 1_{\mathcal{A}(G)}),$$

donde los $(*)$ son monomios de grado 2 todos, o todos los $(*)$ son de grado 2 excepto uno el cual es de grado 3, según la paridad de mJ . Observemos que para S , el número de lugares donde aparece $(*)$ es $\binom{N}{[mJ/2]}$, además, el número de arreglos de $D^{[1]}, D^{[2]}, \dots$, en los lugares elegidos, es un número finito $c(m, J)$, que depende de m y J . Por lo tanto

$$|S| \leq M(m)^{[mJ/2]} \binom{N}{[mJ/2]} c(m, k) \leq c_1(m, k) N^{[mJ/2]},$$

para alguna constante $c_1(m, k)$. Similarmente, para R el número de lugares donde puede aparecer $(*)$ es a lo más $\binom{N}{[mJ/2] - 1}$, de donde obtenemos que

$$|R| = o(N^{[mJ/2]}).$$

También se cumple que

$$J = \sum j_n < \sum hj_h = k,$$

de donde se puede deducir que

$$\left\lfloor \frac{mJ}{2} \right\rfloor - \frac{km}{2} \leq -\frac{m}{2},$$

y en consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \left(\left(\frac{C(\lambda)}{N^{k/2}} \right)^m \right) &\leq \frac{c_1(m, k) N^{[mJ/2]} + o(N^{[mJ/2]})}{N^{km/2}} \\ &= O(N^{-m/2}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Ahora estamos en condición de demostrar el Teorema 132.

Demostración del Teorema 132 Gracias al Lema 134 se cumple que

$$A^{[N, k]} = A^{(N, k)} + C(N, k),$$

donde

$$C(N, k) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k) \setminus \{\lambda_0\}} C(\lambda).$$

Queremos aplicar el Teorema 65 a una normalización de $A^{(N, k)}$. Observemos que

$$\varphi(A_G) = 0, \quad \varphi((A_G)^2) = \frac{2|E|}{|V|},$$

de donde aplicando el Teorema 65 se obtiene que

$$\frac{A^{(N, k)}}{N^{k/2} \varphi((A_G)^2)^{k/2}} \xrightarrow{m} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z),$$

lo que implica que

$$\frac{A^{(N,k)}}{N^{k/2}} \xrightarrow{m} \left(\frac{2|E|}{|V|} \right)^{k/2} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z).$$

Por lo tanto, debido a lo anterior y al Lema 135 se cumple que

$$\frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} = \frac{A^{(N,k)}}{N^{k/2}} + \frac{C(N,k)}{N^{k/2}} \xrightarrow{m} \left(\frac{2|E|}{|V|} \right)^{k/2} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(Z),$$

que era lo que se quería demostrar. ■

5.3 Gráficas k -distantes asociadas al producto booleano

En esta sección se presenta un análisis asintótico espectral de las gráficas k -distantes asociadas al producto booleano de una gráfica finita con raíz, consigo misma. El caso $k = 1$ es presentado en el Capítulo 4, entiéndase como el Teorema del Límite Central Booleano para gráficas. En el caso $k \geq 2$ se utiliza el lema conocido como *Lema del cuarto momento booleano*, para verificar la convergencia del espectro de la gráfica k -distante asociada al producto booleano.

Lema 136 *Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz y sea $k \in \{2, \dots, N\}$ tal que $G^{[k]}$ es una gráfica no trivial. Sea $(G^{\star N})^{[k]}$ la gráfica k -distante asociada al producto booleano de G consigo misma N veces, entonces $(G^{\star N})^{[k]}$ admite una descomposición de la forma*

$$(G^{\star N})^{[k]} = (G^{[k]})^{\star N} \cup G',$$

donde $\partial_G(z, e) < k$, para todo $z \in G'$.

Demostración. Sean G_1, G_2, \dots, G_N las N copias de G , que al pegarlas por e forman el producto booleano $G^{\star N}$. Si $x, y \in G_i$, entonces

$$\partial_{G^{\star N}}(x, y) = \partial_{G_i}(x, y) = \partial_G(x, y),$$

lo cual implica que

$$(x, y) \in E(G^{[k]}) \text{ si y solo si } (x, y) \in E\left((G^{\star N})^{[k]}\right),$$

de donde se sigue que $(G^{[k]})^{*N} \subseteq (G^{*N})^{[k]}$.

Ahora, si $x \in G_i$ y $y \in G_j$ con $j \neq i$, gracias a la definición del producto booleano, cualquier camino en G^{*N} que vaya de x a y tiene que pasar por el vértice e , por lo tanto

$$\partial_{G^{*N}}(x, y) = \partial_{G_i}(x, e) + \partial_{G_j}(y, e),$$

de lo que se puede deducir que

$$(x, y) \in E\left(\left(G^{*N}\right)^{[k]}\right) \text{ si y solo si } \partial_{G_i}(x, e) + \partial_{G_j}(y, e) = k.$$

Como $\partial_{G_i}(x, e), \partial_{G_j}(y, e) > 0$, entonces obtenemos el resultado. \blacksquare

Lema 137 (Del cuarto momento booleano) Sea $\{X_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$, una sucesión de variables aleatorias en un Espacio de Probabilidad No-Conmutativo, tales que

$$\varphi(X_n) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(X_n^2) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

Si $\varphi(X_n^4) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, entonces $\mu_{X_n} \longrightarrow b$, donde b es una variable aleatoria con distribución de probabilidad Bernoulli simétrica centrada.

Demostración. Sean $(\{\omega_i(\mu_{X_n})\}, \{\alpha_i(\mu_{X_n})\})$ los coeficientes de Jacobi de la medida de probabilidad μ_{X_n} . Gracias a las ecuaciones (2.14)

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 \\ m_2 &= \alpha_1^2 + \omega_1 \\ m_3 &= \alpha_1^3 + 2\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_1 \\ m_4 &= \alpha_1^4 + 3\alpha_1^2\omega_1 + 2\alpha_2\alpha_1\omega_1 + \alpha_2^2\omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

Dado que $m_1(\mu_{X_n}) = 0$ y $m_2(\mu_{X_n}) = 1$ se cumple que

$$\alpha_1(\mu_{X_n}) = 0 \quad \text{y} \quad \omega_1(\mu_{X_n}) = 1 \quad \forall n \geq 1,$$

de donde

$$m_4(\mu_{X_n}) = \alpha_2^2(\mu_{X_n}) + 1 + \omega_2(\mu_{X_n}).$$

Ahora, como $m_4(\mu_{X_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ y $\omega_1 \geq 0$ se tiene la convergencia

$$\omega_2(\mu_{X_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2(\mu_{X_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Finalmente, de la Proposición 24, se sigue que

$$G_{\mu_{X_n}}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z - \frac{1}{z}},$$

de donde se sigue el resultado. ■

Ahora, nos encontramos en posibilidad de demostrar el teorema principal de esta sección. Este teorema es un análogo a los Teoremas 131 y 132, donde se cambia al producto directo por el producto booleano. Una característica importante del teorema principal de esta sección es que la distribución límite no depende de k , a diferencia de sus análogos. Este resultado no se encontró reportado en la literatura.

Teorema 138 *Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz y sea k fijo, tal que $G^{[k]}$ es una gráfica no trivial. Sea $A^{[*N, k]}$ la matriz de adyacencia asociada a la gráfica k -distante del producto booleano de G consigo misma N veces, sea $V_e^{[k]}$ el conjunto de vecinos de e en la gráfica k -distante asociada a G , entonces la distribución de la variable aleatoria $A^{[*N, k]} / \sqrt{N|V_e^{[k]}|}$, con respecto al estado φ_1 , converge a una distribución Bernoulli simétrica, es decir*

$$\frac{A^{[*N, k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \longrightarrow \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1),$$

donde la convergencia es en distribución.

Demostración. Consideremos el Espacio de Probabilidad No-Conmutativo (\mathcal{A}, φ_1) con $\varphi_1(M) = M_{11}$, para $M \in \mathcal{A}$ (ver Observación 30), entonces, recordando de la Proposición 81, si A es una matriz de adyacencia, $\varphi_1(A^k)$ es igual al número de caminatas de tamaño k que empiezan en el vértice 1 y terminan en él mismo.

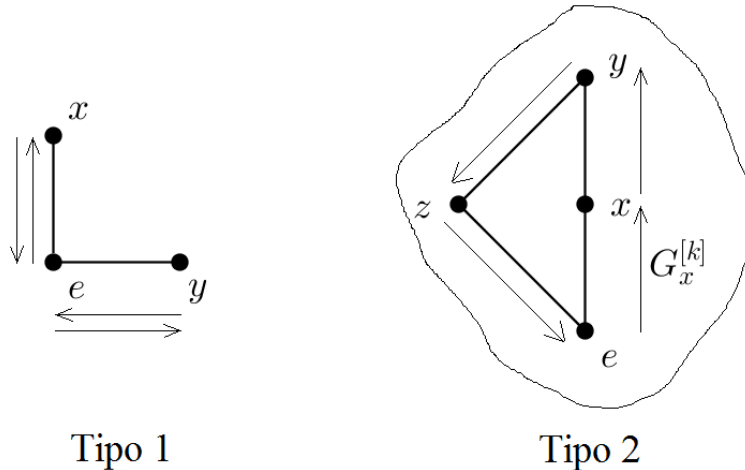
Como la gráfica G es una gráfica simple, es decir, no tiene lazos, entonces G^{*N} también es una gráfica simple, de donde se puede ver entonces que

$$\varphi_1 \left(\frac{A^{[*N,k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \right) = 0.$$

Ahora, veamos que dado que la gráfica G^{*N} no tiene lazos, las únicas caminatas de tamaño dos que empiezan en e y terminan en e son de la forma (exe) , es decir, empiezan en e y en el primer paso van a un elemento x el cual es vecino de e en $(G^{*N})^{[k]}$ para luego regresar a e , esto se puede hacer de $N|V_e^{[k]}|$ formas distintas, por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\left(\frac{A^{[*N,k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \right)^2 \right) &= \frac{1}{N|V_e^{[k]}|} \varphi_1 \left((A^{[*N,k]})^2 \right) \\ &= \frac{1}{N|V_e^{[k]}|} N|V_e^{[k]}| = 1. \end{aligned}$$

Nos interesa contar las caminatas de tamaño 4 que empiezan en e y terminan en e en $(G^{*N})^{[k]}$, veamos entonces cuántos tipos de caminatas puede haber con estas características.

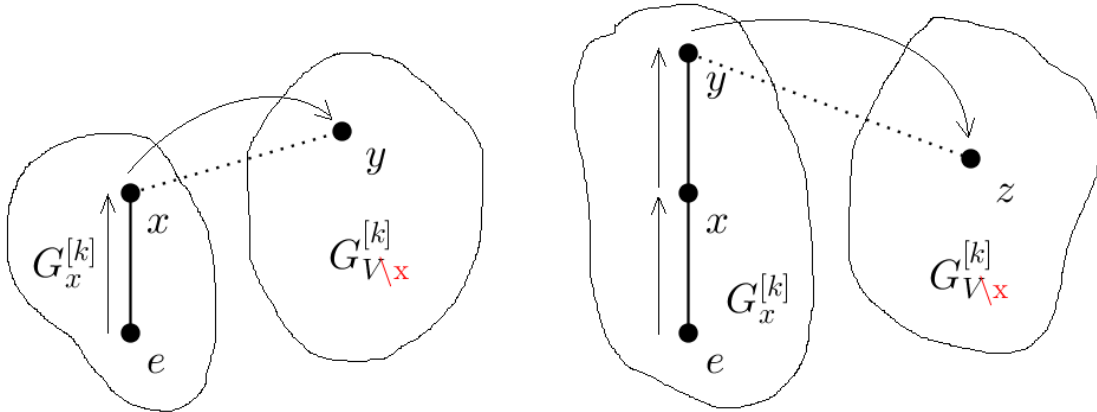


El primer tipo (Tipo 1) de caminata es de la forma $exeye$. Es decir, aquella que empieza en e , y va a un vecino x de e , para en el siguiente paso regresar a e , lo cual se puede escoger de $N|V_e^{[k]}|$ formas distintas. Después podemos ir a un vecino y de e (el cual incluso puede ser el primero que se había escogido) y finalmente regresar en el cuarto paso a e , esto se puede

hacer de $N|V_e^{[k]}|$ formas distintas, por lo que existen $(N|V_e^{[k]}|)^2$ caminatas de este tipo, es decir

$$1 = \frac{(N|V_e^{[k]}|)^2}{(N|V_e^{[k]}|)^2} \leq \varphi_1 \left(\left(\frac{A^{[*N,k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \right)^4 \right).$$

Sea $G_x^{[k]}$ la copia de $G^{[k]}$ en el producto booleano $(G^{[k]})^{*N}$ que contiene a x . Otro tipo (Tipo 2) de caminata es la siguiente, de e se va a un $x \in V_e^{[k]}$ (el cual se puede escoger de $N|V_e^{[k]}|$ maneras distintas), y de x solo se puede ir a un $y \in G_x^{[k]}$ (lo cual está acotado por el número de vecinos de x), lo anterior se cumple ya que $\delta_{(G^{*N})}(e, x) = k$, entonces si y estuviera en otra copia de $G^{[k]}$ la distancia $\delta_{(G^{*N})}(y, x)$, entre y y x tendría que ser mayor que k . Para el siguiente paso de la caminata, de y solo se puede ir un elemento de $V_e^{[k]}$ (pues en el último paso se tiene que regresar a e), entonces de y se va a $z \in G_x^{[k]}$, pues de lo contrario si $z \notin G_x^{[k]}$ esto implicaría que $\delta_{(G^{*N})}(e, z) \neq k$, lo cual es una contradicción.



Obstrucciones

Por lo tanto, si escribimos $M = \max_{x \in V} |V_x^{[k]}|$, el número de caminatas de este tipo está acotado por $(N|V_e^{[k]}|)(M)(|V_e^{[k]}|)$, de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\left(\frac{A^{[*N,k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \right)^4 \right) &\leq \frac{(N|V_e^{[k]}|)^2}{(N|V_e^{[k]}|)^2} + \frac{N|V_e^{[k]}| M |V_e^{[k]}|}{(N|V_e^{[k]}|)^2} \\ &= 1 + \frac{M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1, \end{aligned}$$

pues M no depende de N . Gracias al Lema 137 se obtiene el resultado deseado. ■

Apéndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Producto de Kronecker

Definición 139 Sean $A_{n \times m}$ y $B_{p \times q}$ matrices, se define como el producto de Kronecker a la matriz denotada por $A \otimes B$ de tamaño $np \times mq$, tal que la entrada $ijkl$ (entrada kl del bloque ij) es $(A \otimes B)_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$, donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$ y $1 \leq l \leq q$.

Más explícitamente, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

entonces tenemos que el producto de Kronecker, visto por bloques es

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}$$

lo que, más explícitamente es

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \cdots & a_{n1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{nm}b_{11} & a_{nm}b_{12} & \cdots & a_{nm}b_{1q} \\ a_{n1}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \cdots & a_{n1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{nm}b_{21} & a_{nm}b_{22} & \cdots & a_{nm}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{p1} & a_{n1}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{nm}b_{p1} & a_{nm}b_{p2} & \cdots & a_{nm}b_{pq} \end{pmatrix}.$$

El producto de Kronecker es un caso especial del producto tensorial, por lo que es bilineal y asociativo, es decir, si las matrices B y C son de iguales dimensiones se cumple que

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

de igual forma, si las matrices A y B son de iguales dimensiones, entonces se cumple que

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$

También, si $k \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B) \quad \text{y} \quad (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

El producto de Kronecker cumple la propiedad del producto mixto, la cual se enuncia como sigue:

Proposición 140 *Si $A_{n \times m}$, $B_{p \times q}$, $C_{m \times l}$ y $D_{q \times r}$, son matrices de dimensiones $n \times m$, $p \times q$, $m \times l$ y $q \times r$, respectivamente, entonces se cumple que*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \tag{A.1}$$

Notemos que si A y B son matrices cuadradas de tamaño n y p , respectivamente, en la diagonal de $(A \otimes B)$ se encuentran los coeficientes de la forma $a_{ii}b_{jj}$, donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq p$, de este hecho se puede deducir que la traza cumple lo siguiente:

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B). \quad (\text{A.2})$$

Entonces, de las propiedades (A.1) y (A.2) se deduce que el producto de Kronecker cumple que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[(A \otimes B)^n] &= \operatorname{tr}[(A \otimes B)(A \otimes B) \cdots (A \otimes B)] \\ &= \operatorname{tr}[A^n \otimes B^n] \\ &= \operatorname{tr}(A^n) \operatorname{tr}(B^n). \end{aligned}$$

Esta última igualdad implica que

$$\operatorname{Spec}(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j : \lambda_i \in \operatorname{Spec}(A) \ \mu_j \in \operatorname{Spec}(B)\}. \quad (\text{A.3})$$

Bibliografía

- [1] L. Accardi, M. Bozejko, *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **1**. (1998).
- [2] L. Accardi, A. B. Ghorbal, N. Obata, *Monotone independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **7**. (2004).
- [3] L. Accardi, R. Lenczewski, R. Salapata: *Decompositions of the free product of graphs*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **10**. (2007).
- [4] L. Accardi, Y. G. Lu, I. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Berlin: Springer-Verlag. (2002).
- [5] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd, Edinburgh-London. (1965).
- [6] K. B. Athreya, S. N. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer Text in Statistics. (2006).
- [7] M. Bozejko, *Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product*, Bolletino della Unione Matematica Italiana **5**. (1986).
- [8] A.E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular Graphs*, Springer-Verlag. (1989).

- [9] A. E. Brouwer, W. H. Haemers: *Spectra of graphs*, Springer. (2012).
- [10] T. S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach. (1978).
- [11] P. Deift: *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, American Mathematical Society. (1998).
- [12] R. Diestel: *Graph Theory, 4th edition*. Springer. (2010).
- [13] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, **7**. (1736).
- [14] J. Favard, *Sur les polynomes de Tchebicheff*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, **200**. (1935).
- [15] Y. Hibino, *Asymptotic spectral distributions of distance k -graphs of hamming graphs*, Communications on Stochastic Analysis, **7**. (2013).
- [16] Y. Hibino, H. H. Lee, N. Obata: *Asymptotic spectral distributions of distance k -graphs of cartesian product graphs*, Colloquium Mathematics. (2013).
- [17] A. Hora, N. Obata: *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Berlin Heidelberg. (2007).
- [18] R. Hudson, K. Parthasarathy, *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Communications in Mathematical Physics, **93**. (1984).
- [19] M. Krishnapur, Y. Peres, *Recurrent graphs where two independent random walks collide finitely often*, Electronic Communications in Probability, **9**. (2004).
- [20] J. Kurihara, *Asymptotic spectral analysis of a distance k -graph of N -fold direct product of a graph*, Communications on Stochastic Analysis, **6**. (2012)
- [21] J. Kurihara, Y. Hibino, *Asymptotic spectral analysis of a generalized N -cube by a quantum probabilistic method*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, **14**. (2011).

- [22] A. M. Legendre, *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, Mémoires Math. Phys. présentés à l'Acad. Sci., **10**. (1875).
- [23] Y. G. Lu, *An interacting free Fock space and the arcsine law*, Probability and Mathematical Statistics, **17**. (1997).
- [24] P. A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Berlin: Springer-Verlag. (1993).
- [25] N. Muraki, *Noncommutative Brownian in monotone Fock space*, Communications in Mathematical Physics, **183**. (1997).
- [26] J. V. Neumann, *Mathematischen Crundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer-Verlag. (1932).
- [27] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 335, Cambridge University Press, Cambridge. (2006).
- [28] N. Obata: *Asymptotic spectral distributions of distance k -graph of large-dimensional hypercubes*, Banach Center Publ. **96**. (2012).
- [29] N. Obata, *Quantum probabilistic approach to spectral analysis of star graphs*, Interdisciplinary Information Sciences **10**. (2004).
- [30] N. Obata, *Quantum Probability Theory: Notions of Independence and Applications to Spectral Analysis of Graphs*, ILJU Winter School. (2011).
- [31] A. Okounkov, *The uses of random partitions*, arXiv:math-ph/0309015. (2003).
- [32] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes*, Lectures notes from St. Flour course. (2002).
- [33] G. Polya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betre end die Irrfahrt im Stra ennetz*, Mathematischen Annalen, **84**. (1921).

- [34] G. Quenell, *Combinatorics of free product graphs*, Contemporary Mathematics. (1994).
- [35] J. Shohat, *Sur les polynômes orthogonaux généralisés*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, **207**. (1938).
- [36] R. Speicher, R. Woroudi, *Boolean convolution*, in *Free Probability Theory*, ed. D. Voiculescu, Fields Institute Communications, **12**. (1997).
- [37] G. Szego, *Orthogonal polynomials, Third Edition*, American Mathematical Society. (1974).
- [38] A. M. Vershik, *Asymptotic combinatorics and algebraic analysis*, Proc. International Congress of Mathematicians, Zurich, Switzerland 1994, Birkhäuser Verlag, Basel. (1995).
- [39] D. Voiculescu, *Addition of noncommuting random variables*, Journal Function Analysis, **66**. (1986).
- [40] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica, *Free Random Variables*, CRM Monograph Series Vol. 1 Providence, American Mathematical Society. (1992).
- [41] W. Woess, *Nearest neighbour random walks on free products of discrete groups*, Bolletino della Unione Matematica Italiana, **5**. (1986).
- [42] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. **138**, Cambridge University Press, Cambridge. (2000).