

Relaciones entre Probabilidad Libre y Representaciones de Grupos

Carlos Vargas Obieta

División de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas



Universidad de Guanajuato

Junio 2009

Guanajuato, Guanajuato

*A mis padres, Victoria y Francisco,
a mis hermanos, Vicky, Paco, Enrique, Ale y Laura
y a mi abuela, Carmen*

Agradecimientos

Es muy difícil mencionar a todas las personas e instituciones que colaboraron de alguna forma en la elaboración de este trabajo.

Antes que nada, dedico unas líneas a tres personas muy importantes que han marcado mi vida para siempre. A mi madre le agradezco por todo el cariño que me ha regalado, por sus constantes desvelos y su perpetua preocupación por mi bienestar. A mi padre le doy las gracias por enseñarme sobre la humildad, la seriedad y la integridad, por sus intensos sacrificios y por representar siempre mi mejor modelo a seguir. A mi abuela le agradezco todo su apoyo, sus amorosos consejos y su invaluable compañía durante toda mi niñez.

Este trabajo de tesis no sería posible sin el apoyo de mi asesor, el Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión, a quien le reconozco y agradezco su tiempo, paciencia y dedicación, y a quien además le considero un muy buen amigo.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Oscar Adolfo Sánchez Valenzuela y el Dr. Luis Hernández Lamonedá, por todo el tiempo que les tomó revisar esta tesis y por sus valiosas sugerencias. También agradezco a mi amigos Octavio Arizmendi Echegaray y Marco Antonio Figueroa Ibarra por todas sus sugerencias y comentarios.

Quiero expresar mi agradecimiento con la Universidad de Guanajuato, el CIMAT y el CONCYTEG, por todas las becas y apoyos que me otorgaron a lo largo de la licenciatura, y con el Sistema Nacional de Investigadores por otorgarme apoyo como ayudante de investigador nacional.

Índice general

Introducción	IX
1. Representaciones del Grupo Simétrico	1
1.1. Representaciones de Grupos	1
1.1.1. Conceptos Fundamentales	2
1.1.2. Reducibilidad	5
1.1.3. Caracteres de Representaciones	6
1.1.4. G -Homomorfismos y el Lema de Schur	9
1.1.5. Restricciones, Inducciones y Operaciones en Re- presentaciones	10
1.2. Representaciones del Grupo Simétrico	13
1.2.1. Particiones, Tablas y Tabloides	14
1.2.2. Módulos de Specht	17
1.2.3. Tablas Estándar, una Base para S^λ	20
2. Diagramas de Young	23
2.1. Diagramas, Medidas y Momentos	24
2.1.1. Definiciones	24
2.1.2. Correspondencia entre Diagramas y Medidas	29
2.2. La Medida de Plancherel	29
2.2.1. Diagramas de Young	30

2.2.2. Crecimiento de Diagramas y la Medida de Plancherel	31
3. Forma Límite de los Diagramas de Young	37
3.1. El Problema de Kerov y Vershik	37
3.2. Tres Lemas Importantes	39
3.3. Demostraciones de los Resultados Principales	53
4. Probabilidad Libre y Representaciones	57
4.1. Probabilidad Libre	58
4.1.1. Independencia Libre	58
4.1.2. Convolución Libre Aditiva	59
4.1.3. Cumulantes Libres	62
4.1.4. Ley del Semicírculo	63
4.1.5. Proyección Libre	64
4.2. Los Resultados de Biane	66
4.2.1. Estimación de Caracteres de Representaciones con Cumulantes Libres	68
4.2.2. Aproximación del Producto Tensorial de Kroecker de Representaciones con la Ley del Semicírculo	68
4.2.3. Aproximación a la Restricción de Representaciones con la Proyección Libre	69
4.2.4. Aproximación al Producto Exterior de Representaciones con la Convolución Libre	71
4.3. Conceptos Claves	73
4.3.1. Replanteamiento de los Teoremas en Términos de Medidas y Momentos	74
4.3.2. Interpretación Espectral de la Medida de Transición	75

A. Conceptos Básicos de Probabilidad	77
A.1. Elementos de Probabilidad Clásica	77
A.1.1. Definiciones Básicas	77
A.1.2. Probabilidad Condicional	78
A.1.3. Cadenas de Markov	80
A.2. Elementos de Probabilidad No Conmutativa	82
A.2.1. Espacios de Probabilidad No Conmutativos y Productos Naturales	82
A.2.2. Independencia	85
A.2.3. *-Álgebras y C^* -Espacios de Probabilidad	88
A.2.4. Convoluciones	92
B. Resultados Complementarios	93
B.1. Fórmula Gancho	93
B.2. Otros Resultados	100
Bibliografía	107

Introducción

La relación entre la probabilidad libre y las representaciones de grupos a través de los diagramas de Young es un tema que ha sido estudiado de manera creciente en los últimos años, principalmente por Biane [7], [8], Kerov [13], y Lasalle [16]. En general, relacionar dos o más diferentes áreas de las matemáticas en una teoría es un logro trascendente, pues permite estudiarlas en paralelo y las enriquece mutuamente. Recientemente Andrei Okounkov, profesor de la Universidad de Princeton, fue galardonado con la medalla Fields en el año 2006 por sus contribuciones que relacionan la teoría de representaciones, la probabilidad y la geometría algebraica. Algunos de sus trabajos en el tema son [9] y [21].

Esta tesis de licenciatura expone algunas relaciones entre las representaciones del grupo simétrico y la probabilidad libre. Un objetivo principal de la tesis es exponer en detalle uno de los resultados pioneros en esta área; resuelto por Kerov y Vershik ([12],[14]) en los 70's sobre la convergencia de una cadena de Markov de diagramas de Young al diagrama del semicírculo. Otro objetivo es exponer las ideas de Biane, quien explica en [6] las características asintóticas de caracteres de grupos y operaciones de representaciones en términos de cumulantes libres y operaciones en probabilidad libre.

De la teoría de representaciones de grupos simétricos, se sabe que a cada partición de n como suma decreciente de enteros positivos, le

corresponde un tipo de ciclo en S_n , y a cada uno de estos, una clase de conjugación K en S_n y por lo tanto, una representación irreducible, cuya dimensión puede calcularse mediante la fórmula gancho [3],[22]. Por otra parte, a cada partición de n le corresponde un diagrama rectangular y a cada uno de estos se le asocia una medida de probabilidad vía la transformada de Cauchy. Esta transformada juega un papel central en el enfoque analítico de la convolución libre de medidas de probabilidad; ver por ejemplo, la tesis de licenciatura de Octavio Arizmendi [2].

Así, a cada diagrama rectangular le podemos asociar una medida y una dimensión. Se construye una cadena de Markov que toma valores en los diagramas rectangulares y cuyas probabilidades de transición dependen de las dimensiones de los diagramas. Resulta que después de una normalización adecuada, la cadena converge a un diagrama determinístico Ω , cuya medida asociada es la distribución del semicírculo, que juega el papel de distribución Gaussiana clásica en la probabilidad libre.

Para demostrar estos resultados, se requieren elementos de diversas ramas de las matemáticas. Por ejemplo, se utiliza la fórmula de particiones de Hardy-Ramanujan que fue demostrada usando técnicas de teoría analítica de números, transformadas de Fourier y de Cauchy del análisis funcional, el lema de Borel-Cantelli de probabilidad clásica, la fórmula gancho de combinatoria, y teoría de representaciones de grupos, entre otros resultados.

A primera vista, la convergencia de esta cadena de diagramas al del semicírculo parece una coincidencia, que no sugiere una relación estrecha entre la probabilidad libre y representaciones de grupos. Por esta razón, en esta tesis se presentan también resultados más recientes, de Biane [6], en donde es evidente cómo los conceptos de caracteres y operaciones de inducción, restricción, producto tensorial y crecimiento de diagramas, relevantes en teoría de representaciones, se pueden

estudiar a través de los cumulantes libres, las convoluciones libres, las proyecciones libres, y la distribución del semicírculo, temas concernientes a la probabilidad libre. Una vez comprendidas estas relaciones, se concluye que la convergencia de la cadena de Markov al diagrama del semicírculo no es una casualidad, sino el principio de una relación estrecha entre estas dos ramas actuales de las matemáticas.

La tesis esta organizada en la siguiente forma. En los Capítulos 1 y 2 se introducen los conceptos y resultados fundamentales sobre representaciones del grupo simétrico y diagramas de Young, respectivamente. En el Capítulo 3 se da una demostración detallada del problema de Kerov y Vershik sobre la convergencia de la cadena de diagramas al diagrama del semicírculo. El Capítulo 4 se divide en tres secciones. La primera contiene las definiciones de algunos conceptos y operaciones de probabilidad libre, mientras que la segunda expone algunos resultados de Biane [6] sobre aspectos estadísticos de representaciones y caracteres, que dependen de las operaciones en probabilidad libre de la sección anterior. Las ideas y conceptos centrales de las demostraciones de éstos resultados se presentan en la tercera sección.

Se incluyen además dos apéndices con el propósito de que el trabajo se pueda leer de manera independiente. El Apéndice *A* contiene conceptos básicos sobre probabilidad clásica. Además expone los fundamentos de la probabilidad libre en el contexto más general de la probabilidad no conmutativa. En particular se presenta el concepto de independencia, haciendo un paralelo entre la independencia clásica y la libre, junto con los otros tres únicos tipos de independencia posibles. El Apéndice *B* incluye la fórmula gancho y la fórmula de particiones de Hardy-Ramanujan, así como otros resultados de cálculo y combinatoria que serán utilizados en las demostraciones.

Capítulo 1

Representaciones del Grupo Simétrico

El objetivo principal de este capítulo es recordar conceptos y resultados básicos concernientes a representaciones del grupo simétrico S_n en matrices complejas de dimensión finita, ya que éstos serán necesarios más adelante para poder plantear, comprender y resolver los principales resultados de la tesis.

Específicamente, se recuerdan los conceptos de caracteres, inducciones, restricciones, productos tensoriales, y productos exteriores de representaciones de S_n , así como las expresiones que permiten calcular las dimensiones de las representaciones irreducibles. Dado que estos resultados son bien conocidos, no se presentan demostraciones. Éstas pueden encontrarse en los dos primeros capítulos del libro de Bruce E. Sagan [22].

1.1. Representaciones de Grupos

En esta sección se introducen conceptos de representaciones de grupos en general. Si no se especifica lo contrario, G siempre será

un grupo finito con elemento neutro e y V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita.

1.1.1. Conceptos Fundamentales

Comenzamos con las definiciones básicas.

Definición 1.1.1 *Sea G un grupo, y V un espacio vectorial. Una función $X : G \rightarrow GL(V)$ es una **representación** de G en V si*

- i) $X(e) = I$.*
- ii) $X(gh) = X(g)X(h)$, $\forall g, h \in G$.*

Definición 1.1.2 *Sea G un grupo y V un espacio vectorial. Decimos que V es un **G -módulo** si existe una multiplicación de elementos de G por elementos de V , $G \times V \rightarrow V$, tal que*

- i) $g\mathbf{v} \in V$.*
- ii) $g(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = c(g\mathbf{v}) + d(g\mathbf{w})$.*
- iii) $(gh)\mathbf{v} = g(h\mathbf{v})$.*
- iv) $e\mathbf{v} = \mathbf{v}$.*

para todos $g, h \in G$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y escalares $c, d \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.1.3 *V es un G -módulo si y solo si existe una representación de G en V*

Bajo esta correspondencia, hablaremos de representaciones de G y de sus G -módulos implícitos indistintamente, y los teoremas y resultados se referirán a representaciones de G ó a G -módulos según convenga.

Si X y Y son representaciones de G en V y existe una transformación lineal $T \in GL(V)$ tal que para cualquier $g \in G$

$$TX(g)T^{-1} = Y(g)$$

decimos que X y Y son representaciones equivalentes y escribimos $X \cong Y$.

Observemos que i), ii) y iv) de la Proposición 1.1.1 son los axiomas de una acción del grupo G sobre V . De hecho, las acciones de grupos proporcionan una buena fuente de ejemplos de representaciones, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.1.4 $X(g) = I \in GL(V)$ para toda $g \in G$. Esta es la representación más sencilla y se le llama **representación trivial**.

Ejemplo 1.1.5 Dada una acción de un grupo G sobre un conjunto finito $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, podemos extenderla linealmente a una acción sobre el espacio vectorial generado por S , al que denotaremos por $\mathbb{C}S := \{c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_k\mathbf{s}_k \mid c_i \in \mathbb{C}\}$, con la suma y multiplicación por escalar naturales, y la acción

$$g(c_1\mathbf{s}_1 + c_2\mathbf{s}_2 + \dots + c_k\mathbf{s}_k) = c_1(g\mathbf{s}_1) + c_2(g\mathbf{s}_2) + \dots + c_k(g\mathbf{s}_k).$$

Así, se define para cada $g \in G$ una transformación lineal $X(g) : \mathbb{C}S \rightarrow \mathbb{C}S$. De esta forma, X es una representación, y $\mathbb{C}S$ resulta ser un G -módulo de dimensión $|S|$.

Siguiendo el Ejemplo 1.1.5, y dado que S_n actúa sobre el conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Tomando $G = S_n$, $V = \mathbb{C}S$, X queda definida para cada $\pi \in S_n$ como la transformación lineal tal que

$$X(\pi) : \mathbb{C}S \rightarrow \mathbb{C}S, \quad \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{i} \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \pi(\mathbf{i})$$

es decir, la matriz asociada a π es justamente la matriz de permutación de la base

$$X(\pi) = (a_{ij}), \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \pi(i) = j \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A ésta le llamamos **representación característica**.

Ejemplo 1.1.6 Como G actúa sobre sí mismo por la izquierda, procedemos como en el Ejemplo 1.1.5. Sean $S = G, V = \mathbb{C}S = \mathbb{C}G = \{c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 + \dots + c_k\mathbf{g}_k \mid c_i \in \mathbb{C}\}$, X definida para cada $g \in G$ como la transformación lineal tal que

$$X(g) : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G \quad . \\ \sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{g}_i) \mapsto \sum_{i=1}^n c_i(g\mathbf{g}_i)$$

A ésta le llamamos **representación regular izquierda**.

Recordemos que si $H \subset G$ es un subgrupo se puede considerar la relación de equivalencia

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in H : g_1 = g_2 h,$$

el conjunto de clases laterales izquierdas G/H y la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$. Entonces $\sigma : G/H \rightarrow G$ es una sección si $\pi \circ \sigma = id$.

Dada una sección σ , consideramos su imagen $\{\sigma([g_1]), \dots, \sigma([g_k])\} \subset G$. Entonces G actúa sobre $\{\sigma([g_1])H, \dots, \sigma([g_k])H\}$ al hacer

$$g(\sigma([g_i])H) = (g\sigma([g_i])H)$$

y del Ejemplo 1.1.5 obtenemos la **representación de clases laterales izquierdas**.

Proposición 1.1.7 La representación de clases laterales izquierdas no depende, salvo equivalencia de representaciones, de la sección considerada.

Obsérvese que si $H = G$ se obtiene la representación trivial y si se toma $H = \{e\}$ se obtiene la representación regular izquierda. En

este sentido, la representación de clases laterales izquierdas es una generalización de la representación regular izquierda.

1.1.2. Reducibilidad

Al estudiar las representaciones de un grupo G , como ocurre con muchos otros conceptos en matemáticas, se busca descomponerlas de alguna manera en partes más sencillas.

Definición 1.1.8 *Sea V un G -módulo. Un subespacio $W \subset V$ es un G -submódulo de V si es G -invariante, es decir, $gw \in W$ para cualquier $g \in G; w \in W$.*

Definición 1.1.9 *Un G -módulo es **reducible** si contiene un G -submódulo no trivial. Una representación es **reducible**, si su G -módulo asociado lo es.*

Una representación $X : G \rightarrow GL(V)$ es reducible si para alguna base de V las matrices asociadas tienen la forma diagonal (fija):

$$X(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

para toda $g \in G$, es decir, $V = U \oplus W$, U y W son G -submódulos, y $A : G \rightarrow GL(U)$, $B : G \rightarrow GL(W)$ son, por sí mismas, representaciones de G en U y W , respectivamente.

Lo anterior no se deriva directamente de la definición de reducibilidad, pues no es inmediato que de la existencia de un submódulo no trivial W se pueda encontrar un complemento que también sea un G -submódulo. Para esto es conveniente introducir un producto interior, y este nuevo G -submódulo será precisamente el complemento ortogonal de W . El siguiente es un resultado aún más general.

Teorema 1.1.10 (Teorema de Maschke). *Sea G un grupo finito y V un G -módulo de dimensión positiva. Entonces V es **completamente reducible**, es decir*

$$V = W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)},$$

donde los $W^{(i)}$ son G -submódulos irreducibles de V .

Corolario 1.1.11 *Sea G un grupo finito, V un espacio vectorial y X una representación de G en V . Entonces existe una transformación lineal T tal que para toda $g \in G$ la matriz de $TX(g)T^{-1}$ tiene la forma*

$$TX(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X^{(k)}(g) \end{pmatrix},$$

donde cada $X^{(i)}$ es una representación irreducible de G en los submódulos irreducibles $W^{(i)}$.

Después, con la ayuda de caracteres, puede observarse que la descomposición es única salvo equivalencias en representaciones.

1.1.3. Caracteres de Representaciones

Los caracteres de representaciones son objetos algebraicos muy útiles. Mediante un producto interior que se define más adelante, permiten resolver cuestiones importantes como la irreducibilidad de una representación o la equivalencia de dos representaciones.

Al proporcionar información acerca de sus respectivas representaciones, el estudio de los caracteres se vuelve muy relevante. Como se presenta en el Capítulo 4, varios teoremas que relacionan operaciones

en probabilidad libre y operaciones en representaciones, lo hacen a través de los caracteres de éstas.

Definición 1.1.12 Sea $X : G \rightarrow GL(V)$ una representación, entonces el **caracter** de X es la función $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\chi(g) = \text{tr}X(g).$$

Si V es un G -módulo, su **caracter** es el caracter de la representación correspondiente a V . Si la representación es irreducible, decimos que el caracter también lo es.

Observemos que el caracter de una representación no depende de la base en la que se esté trabajando, pues sabemos que la traza de una matriz es invariante bajo conjugaciones. En este sentido podemos decir que el caracter de una representación está bien definido.

Recordemos que dos elementos $g_1, g_2 \in G$ pertenecen a las misma **clase de conjugación** $K \subset G$ si existe un elemento $h \in G$ tal que

$$hg_1h^{-1} = g_2.$$

Dado que pertenecer a la misma clase de conjugación es una relación de equivalencia, ésta induce una partición de G .

Los caracteres cumplen algunas propiedades sencillas.

Proposición 1.1.13 Sea V un espacio vectorial de dimensión d y X una representación de G en V con caracter χ . Entonces

i) $\chi(e) = d$.

ii) Si K es una clase de conjugación de G , entonces

$$\chi(g) = \chi(h),$$

para todos $g, h \in K$.

iii) Si Y es una representación de G con caracter ψ , y $X \cong Y$, entonces

$$\chi(g) = \psi(g)$$

para todo $g \in G$.

El en el tercer inciso también es válida la otra implicación, la prueba no es trivial. Para la demostración de este hecho, es de ayuda la implementación de un producto interior para caracteres.

Definición 1.1.14 Sean χ, ψ los caracteres de dos representaciones de un grupo G , entonces definimos el **producto interior de caracteres**.

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

De este producto interior, se obtienen los siguientes resultados útiles.

Teorema 1.1.15 Sean X, Y representaciones irreducibles de un grupo G con caracteres χ, ψ respectivamente. Entonces

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi\psi} := \begin{cases} 1, & \text{si } X \cong Y, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Corolario 1.1.16 Sea X una representación de G con caracter χ , supóngase, de acuerdo al Teorema de Maskche, que

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k X^{(k)},$$

donde m_i es la multiplicidad con la que aparece el módulo irreducible $X^{(i)}$ y $X^{(i)} \not\cong X^{(j)}$, $i \neq j$. Entonces:

i) $\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + \dots + m_k \chi^{(k)}$.

ii) $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$ para cada j .

- iii) $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$.
 iv) X es irreducible si y solo si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.
 v) Sea Y otra representación de G con caracter ψ . Entonces

$$X \cong Y \text{ si y solo si } \chi(g) = \psi(g)$$

para cada $g \in G$.

1.1.4. G -Homomorfismos y el Lema de Schur

Dados dos G -módulos V y W , resulta interesante investigar las funciones que preservan su estructura. Es decir, nos conciernen transformaciones lineales $\theta : V \rightarrow W$ tales que

$$\theta(g\mathbf{v}) = g\theta(\mathbf{v}),$$

a las que llamaremos G -**homomorfismos** (o simplemente, homomorfismos). Si un G -homomorfismo es además una biyección, entonces se trata de un G -**isomorfismo**, y se dice que V y W son G -**equivalentes**. Resulta que dos representaciones $X : G \rightarrow GL(V)$ y $Y : G \rightarrow GL(W)$ son equivalentes si y solo si existe un G -isomorfismo entre los G -módulos V y W .

Utilizando el hecho de que el kernel de un G -homomorfismo $\theta : V \rightarrow W$ es un G -submódulo de V y la imagen es un G -submódulo de W , se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.1.17 (Lema de Schur) Sean V y W dos G -módulos irreducibles. Si $\theta : V \rightarrow W$ es un G -homomorfismo, entonces θ es un G -isomorfismo o es la transformación 0.

Combinando este lema con las relaciones entre caracteres antes estudiadas, se logran deducir muchas otras relaciones interesantes, y al aplicar el Teorema de Maskche a la representación regular izquierda

del Ejemplo 1.1.6, se obtiene que, de la descomposición del álgebra $\mathbb{C}G$ en submódulos irreducibles

$$\mathbb{C}G = m_1 W^{(1)} \oplus m_2 W^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k W^{(k)},$$

la maquinaria desarrollada anteriormente permite conocer los submódulos $W^{(i)}$ y los coeficientes m_i . Entre otros resultados, se concluye el siguiente teorema, indispensable en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.1.18 *El número de representaciones irreducibles no equivalentes es igual al número de clases de conjugación de G .*

En general, al demostrar el teorema, no se logra una correspondencia biyectiva natural entre las representaciones de G y las clases de conjugación. Sin embargo, como notaremos en la siguiente sección, en el caso del grupo de permutaciones sí se cuenta con ésta correspondencia.

1.1.5. Restricciones, Inducciones y Operaciones en Representaciones

A partir de una o más representaciones de grupos pueden generarse nuevas representaciones. A continuación mostraremos cómo se obtienen estas representaciones. Para más detalles se sugiere consultar el libro de Sagan [22]. Después, en el Capítulo 4, se observará que estas construcciones guardan una estrecha relación con operaciones y conceptos en probabilidad libre.

Definición 1.1.19 *Sea X una representación de un grupo G y en un espacio vectorial V , $H \subset G$ un subgrupo. Entonces la **restricción** de X a H , $X \downarrow_H^G$ está dada por*

$$X \downarrow_H^G = X(h)$$

para todo $h \in H$.

Definición 1.1.20 Sea $H \subset G$ un subgrupo, y sea Y una representación de H en V . Consideremos la imagen de una sección $\{\sigma([g_1]), \dots, \sigma([g_k])\}$ y definimos $Y'(g) : G \rightarrow GL(V)$

$$\widehat{Y}(g) = \begin{cases} Y(g), & \text{si } g \in H, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la **representación inducida** en G , $Y \uparrow_H^G : G \rightarrow GL(V^k)$ está dada por

$$\begin{aligned} Y \uparrow_H^G (g) &= \left(\widehat{Y} \left(\sigma([g_i])^{-1} g \sigma([g_j]) \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \widehat{Y} \left(\sigma([g_1])^{-1} g \sigma([g_1]) \right) & \dots & \widehat{Y} \left(\sigma([g_1])^{-1} g \sigma([g_k]) \right) \\ \widehat{Y} \left(\sigma([g_2])^{-1} g \sigma([g_1]) \right) & \dots & \widehat{Y} \left(\sigma([g_2])^{-1} g \sigma([g_k]) \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{Y} \left(\sigma([g_k])^{-1} g \sigma([g_1]) \right) & \dots & \widehat{Y} \left(\sigma([g_k])^{-1} g \sigma([g_k]) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposición 1.1.21 Sea G un grupo, V y W espacios vectoriales y $H \subset G$ un subgrupo. Sea X una representación de G en V , Y una representación de H en W y $\{\sigma([g_1]), \dots, \sigma([g_k])\}$ la imagen de una sección $\sigma : G/H \rightarrow G$. Entonces:

- i) $X \downarrow_H^G$ es representación de H en V .
- ii) $Y \uparrow_H^G$ es representación de G en V^k .

Al definir la representación inducida, ésta aparenta depender no solo de $H \subset G$ y X , sino también de la sección σ que se esté considerando. Se tiene que éste no es el caso.

Proposición 1.1.22 La representación inducida no depende de la sección que se elija, salvo equivalencia en representaciones.

Recordemos que dados dos espacios vectoriales V_1, V_2 , con bases $\{e_k\}_{k=1}^m$ y $\{f_k\}_{k=1}^n$ respectivamente, el espacio vectorial $V_1 \otimes V_2$ está generado por los pares $\{e_i \otimes f_j\}$.

Definición 1.1.23 Si $X : G \rightarrow GL(V), Y : G \rightarrow GL(W)$ son representaciones de G , entonces $V \otimes W$ es un G -módulo al considerar la acción

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw.$$

Entonces la **representación producto tensorial de Kronecker**, $X \otimes Y$ de G en $V \otimes W$, es la representación inducida por la acción anterior.

Definición 1.1.24 Dadas dos transformaciones lineales $X \in GL(V_1), Y \in GL(V_2)$. Su **producto tensorial** es la transformación lineal $X \otimes Y \in GL(V_1 \otimes V_2)$ cuya matriz en la base canónica $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, \dots, e_2 \otimes f_2, \dots, e_n \otimes f_m\}$ inducida por las bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{f_1, \dots, f_m\}$ de V_1 y V_2 tiene la forma de bloques:

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y & \dots \\ x_{21}Y & x_{22}Y & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde $X = (x_{ij})$.

Definición 1.1.25 Si $X : G \rightarrow GL(V_1)$ es representación de G y $Y : H \rightarrow GL(V_2)$ es representación de H , se puede definir la **representación producto tensorial (externa)** $X \# Y$ de $G \times H$ en el espacio vectorial $V_1 \otimes V_2$ de la siguiente manera:

$$(X \# Y)(g, h) := X(g) \otimes Y(h).$$

Existe una relación entre la representación producto tensorial de Kronecker y la representación producto tensorial. Si $X : G \rightarrow GL(V_1), Y :$

$G \rightarrow GL(V_2)$ son representaciones de G , entonces $X\#Y : G \times G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$. Entonces $X\#Y$ coincide con $X \otimes Y$ al encajar G en la diagonal de $G \times G$, es decir, $X\#Y(g, g) = X \otimes Y(g)$.

El producto tensorial de representaciones preserva irreducibilidad, es decir, si X y Y son representaciones irreducibles de G y H , respectivamente, entonces $X\#Y$ es representación irreducible de $G \times H$. Más aún, si $(X_n)_n$ y $(Y_m)_m$ son listas completas de representaciones irreducibles de G y H , respectivamente, entonces $(X_n\#Y_m)_{n,m}$ es una lista completa de representaciones irreducibles de $G \times H$. Por su parte, el producto tensorial de Kronecker, en general, no preserva irreducibilidad.

Definición 1.1.26 Sean X, Y representaciones de S_n, S_m respectivamente. Definimos su **producto exterior**

$$X \circ Y := X\#Y \uparrow_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}.$$

1.2. Representaciones del Grupo Simétrico

Habiendo repasado la teoría general, nos concentramos ahora en el escenario específico en el que el grupo representado en matrices complejas de dimensión finita es un grupo de permutaciones.

En este caso, las clases de conjugación son muy simples pues solo dependen del tipo de ciclos de la permutación. Cada partición de n puede relacionarse con un tipo de ciclo en S_n , y por lo tanto, con una clase de conjugación $K \subset S_n$. De lo anterior y del Teorema 1.1.18, se observa que las particiones de n son la base para entender las diferentes representaciones irreducibles de S_n .

1.2.1. Particiones, Tablas y Tabloides

Al escribir una permutación $\sigma \in S_n$ en notación cíclica

$$\sigma = (\sigma_1^1 \sigma_2^1 \dots \sigma_{k_1}^1) (\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_{k_2}^2) \dots (\sigma_1^m \sigma_2^m \dots \sigma_{k_m}^m), \quad k_1 \geq \dots \geq k_m,$$

decimos que σ tiene tipo de ciclos (k_1, k_2, \dots, k_m) .

Dos permutaciones pertenecen a la misma clase de conjugación si y solo si tienen el mismo tipo de ciclos.

Definición 1.2.1 Una **partición** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ es una sucesión finita decreciente de enteros no negativos llamados **partes**. El número $l(\lambda) = l$ de partes distintas de 0 es la **longitud** de λ , y $|\lambda| = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i$ es el **peso** de λ . El número $m_i(\lambda)$ es la **multiplicidad** de la parte i en λ . Usando otra notación, podemos escribir $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ donde m_i es la multiplicidad de la parte i . Si $|\lambda| = n$ decimos que λ es una **partición de n** y abreviamos $\lambda \vdash n$. Al conjunto de particiones de n y al de particiones los denotaremos por $P(n)$ ¹ y \mathcal{P} respectivamente.

Notemos que si $\sigma \in S_n$, entonces $\sum_{i=1}^m k_i = n$, por lo que podemos asociar a cada clase de conjugación en S_n una partición $\lambda \vdash n$. Por el Teorema 1.1.18, a cada representación irreducible le corresponde una clase de conjugación en S_n , y por lo tanto, una partición de n . Después observaremos que más que una simple correspondencia, la partición contiene información acerca de la representación irreducible asociada. Entre otras cosas, la partición ayuda a calcular la dimensión de la representación mediante la fórmula gancho (2.1).

¹Preferiremos la notación $\lambda \vdash n$, pues, aunque en muchos artículos se emplea $\lambda \in P(n)$, el conjunto $P(n)$ puede confundirse con el conjunto $\mathcal{P}(n)$ de particiones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en bloques disjuntos, al que haremos referencia en el Capítulo 4.

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ es una partición de longitud l , se le pueden agregar ceros al final, y sigue considerándose como la misma partición. Por ejemplo: $\lambda = (5, 3, 3, 1) = (5, 3, 3, 1, 0, 0, 0)$.

Podemos visualizar una partición mediante su **Diagrama de Ferrer**, que es simplemente un arreglo con λ_1 cajas en la primera fila, λ_2 en la segunda, y así sucesivamente. Llamaremos λ tanto a la partición como a su diagrama. Por ejemplo

$$\lambda = (5, 3, 3, 2) = \begin{array}{cccccc} & \square & \square & \square & \square & \square \\ & \square & \square & \square & & \\ & \square & \square & \square & & \\ & \square & \square & & & \end{array}$$

La **conjugada** λ' de λ es la partición que corresponde a trasponer el diagrama de λ . Por ejemplo, si $\lambda = (5, 3, 3, 2)$, entonces $\lambda' = (4, 4, 3, 1, 1)$.

Definición 1.2.2 Una **tabla** t resulta de colocar los números del 1 al n en las cajas del Diagrama de Ferrer de una partición $\lambda \vdash n$. Decimos que la **forma** de t , $sh(t) = \lambda$. Escribimos, como en el contexto de matrices $t = (t_{i,j})$.

Por ejemplo, si $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ dos posibles tablas son

$$t = \begin{array}{ccc} 9 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & \\ 5 & & \end{array}, t_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & \\ 8 & & \end{array},$$

entonces

$$sh(t) = sh(t_2) = \lambda = \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \\ \square & & \end{array}$$

y

$$t_{23} = 4, t_{31} = 3.$$

Observemos que si $\lambda \vdash n$, existe una acción muy natural del grupo S_n sobre el conjunto de tablas de una forma λ . Si t es una tabla, $\pi \in S_n$, y $sh(t) = \lambda$ consideramos $\pi t = (\pi(t_{i,j}))$.

Definición 1.2.3 Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$. Entonces el **Subgrupo de Young** de S_n correspondiente a λ es

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)} \\ &= S_{\{1, 2, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_1+1, n-\lambda_1+1, \dots, n\}} \\ &\cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_l}. \end{aligned}$$

Definición 1.2.4 Sea λ una partición. Dos tablas t_1, t_2 de forma λ son **renglón equivalentes**, $t_1 \sim t_2$, si sus correspondientes filas contienen a los mismos elementos. Un **tabloide de forma λ** o un **λ -tabloide** es la clase de equivalencia

$$\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}.$$

Distinguiremos a los tabloides de las tablas usando barras horizontales. Por ejemplo, si

$$t = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array},$$

entonces

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & & 3 & \end{array} \right\} = \overline{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}}.$$

La acción de S_n en las tablas de forma λ induce una acción en los tabloides de forma λ . Simplemente se tiene que $\pi\{t\} = \{\pi t\}$. El grupo de isotropía de esta acción es S_λ .

Definición 1.2.5 Sea $\lambda \vdash n$. Entonces el S_n -módulo

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\{\mathbf{t}_1\}, \dots, \{\mathbf{t}_k\}\}$$

generado por la lista completa de λ -tabloides se llama **módulo de permutaciones** correspondiente a λ .

1.2.2. Módulos de Specht

Resulta que para cada $\lambda \vdash n$, el módulo M^λ contiene un submódulo irreducible muy interesante. Para estudiarlo necesitamos primero algunas definiciones.

Supongamos que t tiene filas R_1, R_2, \dots, R_l y columnas C_1, C_2, \dots, C_k . entonces los subgrupos

$$R_t = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \dots \times S_{R_l}$$

y

$$C_t = S_{C_1} \times S_{C_2} \times \dots \times S_{C_k}$$

son el **estabilizador de filas** y el **estabilizador de columnas**, respectivamente.

Sea $H \subset S_n$ un subgrupo. Entonces podemos formar las sumas

$$H^+ = \sum_{\pi \in H} \pi$$

y

$$H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

Además, se pueden multiplicar estas sumas por elementos en M^λ . Si $\{\mathbf{t}\}$ es un tabloide (visto como elemento de M^λ) y $sh(\mathbf{t}) = \lambda$, en-

tonces

$$H^+\{t\} = \sum_{\pi \in H} \{\pi \mathbf{t}\} \in M^\lambda.$$

Al extender linealmente podemos multiplicar H^+ por cualquier elemento de M^λ , y análogamente con H^- .

Para t una tabla, usamos la notación

$$\kappa_t = C_t^- = \sum_{\pi \in C_t^-} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

Observemos que si t tiene columnas C_1, C_2, \dots, C_k , entonces κ_t se factoriza como

$$\kappa_t = \kappa_{C_1} \kappa_{C_2} \dots \kappa_{C_k}.$$

Definición 1.2.6 Si t es una tabla, su *politabloide* asociado es

$$\mathbf{e}_t = \kappa_t \{\mathbf{t}\}.$$

Ilustramos estos conceptos con un ejemplo: si

$$t = \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & \\ 3 & & \end{array},$$

entonces

$$\begin{aligned} C_t &= S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,6\}} \times S_{\{5\}}, \\ \kappa_t &= (e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132))(e - (46))(e) \\ &= e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132) - (46) + (12)(46) \\ &\quad + (13)(46) + (23)(46) - (123)(46) - (132)(46) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{array}{cccccc}
 \hline & 2 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline \mathbf{e}_t = & 1 & 6 & & -2 & 6 & & -3 & 6 & & -1 & 6 & & +3 & 6 & & +2 & 6 \\
 \hline & 3 & & & 3 & & & 1 & & & 2 & & & 2 & & & 1 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \hline & 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 5 & 2 & 6 & 5 & 3 & 6 & 5 & 1 & 6 & 5 & 3 & 6 & 5 \\
 \hline - & 1 & 4 & & +2 & 4 & & +3 & 4 & & +1 & 4 & & -3 & 4 & & -2 & 4 & . \\
 \hline & 3 & & & 3 & & & 1 & & & 2 & & & 2 & & & 1 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Proposición 1.2.7 Sean $\pi \in S_n$ y t una tabla. Entonces $\mathbf{e}_{\pi t} = \pi \mathbf{e}_t$.

Definición 1.2.8 Para cada partición λ el **módulo de Specht** S^λ , es el submódulo de M^λ generado por todos los politabloides de forma λ .

Proposición 1.2.9 Para toda $\lambda \vdash n$, S^λ es un módulo cíclico generado por cualquier politabloide de forma λ .

Teorema 1.2.10 (Teorema del submódulo). Sea U un submódulo de M^λ . Entonces

$$U \supseteq S^\lambda \quad \text{ó} \quad U \subseteq (S^\lambda)^\perp.$$

En particular, S^λ es irreducible.

Teorema 1.2.11 Los submódulos $\{S^\lambda : \lambda \vdash n\}$ forman una lista completa de submódulos irreducibles de S_n .

En adelante, si $\lambda \vdash n$, denotaremos por $[\lambda] \in GL(S^\lambda)$ a la representación irreducible que induce el M^λ -módulo irreducible S^λ .

1.2.3. Tablas Estándar, una Base para S^λ

Resulta que el submódulo irreducible S^λ está generado por politabloides que surgen a partir de tablas especiales que tienen cierto orden en sus columnas y filas. Para determinar la dimensión de S^λ , bastará calcular cuántas tablas de éstas hay. Este problema, aunque puede formularse de manera muy sencilla, no ha admitido demostraciones triviales, como puede apreciarse en el Apéndice B.1.

Si $\lambda \vdash n$, $n \geq 1$ denotamos por

$$\begin{aligned}\lambda^- &= \{\mu | \mu \vdash (n-1) \text{ y } \mu \text{ resulta de quitarle un punto a } \lambda\}, \\ \lambda^+ &= \{\mu | \mu \vdash (n+1) \text{ y } \mu \text{ resulta de agregarle un punto a } \lambda\}.\end{aligned}$$

Definición 1.2.12 *Una tabla t es **estándar** si los números en las columnas (filas) forman sucesiones crecientes de arriba hacia abajo (izquierda a derecha). Decimos que el politabloide asociado a t también es **estándar**.*

Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccc}1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array}$$

es una tabla estándar, mientras que

$$\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array}$$

no lo es, pues la segunda fila no es creciente de izquierda a derecha. Notemos que una tabla estándar indica una manera de ir agregando cajas, desde el diagrama de la partición 1 hasta obtener un diagrama de forma λ , logrando que en cada paso intermedio, el diagrama corresponda a una partición. Este concepto de crecimiento de diagramas es

muy importante para calcular la dimensión de S^λ . Sea f^λ el número de λ -tablas estándar.

Teorema 1.2.13 *El conjunto*

$$\{\mathbf{e}_t : t \text{ es } \lambda\text{-tabla estándar}\},$$

es una base para S^λ .

Lema 1.2.14 *Sea $\lambda \vdash n$. Entonces*

$$\dim S^\lambda = f^\lambda = \sum_{\mu \in \lambda^-} f^\mu = \sum_{\mu \in \lambda^-} \dim S^\mu.$$

En el Apéndice B se demuestra la fórmula gancho, que indica una forma de calcular f^λ .

Teorema 1.2.15 (Regla de ramificación) *Sea λ una partición. Entonces*

$$\begin{aligned} S^\lambda &\downarrow \begin{matrix} S_n \\ S_{n-1} \end{matrix} \cong \bigoplus_{\mu \in \lambda^-} S^\mu, \\ S^\lambda &\uparrow \begin{matrix} S_{n+1} \\ S_n \end{matrix} \cong \bigoplus_{\mu \in \lambda^+} S^\mu. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Diagramas de Young

El objetivo de este capítulo es presentar lo concerniente a diagramas, que son el medio por el cual relacionaremos las representaciones de grupos simétricos con la probabilidad libre. Se trata de una clase de funciones Lipschitz a las que podemos asociar medidas de probabilidad con soporte compacto. Al considerar los diagramas de Ferrer de particiones como gráficas de cajas inclinadas se obtiene un diagrama rectangular. A este tipo de diagramas les corresponderá mediante la asociación anterior, una medida finita. Posteriormente se contruye una cadena de Markov que toma valores en el conjunto de particiones, y cuyas probabilidades de transición dependen de las dimensiones de las representaciones irreducibles asociadas a éstas. El estudio de las medidas inducidas por esta cadena se realiza en el Capítulo 3, y es uno de los objetivos centrales de este trabajo.

El siguiente material es necesario para plantear el problema principal de esta tesis en el Capítulo 3 y se encuentra en un artículo de Kerov [12].

2.1. Diagramas, Medidas y Momentos

En esta sección presentamos las definiciones concernientes a diagramas, transformadas R , transformadas de Cauchy y medidas de transición. Éste último concepto es de suma importancia, pues es uno de los vínculos entre la probabilidad y las representaciones de grupos. Además, presentamos un diagrama fundamental, el diagrama del semicírculo. Finalmente revisamos un teorema que nos permite hablar de una única medida de transición para cada diagrama.

2.1.1. Definiciones

Definición 2.1.1 *Un **diagrama** es una función diferenciable por pedazos $\omega : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades*

i) $|\omega(u_1) - \omega(u_2)| \leq |u_1 - u_2|$.

ii) *Existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(u) = |u - z|$ para $|u|$ suficientemente grande.*

*Al elemento z del inciso anterior se le llama el **centro** del diagrama.*

Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ denotamos por $D[a, b]$ al espacio de diagramas tales que $\omega(u) = |u - z|$ para $u \notin [a, b]$, con la topología de convergencia uniforme.

Definición 2.1.2 *Un diagrama se llama **rectangular** si es lineal por pedazos y $\omega'(u) = \pm 1$ donde ω es diferenciable. Denotamos por $D_0[a, b] \subset D[a, b]$ al espacio de diagramas rectangulares.*

La Figura 1 ilustra el concepto de diagrama y diagrama rectangular en $D[a, b]$ con centro en z .

Observamos que un diagrama rectangular está completamente determinado por su conjunto de máximos (o mínimos) locales.

Definición 2.1.3 *Sea $\omega \in D[a, b]$. La **R-función** de ω , $R_\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$*

se define con la fórmula

$$R_\omega(u) = \frac{1}{u} \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u}.$$

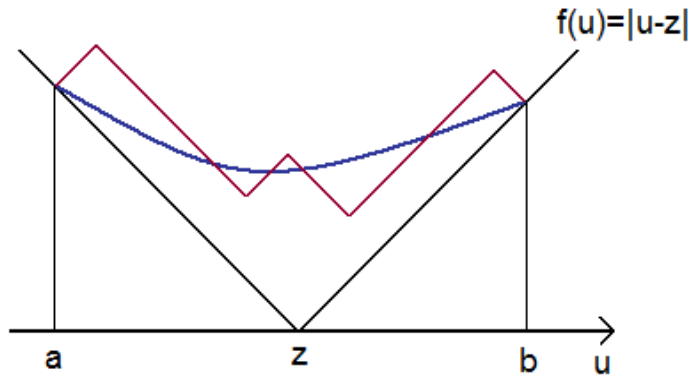


Figura 1. Diagrama y diagrama rectangular en $D[a, b]$

Observemos que R_ω es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Ejemplo 2.1.4 Consideremos el diagrama Ω , con

$$\Omega(u) = \begin{cases} (2/\pi)u \arcsin(u/2) + \sqrt{4 - u^2}, & \text{si } |u| \leq 2, \\ |u|, & \text{si } |u| \geq 2. \end{cases}$$

Entonces

$$R_\Omega(u) = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2}$$

para $u \geq 2$

Ejemplo 2.1.5 Sea $\omega \in D_0[a, b]$ con mínimos $\{x_k\}_{k=1}^n$ y máximos

$\{y_k\}_{k=1}^{n-1}$. Sea $P(u) = \prod_{k=1}^n (u - x_k)$, $Q(u) = \prod_{k=1}^{n-1} (u - y_k)$. Entonces

$$R_\omega(u) = \frac{Q(u)}{P(u)}$$

Definición 2.1.6 Sea $M = M[a, b]$ el espacio de medidas de probabilidad en el intervalo $[a, b]$ con la topología débil, y $M_o \subset M$ el subespacio (denso) de las medidas con soporte finito. La **transformada de Cauchy**, $G_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de una medida $\mu \in M[a, b]$ está dada por

$$G_\mu(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{u - t}.$$

Observemos que G_μ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Ejemplo 2.1.7 Sea $\mu \in M_0[a, b]$, con pesos $\mu_k \geq 0$ en los puntos x_k , es decir, $\mu = \sum_{k=1}^n \mu_k \delta_{\{x_k\}}$. Entonces

$$G_\mu(u) = \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{u - x_k}.$$

Definición 2.1.8 Sea $\omega \in D$ un diagrama, entonces $\mu \in M$ es la **medida de transición** de ω si

$$R_\omega(u) = G_\mu(u),$$

y escribimos $\mu = \mu^{(\omega)}$.

Esta medida de transición de los diagramas tiene una primera motivación, que puede observarse más adelante en la Proposición 2.2.5. Sin embargo, la verdadera importancia de estas transformadas es evidente hasta revisar el Capítulo 4. Ahí, la transformadas R y la transformada

de Cauchy son justamente el medio por el cual se vinculan los diagramas de Young y la teoría de representaciones con la probabilidad libre.

La medida del **semicírculo** se define como

$$\mu(du) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - u^2} \mathbf{1}_{|u| \leq 2} du.$$

Ésta es la medida de transición del diagrama Ω del Ejemplo 2.1.4, ya que para $u \geq 2$

$$G_\mu(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4 - t^2}}{u - t} dt = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2} = R_\Omega(u),$$

por esta razón en adelante nos referiremos a Ω como “**el diagrama del semicírculo**”.

Ahora consideremos dos diagramas muy sencillos.

Ejemplo 2.1.9 Para cualquier $L > 0$ sea α_L el siguiente diagrama:

$$\alpha_L(u) = \begin{cases} L, & \text{si } |u| \leq L, \\ |u|, & \text{si } |u| > L, \end{cases}$$

y sea β_L el diagrama rectangular que tiene mínimos únicamente en $\{-L, L\}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mu^{(\alpha_L)}(du) &= \frac{\mathbf{1}_{|u| \leq 1}}{\pi \sqrt{L - u^2}} du, \\ \mu^{(\beta_L)} &= \frac{1}{2} (\delta_{-L} + \delta_L). \end{aligned}$$

Observación 2.1.10 La medida de transición del diagrama del semicírculo es la distribución del semicírculo, que juega el papel de la Gaussiana en probabilidad libre. La medida Bernoulli simétrica $\mu^{(\beta_1)}$ juega el papel de la Gaussiana en la probabilidad booleana, mientras que la

medida $\mu^{(\alpha_1)}$, conocida como distribución arco-seno, juega el papel de la Gaussiana en la probabilidad monótona. Debido a que la medida de transición de un diagrama tiene soporte compacto, no habrá diagrama cuya medida de transición sea la Gaussiana clásica \mathcal{N} .

Recordemos que para $\mu \in M_0[a, b]$ el **n-ésimo momento** de μ , $m_n(\mu)$ está dado por

$$m_n(\mu) = \int_a^b t^n d\mu(t).$$

Por el problema de momentos de Haussdorff, sabemos que una medida finita $\mu \in M_0[a, b]$ está únicamente determinada por sus momentos $\{m_n\}_{n=0}^\infty$.

La **función generadora de momentos** de una medida μ , M_μ es

$$M_\mu(u) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(\mu) u^{-n}.$$

Es fácil ver que la función generadora de momentos de una medida y la transformada de Cauchy cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} M_\mu(u) &= uR_\mu(u), \\ M_\mu(u) &= \int_a^b \frac{d\mu(t)}{1 - \frac{t}{u}}. \end{aligned}$$

Definición 2.1.11 Sea $\omega \in D_0[a, b]$ el **n-ésimo momento** del diagrama ω , $p_n(\omega)$ es

$$p_n(\omega) = -\frac{n}{2} \int_a^b t^{n-1} d(\omega(t) - |t|).$$

La **función generadora de momentos** del diagrama ω en $D_0[a, b]$, S_ω es

$$S_\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(\omega)}{n} u^{-n}.$$

Proposición 2.1.12 *Para $|u|$ suficientemente grande, $S_\omega(u)$ converge y*

$$S_\omega(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u}.$$

2.1.2. Correspondencia entre Diagramas y Medidas

Los siguientes teoremas nos permiten asociar una única medida de transición a cada diagrama. Se demuestran usando funciones de Pick (i.e. funciones holomorfas de \mathbb{C}^+ a \mathbb{C}^- , como la inversa de la transformada de Cauchy) y la teoría de Nevalinna-Pick. Para un estudio detallado de este tema se sugieren los libros de Akhiezer [1], Donoghue [10] o Teschl [25]. Una revisión en español de estos temas se encuentra en la tesis de Vázquez [27].

Lema 2.1.13 *Para cada diagrama rectangular $\omega \in D_0[a, b]$ existe una única medida de transición $\mu = \mu^{(\omega)} \in M_0[a, b]$.*

Teorema 2.1.14 *Para cada diagrama $\omega \in D[a, b]$ existe una única medida de transición $\mu = \mu^{(\omega)}$, la cual tiene soporte en el intervalo $[a, b]$. La función $\omega \mapsto \mu^{(\omega)}$ es un homomorfismo de $D[a, b]$ en $M[a, b]$ que, en particular, hace corresponder a $D_0[a, b]$ con $M_0[a, b]$.*

2.2. La Medida de Plancherel

En esta sección observaremos cómo asociar diagramas a particiones, considerando el diagrama de Ferrer como una escalera de cajas inclinadas. Después definimos una cadena de Markov, que resulta de

considerar el proceso de ir agregando cajas de una por una, con probabilidades de transición que dependen de las dimensiones de las representaciones irreducibles asociadas. Esta cadena de Markov induce una medida en el conjunto de clases de conjugación de S_n y en el conjunto de clases de conjugación del grupo simétrico infinito G_∞ de permutaciones finitas de un conjunto contable. Éstas medidas inducidas corresponden con la medida de Plancherel, estudiada en [15].

2.2.1. Diagramas de Young

A una partición $\lambda \vdash n$ podemos asignarle su **diagrama de Young** $\omega_\lambda \in D_0$. Simplemente pensamos su diagrama de Ferrer con cajas en vez de puntos y lo rotamos. Más precisamente, asignamos a la partición $(\lambda_1, \dots, \lambda_l(\lambda)) = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \dots)$ el diagrama rectangular ω_λ con mínimos $\{x_1, \dots, x_k\}$ y máximos $\{y_1, \dots, y_{k-1}\}$ tales que se satisface:

- i) $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_{k-1} < x_k$ son enteros,
- ii) $z = \sum x_i - \sum y_i = 0$,
- iii) Si $\alpha_i = \sum_{j=i+1}^k (x_j - y_{j-1})$, entonces $m_{\alpha_i}(\lambda) = (y_i - x_i)$.

Denotamos por T y T_n al conjunto de diagramas asociados a particiones y a particiones de n , respectivamente.

Definición 2.2.1 Una **tabla de Young** es una sucesión $t = (\lambda_m)_{m=0}^n$ de diagramas de Young, tales que

- i) $\lambda_0 = (0)$, el diagrama 0
- ii) $\lambda_k \in \lambda_{k-1}^+$, en particular $\lambda_k \vdash k$.

Denotamos por $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_\infty$ al espacio de tablas de Young infinitas.

Análogamente definimos para toda $n \geq 0$ y $\lambda \vdash n$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_n & : = \{t = (\lambda_i)_{i=0}^n \mid \lambda_0 = (0), \lambda_k \in \lambda_{k-1}^+ \text{ para } 1 \leq k \leq n\}, \\ \mathfrak{Y}_\lambda & : = \{t = (\lambda_i)_{i=0}^n \mid \lambda_0 = (0), \lambda_n = \lambda, \lambda_k \in \lambda_{k-1}^+ \text{ para } 1 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Observemos que \mathfrak{Y} es un espacio totalmente desconexo.

Sea λ una partición y S^λ su respectivo módulo de Specht. Entonces $\dim \lambda$ es simplemente la dimensión de S^λ .

Recordemos que si $\lambda \vdash n$, $\dim \lambda$ puede calcularse con la **fórmula gancho** Teorema B.1.1:

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}}. \quad (2.1)$$

2.2.2. Crecimiento de Diagramas y la Medida de Plancherel

Consideremos la cadena de Markov $X = (X_n)_{n=0}^\infty$, donde X_n toma valores en el conjunto de clases de conjugación de S_k , $k \geq 1$ que es isomorfo a P , el conjunto de particiones, y al conjunto de diagramas de Young. Gracias a la correspondencia que existe entre ellos, pensaremos que la cadena toma valores indistintamente en cualquiera de los tres conjuntos anteriores. Para la lectura de esta sección, se sugiere revisar la Sección A,1,3 del Apéndice A, que incluye lo concerniente a cadenas de Markov.

Definición 2.2.2 *La medida de Plancherel en las clases de conjugación del grupo simétrico S_n es la medida de Markov en el conjunto de diagramas de n cajas T_n , denotada por*

$$\mu_n(A) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(X_n \in A), \quad A \subset T_n$$

inducida por la cadena de Markov $(X_n)_{n=0}^\infty$ que toma valores en el conjunto de diagramas de Young y que comienza en el diagrama sin cajas λ_0 , con las probabilidades de transición

$$p_{\lambda\Lambda} = \frac{\dim \Lambda}{(n+1) \dim \lambda}, \quad \lambda \vdash n, \Lambda \in \lambda^+.$$

Denotamos por $\tilde{\mu}_n$ a la medida inducida en el espacio \mathfrak{Y}_n

$$\tilde{\mu}_n(t = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \mathbb{P}_{\lambda_0}(X_k = \lambda_k, 0 \leq k \leq n).$$

Proposición 2.2.3 De acuerdo con la medida de Plancherel, para toda $t \in \mathfrak{Y}_n$ y para toda $\lambda \in T_n$, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(t) &= \frac{\dim \lambda}{n!}, \\ \mu_n(\lambda) &= \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demostración. Para la primera ecuación, por las probabilidades de transición

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(t) &= \mathbb{P}[(X_i)_{i=0}^n = (\lambda_i)_{i=0}^n] = \prod_{i=1}^n \frac{\dim \lambda_i}{i} \\ &= \frac{\dim \lambda_n}{n!} = \frac{\dim \lambda}{n!}. \end{aligned}$$

Entonces, para la segunda

$$\begin{aligned} \mu_n(\lambda) &= \mathbb{P}[X_n = \lambda] = \sum_{t \in \mathfrak{Y}_\lambda} \left(\frac{\dim \lambda}{n!} \right) \\ &= \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad resulta del hecho de que $\dim \lambda = f^\lambda$ es el número de λ -tablas estándar, que es lo mismo que el número de diagramas de Young finitos que terminan en λ . ■

La siguiente medida de probabilidad en \mathfrak{Y} es muy importante pues permite guardar toda la información de las medidas $\mu_n, n \geq 0$ y así enunciar resultados asintóticos sobre el crecimiento de diagramas de Young de acuerdo a la medida de Plancherel.

Definición 2.2.4 En \mathfrak{N} definimos la medida μ como el límite inductivo

$$\mu = \varinjlim \mu_N.$$

Es decir, si consideramos $A = (A_0 \times A_1 \times \dots) \subset (T_0 \times T_1 \times \dots)$, $A_n \subset T_n$ donde sólo una cantidad finita de contenciones son propias, entonces

$$\mu\{A\} = \mathbb{P}_{\lambda_0}[(X_n)_{n=0}^\infty \in (A_n)_{n=0}^\infty].$$

En particular, si $A = (T_0 \times T_1 \times \dots \times T_{n-1} \times \{\lambda\} \times T_{n+1} \times \dots)$,

$$\mu\{A\} = \mu_n(\lambda). \quad (2.3)$$

En ocasiones abusaremos en la notación y escribiremos, para cualquier $A \subset T_n$,

$$\mu(A) = \mu\{T_0 \times T_1 \times \dots \times T_{n-1} \times A \times T_{n+1} \times \dots\} = \mu_n(A), \quad (2.4)$$

en particular, para $\lambda \vdash n$,

$$\mu(\lambda) = \mu_n(\lambda).$$

Dada $\lambda \vdash n$, cuyo diagrama tiene mínimos en $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{R}$ y $\Lambda \in \lambda^+$, escribiremos p_k en vez de $p_{\lambda\Lambda}$ cuando Λ resulte de agregar una caja encima de x_k .

La siguiente proposición es una primera justificación de la definición de medida de transición. Sin embargo, es en el Capítulo 4 donde verdaderamente se aprecia la importancia de ésta definición, vinculando representaciones y diagramas con probabilidad libre.

Proposición 2.2.5 La distribución de transición del siguiente paso a partir de $X_n = \lambda$ es

$$\sum_{k=1}^s p_k \delta_{\Lambda_k},$$

es decir, $\mathbb{P}[X_{n+1} = \Lambda_k | X_n = \lambda] = p_k$ donde los pesos están dados por

$$p_k = \frac{\prod_{i=1}^{s-1} x_k - y_i}{s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} x_k - x_i}.$$

y por tanto coincide con la medida de transición en el sentido de la Definición 2.1.8.

Demostración. De la fórmula gancho 2.1:

$$p_k = p_{\lambda\Lambda} = \frac{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)}{\prod_{(i,j) \in \Lambda} h_{ij}(\Lambda)}.$$

Como solo cambian los h_{ij} para los (i, j) que se encuentren en la fila r o en la columna c donde se puso la nueva caja, y en éstos las longitudes gancho solo aumentan en 1 con la nueva caja, obtenemos

$$p_k = \prod_{i=1}^{c-1} \frac{h_{ri}(\lambda)}{h_{ri}(\lambda) + 1} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{h_{jc}(\lambda)}{h_{jc}(\lambda) + 1}.$$

Ahora, separamos el primer producto en bloques, donde cada bloque termina en cuanto se cambie a una columna con más cajas, de esta manera cada bloque se ve de la forma

$$\left(\frac{x_k - y_m}{x_k - y_m + 1} \right) \left(\frac{x_k - y_m + 1}{x_k - y_m + 2} \right) \cdots \left(\frac{x_k - x_m - 1}{x_k - x_m} \right) = \frac{x_k - y_m}{x_k - x_m}$$

Entonces

$$\prod_{i=1}^{c-1} \frac{h_{ri}(\lambda)}{h_{ri}(\lambda) + 1} = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{x_k - y_m}{x_k - x_m}$$

y análogamente

$$\prod_{j=1}^{r-1} \frac{h_{jc}(\lambda)}{h_{jc}(\lambda) + 1} = \prod_{m=k+1}^s \frac{x_k - y_m}{x_k - x_m},$$

de donde se sigue el resultado. ■

Capítulo 3

Forma Límite de los Diagramas de Young

En este capítulo se presenta de manera detallada la prueba del resultado pionero de la relación entre representaciones de grupos y probabilidad libre. Originalmente este problema fue resuelto por Kerov y Vershik [14] en 1977, utilizando un resultado de cálculo variacional de Logan y Shepp [17] del mismo año. Estos resultados involucran a la distribución semicircular, asociándola mediante la medida de transición al límite de una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición se definen a partir de las dimensiones de las representaciones irreducibles de los grupos simétricos.

3.1. El Problema de Kerov y Vershik

En esta sección plantearemos el problema central de la tesis. Éste consiste en demostrar dos teoremas que explican el comportamiento asintótico de la cadena de Markov que induce la medida de Plancherel que se presenta en la Sección 2.2.2.

Sea $\bar{\Omega}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega(\sqrt{2}u)$ la normalización del diagrama del semicir-

culo del Ejemplo 2.1.4, de tal manera que el área limitada por $|u|$ y $\overline{\Omega}(u)$ es 1. Es decir:

$$\overline{\Omega}(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (2 - u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2u}{\pi} \sin^{-1} \frac{u\sqrt{2}}{2}, & |u| \leq \sqrt{2}, \\ |u|, & |u| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Entonces se cumplen los siguientes resultados asintóticos concernientes al conjunto T_N de diagramas de N bloques y a la medida μ en T_N y \mathfrak{Y} que se presenta en (2.3) y (2.4).

Teorema 3.1.1 *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left\{ \lambda \in T_N : \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N \left(s\sqrt{N} \right) - \overline{\Omega}(s) \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Es decir, se tiene un resultado de ley débil de grandes números, pues las normalizaciones de los diagramas convergen débilmente al diagrama del semicírculo.

Utilizando el lema de Borel-Cantelli se logra un resultado de convergencia fuerte.

Teorema 3.1.2

$$\mu \left\{ t = (\lambda_N)_{N=0}^{\infty} \in \mathfrak{Y} : \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_s \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N \left(s\sqrt{N} \right) - \overline{\Omega}(s) \right| = 0 \right\} = 1.$$

Es decir, se obtiene una ley fuerte de grandes números, al tener convergencia casi segura. Finalmente, considerando medidas de transición se sigue el siguiente resultado que puede verse como un Teorema del Límite Central.

Corolario 3.1.3 *Sea μ_{λ_N} la medida de transición asociada al n -ésimo diagrama de Young de una tabla de Young infinita. Para casi todas (de acuerdo con la medida de Plancherel) las tablas de Young infinitas*

$x = (\lambda_N)_{N=0}^{\infty} \in \mathfrak{Y}$, el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{\lambda_N} \{\tau : \tau < u\sqrt{N}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^u \sqrt{4 - s^2} ds,$$

existe uniformemente para $|u| \leq 2$.

3.2. Tres Lemas Importantes

Sea i_N una transformación de contracción

$$i_N \Lambda(s) = \tilde{\Lambda}(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \Lambda(s\sqrt{N}).$$

Sea $\tilde{T}_N = \{\tilde{t} | t \in T_N\}$, $T = \bigcup \tilde{T}_N$. Entonces observemos que los elementos de T son diagramas según la Definición 2.1.1, que además cumplen que el área del diagrama que está por encima de la función $|x|$ es 1.

Para demostrar los teoremas de la sección anterior, el estudio del siguiente funcional es fundamental.

Definición 3.2.1 *Sea $L \in T$ definimos*

$$\theta(L) = 2 \iint_{t < s} \ln[2\sqrt{e}(s-t)](1-L'(s))(1+L'(t)) dt ds. \quad (3.1)$$

La idea principal es que el funcional decrece conforme se van agregando bloques en la cadena de Markov. Dado que en $\tilde{\Omega}$ el funcional se anula, los diagramas de la cadena irán acercándose al diagrama del semicírculo. Más precisamente, se cumplen los siguientes tres lemas, cuyas demostraciones presentamos más adelante. El primero da una cota exponencial para $\mu_N(\Lambda)$ en términos de θ usando la fórmula gancho (2.1), la fórmula de Stirling y algunos resultados del Apéndice B.

Lema 3.2.2

$$-\ln \mu(\Lambda) = N\theta(\tilde{\Lambda}) + \sqrt{N}\theta_1(\Lambda) - \frac{1}{2} \ln N + O(1), \quad 0 < \theta_1(\Lambda) < 1. \quad (3.2)$$

El segundo lema da un orden de convergencia y utiliza la fórmula de particiones de Hardy-Ramanujan. Al considerar diagramas de N cajas, el valor del funcional θ se acerca a 0 conforme N tiende a infinito.

Lema 3.2.3

$$\mu \left\{ \Lambda \in T_N : \theta(\tilde{\Lambda}) < \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon \right) N^{-\frac{1}{2}} \right\} = 1 - o\left(e^{-\varepsilon\sqrt{N}}\right).$$

El tercer lema establece que el único diagrama donde θ se anula es el diagrama del semicírculo y que el funcional θ define una norma en diagramas que es más fuerte que la norma del supremo. En su demostración se utilizan resultados sobre transformadas de Fourier y de Hilbert, la desigualdad de Hölder y resultados en cálculo variacional.

Lema 3.2.4 $\bar{\Omega} \in T$ es la única solución de la ecuación $\theta(L) = 0$, $L \in T$. Además, existe una constante $K > 0$ tal que

$$\theta(L) - \theta(\bar{\Omega}) \geq K (\sup |L(t) - \bar{\Omega}(t)|)^9.$$

Demostración del Lema 3.2.2. Sea $\Lambda \in T_N$. Sea $h_{x,y}$ la longitud gancho de la caja donde se encuentra el punto (x, y) respecto al diagrama Λ y sea $h(x, y)$ la longitud gancho del punto (x, y) con respecto al diagrama Λ . Por las Proposiciones B.2.5 y B.2.6

$$\theta(\tilde{\Lambda}) = 1 + 2 \iint_{\tilde{\Lambda}} \ln \left[\frac{h_{x,y} \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right)}{\sqrt{N}} \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln [h_{x,y}] \, dx dy + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln \left[1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right] \, dx dy \\
&\quad - \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln (\sqrt{N}) \, dx dy \\
&= 1 + \frac{2}{N} \left(\sum_{(i,j) \in \Lambda} (\ln [h_{x,y}]) - \theta_1(\Lambda) \sqrt{N} - N \ln(\sqrt{N}) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{N} \left(\ln \left[\prod_{(i,j) \in \Lambda} h(i,j) \right] - \theta_1(\Lambda) \sqrt{N} - N \ln(\sqrt{N}) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{N} \left(\ln \left(\frac{N!}{\dim \Lambda} \right) - \theta_1(\Lambda) \sqrt{N} - N \ln(\sqrt{N}) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{N} \left(\ln(N!) - \ln(\dim \Lambda) - \theta_1(\Lambda) \sqrt{N} \right) - \ln(\sqrt{N}).
\end{aligned}$$

Ahora, de la ecuación (2.2) obtenemos que

$$-\ln \mu(\Lambda) = -\ln \left(\frac{\dim^2 \Lambda}{N!} \right) = \ln(N!) - 2 \ln(\dim \Lambda).$$

Substituyendo estos dos resultados en la ecuación (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
&-\ln \mu_N(\bar{\Lambda}) - N\theta(\tilde{\Lambda}) - \sqrt{N}\theta_1(\Lambda) + \frac{1}{2} \ln N \\
&= \ln(N!) - 2 \ln(\dim \Lambda) - N - 2 \ln(N!) + 2 \ln(\dim \Lambda) \\
&\quad + \sqrt{N}\theta_1(\Lambda) + N \ln(N) - \sqrt{N}\theta_1(\Lambda) + \frac{1}{2} \ln N \\
&= -N - \ln(N!) + \left(N + \frac{1}{2} \right) \ln N \\
&= -N - \left(N + \frac{1}{2} \right) \ln N + N - \frac{1}{2} \ln 2\pi - O\left(\frac{1}{N}\right) + \left(N + \frac{1}{2} \right) \ln N
\end{aligned}$$

$$= - \left(+\frac{1}{2} \ln(2\pi) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) = O(1).$$

Donde la cuarta aproximación se debe a la fórmula de Stirling (Teorema B.2.8) para $\ln n!$, quedando demostrado el lema. ■

Demostración del Lema 3.2.3. Sea $A \subset T_N$,

$$A := \left\{ \Lambda \in T_N : \theta(\tilde{\Lambda}) \geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon \right) N^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Entonces, por el Lema 3.2.2

$$\Lambda \in A$$

$$\Leftrightarrow \theta(\tilde{\Lambda}) \geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon \right) N^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow -\ln \mu(\Lambda) - \sqrt{N} \theta_1(\Lambda) + \frac{1}{2} \ln N - O(1) \geq \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon \right) N^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{\mu(\Lambda)} \geq -\frac{1}{2} \ln N + O(1) + \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon + \theta_1(\Lambda) \right) N^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu(\Lambda)} \geq \exp \left(-\frac{1}{2} \ln N + O(1) + \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon + \theta_1(\Lambda) \right) N^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \mu(\Lambda) \leq \exp \left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon + \theta_1(\Lambda) \right) N^{\frac{1}{2}} \right)$$

Entonces por la **Fórmula de Particiones de Hardy-Ramanujan** (Teorema B.2.9):

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \Lambda \in T_N : \theta(\tilde{\Lambda}) < \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon \right) N^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= 1 - \sum_{\Lambda \in A} \mu(\Lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 1 - \sum_{\Lambda \in T_N} \exp\left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon + 1\right) N^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\approx 1 - \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{N}}{\sqrt{6}}\right)}{4N\sqrt{3}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon + 1\right) N^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 - \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - (\varepsilon + 1) N^{\frac{1}{2}}\right)}{4N\sqrt{3}} \\
&= 1 - o\left(e^{-\varepsilon\sqrt{N}}\right),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la Proposición B.2.7. ■

Antes de pasar al tercer lema, es conveniente replantearlo en términos de otro funcional I , que se evalúa en funciones g que cumplen ciertas características específicas. Una vez hecho esto, se puede usar un resultado de Logan y Shepp [17] en cálculo de variaciones. Observemos que

$$\begin{aligned}
\theta(L) &= 2 \iint_{t < s} \ln[2\sqrt{e}(s-t)](1-L'(s))(1+L'(t)) dt ds \\
&= 1 + 2 \iint_{t < s} \ln[2(s-t)](1-L'(s))(1+L'(t)) dt ds \\
&: = 1 + 2\theta_1(L).
\end{aligned}$$

Entonces, minimizar θ es lo mismo que minimizar el funcional θ_1 . Consideremos el cambio de variable (rotatorio):

$$\begin{aligned}
x &= (L(t) + t)\sqrt{2}, \\
y &= (L(s) - s)\sqrt{2},
\end{aligned}$$

que manda al diagrama $L(t)$ a una función positiva y monótona de-

creciente

$$f(x) = \frac{(L(t) - t)}{\sqrt{2}}, \quad x \geq 0,$$

tal que

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1.$$

Llamemos \mathcal{F} a la clase de tales funciones. Entonces minimizar $\theta_1(L)$, $L \in T$, es lo mismo que minimizar

$$\begin{aligned} & \iint_{t < s} \ln[2(s-t)](1-L'(s))(1+L'(t))dtds \\ &= \iint_R \ln[h(x,y)]dxdy \\ &= \iint_R \ln[d_1(x,y) + d_2(x,y)]dxdy \\ &= \iint_R \ln[f(x) - y + f^{-1}(y) - x]dxdy := H(f), \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{F}$.

Supongamos que $f(0) = a < \infty$, $f^{-1}(0) = b < \infty$, y que f es absolutamente continua. Entonces escribiendo $y = f(t)$ y usando el cambio de variables:

$$x - f(x) = \xi, \quad x = h(\xi), \quad t - f(t) = \eta, \quad t = h(\eta),$$

se obtiene

$$H(f) = - \int_0^b f'(t)dt \int_0^t \ln(f(x) - f(t) + t - x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-a}^b (1 - h'(\eta)) d\eta \int_{-a}^{\eta} \ln(\eta - \xi) h'(\xi) d\xi \\
&= \int_{-a}^b d\eta \int_0^t \ln(\eta - \xi) h'(\xi) d\xi \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-a}^b h'(\eta) d\eta \int_{-a}^b h'(\xi) \ln |\eta - \xi| d\xi.
\end{aligned}$$

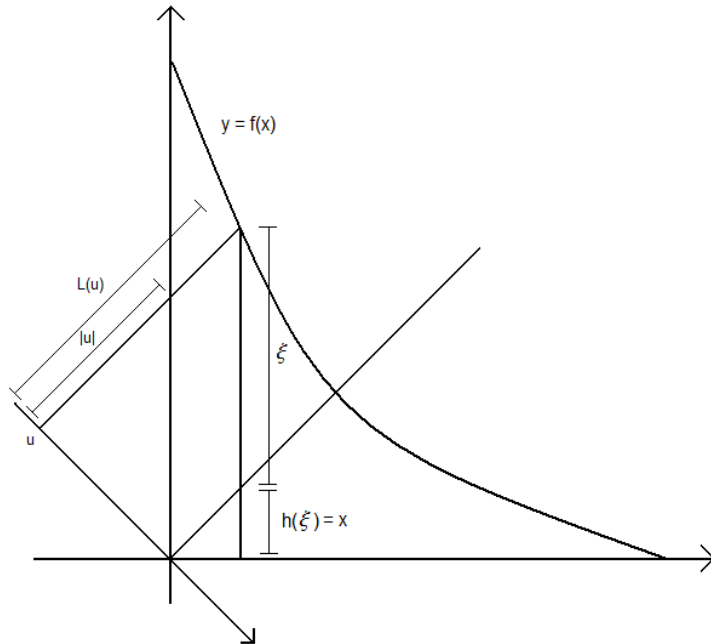


Figura 2. Cambios de Variables

La transformación

$$g(\xi) = \begin{cases} h(\xi), & \xi < 0, \\ h(\xi) - \xi, & \xi \geq 0, \end{cases}$$

ayuda a simplificar. Puede observarse que hay una correspondencia biyectiva entre $f \in \mathcal{F}$ y la g correspondiente:

$$\begin{aligned}x &= g(\xi) + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}|\xi|, \\f(x) &= g(\xi) - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}|\xi|,\end{aligned}$$

La función g es absolutamente continua cuando f lo es, y tiene las siguientes propiedades

$$0 \leq g'(\xi) \leq 1, \quad \text{si } \xi < 0, \quad (3.3)$$

$$-1 \leq g'(\xi) \leq 0, \quad \text{si } \xi > 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)d\xi = \int_0^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (3.5)$$

Entonces podemos escribir

$$H(f) = I(g) := Q(g) + L(g), \quad (3.6)$$

en donde, dado que g se anula fuera de $(-a, b)$,

$$Q(g) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)dt \ln |x - t| \quad (3.7)$$

es un funcional cuadrático de g' y

$$L(g) = - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)(x \ln |x| - x)dx \quad (3.8)$$

es un funcional lineal. Por la correspondencia descrita arriba, nos concentraremos en minimizar $I(g) = Q(g) + L(g)$, sobre la clase \mathcal{G} de funciones g que cumplen (3.3), (3.4) y (3.5). Esto implicará minimizar

$H(f)$, $f \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $\theta(L)$, $L \in T$. Finalmente puede recuperarse L de g usando que

$$L(u) = |u| + \sqrt{2}g\left(\sqrt{2}\right). \quad (3.9)$$

Esta relación se observa fácilmente en la figura 2.

El siguiente problema fue resuelto por Logan y Shepp en [17], y utiliza relaciones entre las transformadas de Hilbert y de Fourier y la identidad de Parseval, entre otras.

Proposición 3.2.5 *El mínimo valor de $I(g)$, $g \in \mathcal{G}$, es $-1/2$, y la única solución de $I(g) = -1/2$, $g \in G$ es*

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{2} - \frac{|x|}{2}, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Demostración. Expresamos $I(g)$ en términos de la transformada de Fourier \widehat{g} y la transformada de Hilbert \widetilde{g} de g . Es decir,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= \int g(t)e^{-ixt} dt. \\ \widetilde{g}(x) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{g(t)}{x-t} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes, usando que g es unimodal e integrable, se obtiene

$$\widetilde{g}(x) = \frac{1}{\pi} \int g'(t) \ln|x-t| dt,$$

y usando (3.7),

$$Q(g) = -\frac{\pi}{2} \int g'(x) \widetilde{g}(x) dx. \quad (3.10)$$

Dado que la transformada de Fourier de \widetilde{g} es $i(\operatorname{sgn} \omega) \widehat{g}(\omega)$ y la de g'

es $i\omega\widehat{g}(\omega)$ se obtiene usando la identidad de Parseval que

$$Q(g) = \frac{1}{4} \int |\widehat{g}(\omega)|^2 |\omega| d\omega, \quad (3.11)$$

por lo que Q es una forma cuadrática positiva definida. Si se integra por partes (3.8), usando (3.6), se obtiene

$$I(g) = \int g(x) \ln |x| dx + \frac{1}{4} \int |\widehat{g}(\omega)|^2 |\omega| d\omega.$$

Ahora, para encontrar el mínimo de I , introducimos una función de comparación $g_0 \in \mathcal{G}$ y escribimos usando (3.10), para cualquier $g \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} Q(g - g_0) &= -\frac{\pi}{2} \int (g'(x) - g_0'(x))(\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}_0(x)) dx \\ &= Q(g) - Q(g_0) + \pi \int g'(x) \widetilde{g}_0(x) dx. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I(g) = Q(g) + L(g) = Q(g - g_0) - Q(g_0) - R(g, g_0)$$

donde

$$R(g, g_0) = \int g'(x)(x \ln |x| - x + \pi \widetilde{g}_0(x)) dx. \quad (3.12)$$

Más adelante exhibiremos una función $g_0 \in \mathcal{G}$ para la cual

$$p(x) \quad : \quad = x \ln |x| - x + \pi \widetilde{g}_0(x) \quad \begin{cases} = 0, & \text{para } |x| \leq 2, \\ > 0, & \text{para } x > 2, \\ < 0, & \text{para } x < -2, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$g_0(x) = 0 \quad \text{para } |x| > 2. \quad (3.14)$$

Suponiendo que (3.13) y (3.14) se cumplen para alguna $g_0 \in \mathcal{G}$, observamos que el integrando en (3.12) es idénticamente cero en x cuando

$g = g_0$. Entonces

$$I(g_0) = Q(0) - Q(g_0) - R(g_0, g_0) = -Q(g_0).$$

Luego, como $g \in \mathcal{G}$ satisface (3.3),(3.4) y (3.5), el integrando de (3.12) es no positivo por (3.13). Entonces $R(g, g_0) \leq 0$ y para cada $g \in \mathcal{G}$

$$I(g) \geq I(g_0) + Q(g - g_0).$$

Como $Q(g - g_0) \geq 0$ y $Q(g - g_0) = 0$ solo cuando $g - g_0 = 0$, por (3.11), se sigue la unicidad del g_0 que minimiza $I(g)$ (y su correspondiente f_0 que minimiza H).

Solo resta encontrar $g_0 \in \mathcal{G}$ con las propiedades (3.13) y (3.14).

Considérese la función

$$\begin{aligned} G_0(z) = & \frac{2}{\pi} \left(\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{iz}{2} \right) - \frac{iz}{\pi} \ln \left(\frac{z}{i} \right) \\ & - \frac{iz}{\pi} \ln \left(\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{iz}{2} \right), \end{aligned}$$

que es analítica en el semiplano superior \mathbb{C}^+ . Usando la rama principal del logaritmo, y geometría compleja muy sencilla, se observa que en el eje real $z = x$,

$$\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, & |x| \leq 2 \\ -i \operatorname{sgn} x \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, & |x| > 2 \end{cases}.$$

Entonces, en el eje real

$$\ln \left(\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{iz}{2} \right) = \begin{cases} i \sin^{-1} \frac{x}{2}, & |x| \leq 2 \\ \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn} x + \ln \left(\frac{|x|}{2} - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right), & |x| > 2 \end{cases}.$$

Por lo que se verifica que en el eje real

$$G_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{ix}{2} \right) - \frac{|x|}{2} \\ \quad - \frac{ix}{\pi} \ln |x| + \frac{x}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{2}, & |x| \leq 2, \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{ix}{2} - i(\operatorname{sgn} x) \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \quad - \frac{ix}{\pi} \ln |x| - \frac{ix}{\pi} \ln \left(\frac{|x|}{2} - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right), & |x| > 2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Se verifica, a partir de (3.15), que $G_0(z) = O(1/|z|)$ cuando $|z| \rightarrow \infty$ en $\operatorname{Im} z \geq 0$. Entonces, utilizando el Teorema B.2.10, las partes real e imaginaria de G_0 son transformadas de Hilbert conjugadas. Es decir

$$g_0(x) = \operatorname{Re} G_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{2} - \frac{|x|}{2}, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \quad (3.16)$$

tiene transformada de Hilbert

$$\tilde{g}_0(x) = \operatorname{Im} G_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} - \frac{x}{\pi} \ln |x|, & |x| \leq 2, \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2} - (\operatorname{sgn} x) \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \quad - \frac{x}{\pi} \ln |x| - \frac{ix}{\pi} \ln \left(\frac{|x|}{2} - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right), & |x| > 2. \end{cases} \quad (3.17)$$

De (3.15) y (3.17) se verifica fácil que g_0 satisface (3.13) y que en (3.14),

$$p(x) = x \left[\ln \left(\frac{|x|}{2} + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{2}{|x|} \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad |x| > 2.$$

Es fácil ver que $p(x)/x$ tiene derivada positiva para $|x| \geq 2$ y como se

anula para $x = 2$, (3.14) se sigue. Falta probar que $g_0 \in \mathcal{G}$. Como

$$g_0'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{2} - \operatorname{sgn} x \right), \quad |x| \leq 2,$$

verificamos directamente (3.3) y (3.4) y para (3.5)

$$- \int x g_0'(x) = \int g_0(x) dx = 1.$$

Para esta g_0 se cumple que $I(g_0) = -\frac{1}{2}$, y es el mínimo para $g \in \mathcal{G}$. ■

Con las consideraciones anteriores podemos demostrar el último lema.

Demostración del Lema 3.2.4. Recuperamos $L_0 \in T$ a partir de g_0 usando (3.9). La L_0 que le corresponde a g_0 está dada por

$$\begin{aligned} L_0(u) &= |u| + \sqrt{2}g_0(u\sqrt{2}) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}(2-u^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2u}{\pi} \sin^{-1} \frac{u\sqrt{2}}{2}, & |u| \leq \sqrt{2}, \\ |u|, & |u| > \sqrt{2} \end{cases} \\ &= \bar{\Omega}(u). \end{aligned}$$

Como

$$\theta(L) = 1 + 2\theta_1(L) = 1 + I(g),$$

la única solución de $\theta(L) = 0$, $L \in T$ es $L_0 = \bar{\Omega}$. Con esto queda demostrada la primera parte del Lema.

Para la segunda, sea $j(\omega) = \frac{1}{2}(g - g_0)$. De (3.11), si $S = \operatorname{Sop}(j)$, y sabiendo que $j \in \operatorname{Lip}(1)$ obtiene que

$$\left| \widehat{j}(t) \right| = \left| \int j(x) e^{itx} dx \right| = \int |j(x)| |e^{itx}| dx = \int |j(x)| dx \leq 1,$$

$$|\theta(\Lambda) - \theta(\Omega)| \geq \sqrt{2}Q(2j) = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_S \left| 2 \left(\widehat{j}(\omega) \right) \right|^2 |\omega| d\omega$$

$$= \sqrt{2} \int_S \left| \widehat{j}(\omega) \right|^2 |\omega| \, d\omega.$$

Usando la desigualdad de Hölder, con $f_1(\omega) = \left| \widehat{j}(\omega) \right|^{2/3} |\omega|^{1/3}$, $f_2(\omega) = \left| \widehat{j}(\omega) \right|^{4/3} |\omega|^{-1/3}$, $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_S \left| \widehat{j}(\omega) \right|^2 \, d\omega &\leq \left(\int_S (f_1(\omega))^p \, d\omega \right)^{1/p} \left(\int_S (f_2(\omega))^q \, d\omega \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_S \left| \widehat{j}(\omega) \right|^2 |\omega| \, d\omega \right)^{1/3} \left(\int_S \frac{\left| \widehat{j}(\omega) \right|^2}{|\omega|^{1/2}} \, d\omega \right)^{2/3}, \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} &\left(\int_S \frac{\left| \widehat{j}(\omega) \right|^2}{|\omega|^{1/2}} \, d\omega \right)^{2/3} \\ &= \left(\int_{-2}^2 \frac{\left| \widehat{j}(\omega) \right|^2}{|\omega|^{1/2}} \, d\omega + \int_{S \setminus (-2,2)} \frac{\left| \widehat{j}(\omega) \right|^2}{|\omega|^{1/2}} \, d\omega \right)^{2/3} \\ &\leq \left(\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{|\omega|^{1/2}} \right)^{3/2} \, d\omega + \int_{S \setminus (-2,2)} \left(\frac{\left| \widehat{j}(\omega) \right|}{1} \right)^{3/2} \, d\omega \right)^{2/3} \\ &\leq (K_1 + 1)^{2/3} = \frac{1}{K_2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} |\theta(\Lambda) - \theta(\Omega)|^{1/3} &\geq Q(j)^{1/3} \\ &= \left(\int_S \left| \widehat{j}(\omega) \right|^2 |\omega| \right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \frac{\int_S |\widehat{j}(\omega)|^2 d\omega}{\left(\int_S \left(\frac{|\widehat{j}(\omega)|}{|\omega|^{1/2}}\right)^{3/2} d\omega\right)^{2/3}} \geq K_2 \int_S |j(\omega)|^2 d\omega \\
 &\geq \frac{2}{3} K_2 \left(\sup_s |j(s)|\right)^3 = K_3 \left(\sup_s |(g(s) - g_0(s))|\right)^3 \\
 &= K_4 \left(\sup_t |(\Lambda(t) - \Omega(t))|\right)^3.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una constante $K > 0$ tal que

$$|\theta(\Lambda) - \theta(\Omega)| \geq K \left(\sup_t |(\Lambda(t) - \Omega(t))|\right)^9,$$

con lo que queda demostrado el lema. ■

3.3. Demostraciones de los Resultados Principales

Finalmente tenemos las herramientas necesarias para demostrar los teoremas centrales de este trabajo.

Demostración del Teorema 3.1.1. Sea $\varepsilon > 0$. Considérense $\varepsilon_1 > 0, N_\varepsilon \geq \left(\frac{(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon_1)}{K\varepsilon^9}\right)^2$. De los Lemas 3.2.3 y 3.2.4, para $N > N_\varepsilon$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 1 - o\left(e^{-\varepsilon_1\sqrt{N}}\right) &= \mu \left\{ \Lambda \in T_N : \theta(\tilde{\Lambda}) < \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon_1\right) N^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
 &\leq \mu \left\{ \Lambda \in T_N : \left| \theta(\tilde{\Lambda}) - \theta(\Omega) \right| < \left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \varepsilon_1\right) N_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
 &= \mu \left\{ \Lambda \in T_N : \left| \theta(\tilde{\Lambda}) - \theta(\Omega) \right| < K\varepsilon^9 \right\} \\
 &\leq \mu \left\{ \Lambda \in T_N : \sup |\Lambda(t) - \Omega(t)| < \varepsilon \right\}.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu \{ \Lambda \in T_N : \sup |\Lambda(t) - \Omega(t)| < \varepsilon \} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - o \left(e^{-\varepsilon \sqrt{N}} \right) = 1,$$

como se deseaba. ■

Demostración del Teorema 3.1.2. Sea $x = (\lambda_N)_{N=0}^{\infty} \in \mathfrak{Y}$ y se $\varepsilon > 0$. Para $N \in \mathbb{N}$ definimos el evento

$$A_N = \left\{ \sup_s \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N \left(s \sqrt{N} \right) - \bar{\Omega}(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Del Teorema 3.1.1 y el Lema 3.2.3 sabemos que existe un $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\mu(A_N) = o \left(e^{-\varepsilon_1 \sqrt{N}} \right).$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) e^{\varepsilon_1 \sqrt{N}} = 0,$$

en particular, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N > N_0$,

$$\mu(A_N) e^{\varepsilon_1 \sqrt{N}} < 1.$$

Sea

$$b_N = \begin{cases} \mu(A_N) e^{\varepsilon_1 \sqrt{N}}, & \text{si } N \leq N_0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Así, para todo $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\varepsilon_1 \sqrt{n}}} &< \infty, \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_N}{e^{\varepsilon_1 \sqrt{N}}} &< \infty, \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_N) &< \infty. \end{aligned}$$

Entonces por el Lema de Borel-Cantelli, si

$$B := \limsup_{N \rightarrow \infty} A_N = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m=N}^{\infty} A_m$$

es el evento que ocurre si y solo si una infinidad de A_N ocurren,

$$\mu(B) = 0$$

Por lo tanto

$$\mu \left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_s \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N \left(s\sqrt{N} \right) - \bar{\Omega}(s) \right| \right) > \varepsilon_1 \right) = 0$$

y

$$\mu \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_s \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N \left(s\sqrt{N} \right) - \bar{\Omega}(s) \right| = 0 \right) \right) = 1,$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

El Corolario 3.1.3. se sigue del Teorema 3.1.2, tomando en cuenta el Teorema 2.1.14 y la Proposición 2.2.5.

Capítulo 4

Probabilidad Libre y Representaciones

Además de la mostrada en el capítulo anterior, existen más relaciones entre probabilidad libre y representaciones de grupos. El propósito de este capítulo es exponer las que aparecen en el artículo de Biane, en donde se tiene que varias operaciones entre representaciones pueden estudiarse a través de operaciones en probabilidad libre de sus medidas de transición. Así, se vuelve evidente la importancia de asociar, vía la transformada R y la transformada de Cauchy, una medida de probabilidad a cada diagrama y por lo tanto, a cada representación irreducible de S_N .

En la Sección 4.1 se introducen los conceptos de probabilidad libre que serán necesarios para comprender los resultados expuestos en la siguiente sección. En la Sección 4.2 se explican los teoremas demostrados por Biane, y se presentan algunos ejemplos de la utilización de éstos. En la última sección se presentan varios elementos e ideas claves de la demostración de los teoremas.

4.1. Probabilidad Libre

La noción de **relación libre (freeness)** entre dos variables aleatorias fue introducida en 1985 por Voiculescu [28], quién observó que la relación libre se comporta de forma análoga al concepto clásico de independencia, pero en espacios de probabilidad no-conmutativos.

Los principales resultados de esta teoría y su paralelismo con la probabilidad clásica, se presentan en la segunda sección del Apéndice A. Para una exposición más detallada, se sugiere la lectura de la tesis de licenciatura de Octavio Arizmendi [2].

4.1.1. Independencia Libre

En el contexto de $*$ -espacios de probabilidad (\mathcal{A}, τ) se define la **independencia libre** o **relación libre** según (A.2.6), y del Teorema A.2.7 puede verse de una manera más familiar. Para esto, recordemos la fórmula análoga para el caso de independencia clásica que nos dice que las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_k son independientes si y solo si, para todo $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathbb{E}(X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}) = \mathbb{E}(X_1^{n_1}) \mathbb{E}(X_2^{n_2}) \dots \mathbb{E}(X_k^{n_k}).$$

El análogo del operador \mathbb{E} es la funcional lineal τ ya que no tenemos variables aleatorias clásicas, sino variables aleatorias no-conmutativas, es decir, elementos de (\mathcal{A}, τ) . Entonces, gracias al Teorema A.2.7, puede redefinirse la independencia libre de la siguiente manera.

Las variables aleatorias no-conmutativas $a, b \in \mathcal{A}$ se dicen en **relación libre (con respecto a τ)** si

$$\tau[p_1(a)q_1(b)p_2(a)q_2(b) \dots p_n(a)q_n(b)] = 0$$

siempre que p_i y q_j sean polinomios tales que

$$\tau[p_i(a)] = 0 = \tau[q_j(b)].$$

Una familia de subálgebras A_i , $\mathbf{1}_A \in A_i$, $i \in I$ en un espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, τ) se dice que es libre si $\tau(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$ siempre que $\tau(a_j) = 0$, $a_j \in A_{i(j)}$, y $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(n)$. Más generalmente, una familia de subconjuntos $\Omega_i \subset A$, $i \in I$ es libre si las álgebras generadas por $\Omega_i \cup \{\mathbf{1}\}$ son libres.

Al igual que para el caso de variables aleatorias clásicas, esta relación de independencia puede entenderse como una regla para calcular los momentos mixtos de a y de b , permitiéndonos calcular los momentos de $a + b$ y de ab . Así, si $\{a, b\}$ es un par libre de variables aleatorias, entonces la $*$ -distribución μ_{a+b} de $a + b$ depende solo de la $*$ -distribución μ_a de a y de la $*$ -distribución μ_b de b .

4.1.2. Convolución Libre Aditiva

Si μ_a y μ_b son medidas con soporte compacto en \mathbb{C} , podemos definir la operación \boxplus de convolución libre aditiva a través de la fórmula

$$\mu_a \boxplus \mu_b = \mu_{a+b}.$$

Si μ y ν son medidas en \mathbb{R} con soporte compacto, se pueden encontrar a y b variables aleatorias no-conmutativas autoadjuntas en un C^* -espacio de probabilidad tales que a tenga $*$ -distribución μ y b tenga $*$ -distribución ν . Si pedimos que a y b estén en relación libre, entonces la $*$ -distribución de $a + b$ se llama la convolución libre de μ y ν , la cual se denota por $\mu \boxplus \nu$. Por ejemplo, se pueden tomar a y b como operadores de multiplicación con la función identidad en los espacios de Hilbert $L^2(\mu)$ y $L^2(\nu)$, respectivamente, y después tomar el producto libre de estos C^* -espacios de probabilidad para hacer que a y b estén en relación libre (ver por ejemplo, el libro de Nica y Speicher

[20, Ejemplo 3.10]).

El hecho de que $\mu \boxplus \nu$ no dependa de la elección de a y b se sigue de que la $*$ -distribución de $a + b$ solo depende de los momentos de a y b los cuales están determinados por μ y ν . Este hecho permite que se trabaje con medidas en abstracto y sus respectivas convoluciones libres aditivas, sin prestar atención al espacio de probabilidad no conmutativo, y a los elementos autoadjuntos con dichas $*$ -distribuciones.

Ejemplo 4.1.1 *Si consideramos las medidas de transición de los diagramas del Ejemplo 2.1.9, la distribución arcoseno en $[-2L, 2L]$ resulta de la convolución libre aditiva de la distribución Bernoulli simétrica concentrada en $\{-L, L\}$ consigo misma, es decir,*

$$\mu^{(\beta_L)} \boxplus \mu^{(\beta_L)} = \frac{1}{2} (\delta_{-L} + \delta_L) \boxplus \frac{1}{2} (\delta_{-L} + \delta_L) = \mu^{(\alpha_{2L})},$$

donde

$$\mu^{(\alpha_{2L})}(du) = \frac{\mathbf{1}_{|u| \leq 2L}}{\pi \sqrt{4L^2 - u^2}} du.$$

Existen dos enfoques para entender la convolución aditiva, el primero es analítico, y se basa en la transformada cumulante libre, que hace las veces del logaritmo de la transformada de Fourier en probabilidad clásica, pues linealiza la convolución.

Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R} . La **Transformada de Cauchy** G_μ y la **Transformada de Cauchy Recíproca** F_μ se definen como sigue:

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \frac{1}{F_\mu(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Obsérvese que si la medida tiene soporte compacto, entonces G_μ corresponde a la transformada de Cauchy en el sentido de la Definición 2.1.6. La Transformada de Cauchy caracteriza a una medida, la cual

puede recuperarse mediante la fórmula de inversión

$$d\mu(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(G_\mu(t + i\varepsilon)), t \in \mathbb{R}.$$

Existe un dominio Γ (ver Arizmendi [2] o Bercovici y Voiculescu [4]) en donde la inversa derecha F_μ^{-1} de existe. Así, se define la **Transformada de Voiculescu**.

$$\phi_\mu(z) = F_\mu^{-1}(z) - z, \quad z \in \Gamma.$$

Finalmente, se define la **Transformada Cumulante Libre**

$$\mathcal{C}_\mu(z) = z\phi_\mu\left(\frac{1}{z}\right), \quad z^{-1} \in \Gamma.$$

Proposición 4.1.2 *La transformada de Voiculescu y la transformada cumulante libre linealizan la convolución libre, es decir, si a y b son variables aleatorias en relación libre, con $*$ -distribuciones μ_a y μ_b , respectivamente, entonces*

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_a \boxplus \mu_b} &= \phi_{\mu_a} + \phi_{\mu_b} \\ \mathcal{C}_{\mu_a \boxplus \mu_b} &= \mathcal{C}_{\mu_a} + \mathcal{C}_{\mu_b}, \end{aligned}$$

en los dominios en donde las transformadas están definidas.

Observemos que estas últimas transformadas dependen de la transformada de Cauchy, que junto con la transformada R , permitía asociar medidas a representaciones.

4.1.3. Cumulantes Libres

En probabilidad clásica, los momentos y los cumulantes cumplen relaciones muy útiles e interesantes, que tienen que ver con resultados combinatorios en las láttices de particiones. En probabilidad libre también existen relaciones similares, pero basadas en las láttices de particiones que no se cruzan. Estas relaciones se aplican al usar el método de momentos y forman parte central de la demostración de los teoremas de la siguiente sección. Pueden consultarse en [2] y [20].

Definición 4.1.3 *Sea μ una medida en \mathbb{R} con todos sus momentos. Los **cumulantes libres** $\{\kappa_n^\mu\}_n$ de μ son los coeficientes de su función cumulante libre.*

$$C_\mu(z) = z\phi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n z^n, \quad z^{-1} \in \Gamma.$$

Entonces, la convolución libre también es linealizada por los cumulantes libres, de la siguiente manera.

Proposición 4.1.4 *Si μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad en \mathbb{R} , entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\kappa_n^{\mu_1} + \kappa_n^{\mu_2} = \kappa_n^{\mu_1 \boxplus \mu_2}.$$

Denotamos por $\mathcal{P}(n)$ al conjunto de particiones¹ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en bloques ajenos y por $\mathcal{NC}(n)$ al conjunto de particiones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en bloques ajenos que no se cruzan (i.e. si $P = (V_m)_{m=1}^k \in \mathcal{P}(n)$ y existen $a < b < c < d$ tales que $a, c \in V_i, b, d \in V_j, i \neq j$, entonces P se cruza).

¹No confundirse con las particiones $\lambda \vdash n$, como sumas de enteros positivos en orden decreciente.

Usando que $\mathcal{P}(n)$ y $\mathcal{NC}(n)$ son látices, y aplicando teoría de inversi3n de M3obius en látices, se encuentran las siguientes relaciones.

Proposici3n 4.1.5 *Sea μ una medida de probabilidad en \mathbb{R} con todos sus momentos. Se cumplen las siguientes f3rmulas relacionando momentos y cumulantes.*

$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} k_{|V|} \right), \\ k_n &= \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} m_{|V|} \prod_{W \in K(\pi)} S_{|W|} \right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $K(\pi)$ es el **complemento de Kreweras** de π (ver [20]), $S_n = (-1)^n C_n$ y

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

es el n -3simo **número de Catalán**. Tambi3n hay una relaci3n entre cumulantes clásicos y cumulantes libres,

$$c_n = \sum_{\pi \in \Pi_n^{\text{conn}}} \left(\prod_{V \in \pi} k_{|V|} \right),$$

donde Π_n^{conn} denota el conjunto de particiones conectadas de n .

Cabe mencionar que en probabilidad clásica se cuenta con resultados análogos, usando la latiz $\mathcal{P}(n)$ en vez de $\mathcal{NC}(n)$.

4.1.4. Ley del Semicírculo

Así como la convoluci3n clásica de distribuciones normalizadas converge a la distribuci3n Normal clásica, la convoluci3n libre aditiva de

medidas de probabilidad normalizadas converge a la distribución semicircular s_σ , donde

$$ds_\sigma(t) = \frac{2}{\pi\sigma^2} \sqrt{\sigma^2 - t^2} \mathbf{1}_{[-\sigma, \sigma]}(t).$$

Más precisamente, se cumple el siguiente Teorema del Límite Central Libre. Sea $D_c\mu$ la dilatación de una medida de probabilidad μ por un factor c .

Teorema 4.1.6 *Sea μ una medida de probabilidad con media 0 y segundo momento finito. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxplus D_{1/\sqrt{N}}\mu \boxplus \dots \boxplus D_{1/\sqrt{N}}\mu}_{(N \text{ veces})} = s_\sigma,$$

donde el límite es en el sentido de convergencia débil de medidas de probabilidad.

Decimos entonces, que el elemento semicircular s_σ es la **distribución Gaussiana** con respecto a la convolución libre.

4.1.5. Proyección Libre

Hay una manera de producir un nuevos espacios de probabilidad no conmutativos, comprimiendo con proyecciones libres.

Definición 4.1.7 *Un elemento del espacio de probabilidad no conmutativo $p \in (\mathcal{A}, \tau)$ es una **proyección de traza t** si $p^2 = p$, y $\tau(p) = t$.*

Definición 4.1.8 *Si (\mathcal{A}, τ) es un espacio de probabilidad no conmutativo y $p \in (\mathcal{A}, \tau)$ es una proyección tal que $\tau(p) \neq 0$, entonces puede*

considerarse la **compresión** $(p\mathcal{A}p, \tau^{p\mathcal{A}p})$, donde

$$\begin{aligned} p\mathcal{A}p & : = \{pap \mid a \in \mathcal{A}\}, \\ \tau^{p\mathcal{A}p}(\cdot) & : = \frac{1}{\tau(p)}\tau(\cdot), \quad \text{restringido a } p\mathcal{A}p. \end{aligned}$$

Observación 4.1.9 (1) Nótese que $(p\mathcal{A}p, \tau^{p\mathcal{A}p})$ es de hecho un espacio de probabilidad no conmutativo: $p\mathcal{A}p$ es un álgebra cuya unidad es $p = p1p$, τ se ha reescalado de manera que $\tau^{p\mathcal{A}p}(p) = 1$.

(2) Propiedades adicionales de (\mathcal{A}, τ) se heredan a $(p\mathcal{A}p, \tau^{p\mathcal{A}p})$. Por ejemplo, si (\mathcal{A}, τ) es un \mathbf{C}^* -espacio de probabilidad, también lo es su compresión.

Ejemplo 4.1.10 Si $\mathcal{A} = M_4(\mathbb{C})$ es el espacio de matrices de 4×4 dotado de la traza normalizada $\tau = tr_4$ y p es la proyección

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$p(a_{ij})p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Si nos olvidamos de los ceros, la compresión $pM_4(\mathbb{C})p$ se identifica con $M_2(\mathbb{C})$ y $tr_4^{p\mathcal{A}p}$ coincide con tr_2 .

No se puede decir mucho sobre las variables aleatorias comprimidas en general. Sin embargo, en el caso en que p es independiente en el sentido libre con respecto a las variables que se consideren, entonces

pueden aplicarse los resultados sobre cumulantes que se conocen y relacionar las $*$ -distribuciones de las variables aleatorias con las $*$ -distribuciones de sus compresiones. Estos resultados se encuentran en [20].

Definición 4.1.11 *Sea a una variable aleatoria en el espacio (\mathcal{A}, τ) con $*$ -distribución μ . Sea $p \in (\mathcal{A}, \tau)$ una proyección tal que $\tau(p) = t \neq 0$, y a, p son independientes en el sentido libre. Entonces la **proyección libre de traza t** de μ , denotada por $\pi_t(\mu)$ es la $*$ -distribución de $pap \in (p\mathcal{A}p, \tau^{p\mathcal{A}p})$.*

Se tiene que, así como la convolución libre de medidas no depende de los $*$ -espacios de probabilidad no conmutativos donde se encuentren las variables, $\pi_t(\mu)$ solo depende de μ y t .

Ejemplo 4.1.12 *Consideramos nuevamente las medidas de transición de los diagramas del Ejemplo 2.1.9, la proyección libre de traza $\frac{1}{2}$ de la distribución Bernoulli simétrica concentrada en $\{-L, L\}$ es la distribución arco seno en $[-L, L]$, es decir,*

$$\pi_{1/2}(\mu^{(\beta_L)}) = \pi_{1/2}\left(\frac{1}{2}(\delta_{-L} + \delta_L)\right) = \mu^{(\beta_L)},$$

donde

$$\mu^{(\beta_L)}(du) = \frac{\mathbf{1}_{|u| \leq L}}{\pi\sqrt{L^2 - u^2}} du.$$

4.2. Los Resultados de Biane

Aunque existen algoritmos para recabar casi cualquier dato sobre las representaciones de S_n y sus caracteres, éstos se vuelven muy complicados e ineficientes cuando n es muy grande. Sin embargo, se han encontrado algunos resultados estadísticos sobre las representaciones y sus caracteres, que dependen únicamente de que sus diagramas de Young no estén muy dispersos. Los siguientes teoremas fueron

demostrados por P. Biane en [6], y muestran a la probabilidad libre como una herramienta muy poderosa para estudiar el comportamiento asintótico de los diagramas de Young bajo ciertas operaciones en teoría de representaciones.

El primer teorema da una relación entre los **caracteres de una representación** y los **cumulantes libres** de su medida asociada. El segundo teorema indica cómo la mayoría de los submódulos irreducibles de las representaciones que se obtienen del **producto tensorial de Kronecker de representaciones**, tienen diagramas de Young muy cercanos a una normalización del diagrama del semicírculo. El tercer teorema es consecuencia del segundo, en términos de caracteres. Al descomponer la **restricción** de una representación $[\lambda]$ de S_p a $S_q \times S_{p-q}$ (bajo ciertas condiciones), los submódulos irreducibles tienen diagramas de Young muy cercanos al **producto tensorial** de representaciones irreducibles que tienen como medida de transición una **proyección libre** adecuada de $\mu^{(\lambda)}$. Lo anterior se presenta en los Teoremas 4.2.6 y 4.2.7. Finalmente, el Teorema 4.2.9 establece que si una representación es **producto exterior** de $[\lambda_1]$ y $[\lambda_2]$, entonces está generada en gran parte por submódulos cuyos diagramas de Young son muy cercanos a aquél cuya medida de transición es $\mu^{(\lambda_1)} \boxplus \mu^{(\lambda_2)}$ (la **convolución libre aditiva** de las medidas de transición de λ_1 y λ_2), y al escribir este teorema en términos de caracteres se obtiene la **regla de la suma para inducciones** (Teorema 4.2.10).

En esta tesis no se presentan las demostraciones de estos resultados, solo mencionamos que las pruebas de Biane utilizan fuertemente las propiedades combinatorias de la probabilidad libre, estudiadas por R. Speicher. y A. Nica. en [20]. En la Sección 4.3 presentamos los conceptos claves de estas demostraciones.

Definición 4.2.1 *Sea $A > 1$. Un diagrama de Young $\lambda \in Y_q$ es A -*

balanceado si

$$\text{grosor}(\lambda) := \max(\text{col}(\lambda), \text{lin}(\lambda)) \leq A\sqrt{q},$$

donde $\text{col}(\lambda)$ (resp. $\text{lin}(\lambda)$) es el número de columnas (filas) de λ .

4.2.1. Estimación de Caracteres de Representaciones con Cumulantes Libres

Definición 4.2.2 Sea $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned} c(\sigma) &= \# \text{ de ciclos ajenos de } \sigma \\ |\sigma| &: = n - c(\sigma) \end{aligned}$$

Teorema 4.2.3 Para cada $A > 1$ y m entero positivo, existe una constante $K > 0$, tal que, para todo diagrama de Young A -balanceado λ , y para toda permutación $\sigma \in S_{|\lambda|}$ que satisfaga $|\sigma| \leq m$, se tiene que

$$\left| \chi_\lambda(\sigma) - \prod_{c|\sigma} |\lambda|^{-|c|-1} \kappa_{|c|+2}(\lambda) \right| \leq K |\lambda|^{-1-|\sigma|/2},$$

donde el producto es sobre los ciclos ajenos c de la permutación σ , y κ_n es el n -ésimo cumulante libre de la medida asociada a λ .

4.2.2. Aproximación del Producto Tensorial de Kronecker de Representaciones con la Ley del Semicírculo

Denotemos por Ω_q a la normalización del diagrama del semicírculo dada por

$$\Omega_q(t) = q^{1/2} \Omega(q^{-1/2}t), q > 0.$$

Teorema 4.2.4 Para toda $A > 1$, y $\varepsilon, \delta > 0$ existe q_0 tal que para toda $q > q_0$ y para todos los diagramas de Young A -balanceados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{Y}_q$,

el subespacio de la representación $[\lambda_1] \otimes [\lambda_2]$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu]$, que cumplen

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu(x) - \Omega_q(x)| \leq \varepsilon \sqrt{q}$$

tiene dimensión mayor que $(1 - \delta) \dim([\lambda_1] \otimes [\lambda_2])$.

Es decir, la mayoría de los componentes de la representación $[\lambda_1] \otimes [\lambda_2]$ tienen diagramas muy cercanos a una normalización del diagrama del semicírculo.

También se tiene el siguiente resultado de concentración de caracteres

Teorema 4.2.5 (Regla Cero para caracteres de productos tensoriales). *Para toda $A > 1$, $\varepsilon, \delta > 0$, y entero $n > 0$, existe q_0 tal que para toda $q > q_0$ y para todos los diagramas de Young A -balanceados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{Y}_q$, el subespacio de la representación $[\lambda] \otimes [\mu]$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu]$, que cumplen*

$$|\chi_\nu(\sigma)| \leq \varepsilon q^{-|\sigma|/2}$$

tiene dimensión mayor que $(1 - \delta) \dim([\lambda] \otimes [\mu])$.

4.2.3. Aproximación a la Restricción de Representaciones con la Proyección Libre

Al escribir $\pi_t(\lambda)$, nos referimos al diagrama cuya medida de transición es la proyección libre de traza t de la medida de transición del diagrama λ .

Teorema 4.2.6 *Para toda $A > 1$, $\alpha \in (0, 1/2]$ y $\varepsilon, \delta > 0$ existe q_0 tal que para todos $q \geq p > q_0$, con $\alpha q \leq p \leq (1 - \alpha)q$ y para todos los*

diagramas de Young A -balanceados $\lambda \in \mathfrak{Y}_q$, el subespacio de la representación $[\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu_1] \# [\nu_2]$, que cumplen

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu_1(x) - \pi_{(p+1)/(q+1)}(\lambda)(x)| \leq \varepsilon \sqrt{q}$$

y

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu_2(x) - \pi_{(q-p+1)/(q+1)}(\lambda)(x)| \leq \varepsilon \sqrt{q}$$

tiene dimensión mayor que $(1-\delta) \dim([\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}) = (1-\delta) \dim([\lambda])$.

Es decir, la mayoría de los componentes de la restricción de la representación $[\lambda]$ al subgrupo $S_p \times S_{q-p}$ son productos tensoriales de dos representaciones, de tal suerte que el diagrama de la primera es muy cercano al diagrama cuya medida de transición es la proyección libre de traza $(p+1)/(q+1)$ de la medida de transición de λ y el diagrama de la segunda es muy cercano al diagrama cuya medida de transición es la proyección libre de traza $(q-p+1)/(q+1)$ de la medida de transición de λ .

También se tiene el siguiente resultado en términos de caracteres

Teorema 4.2.7 *Para toda $A > 1$, $\alpha \in (0, 1/2]$, $\varepsilon, \delta > 0$, y entero $n > 0$ existe q_0 tal que para todos $q \geq p > q_0$, con $\alpha q \leq p \leq (1-\alpha)q$ y para todos los diagramas de Young A -balanceados $\lambda \in \mathfrak{Y}_q$, el subespacio de la representación $[\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu_1] \# [\nu_2]$, que cumplen*

$$|\chi_{\nu_1}((12 \dots m)) - \chi_\lambda((12 \dots m))| \leq \varepsilon q^{-(m-1)/2}$$

y

$$|\chi_{\nu_2}((12 \dots m)) - \chi_\lambda((12 \dots m))| \leq \varepsilon q^{-(m-1)/2},$$

$m \leq n$, tiene dimensión mayor que $(1-\delta) \dim([\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}) = (1-\delta) \dim([\lambda])$.

Ejemplo 4.2.8 Consideremos el diagrama cuadrado β_L cuya medida de transición es la distribución Bernoulli simétrica en $\{-L, L\}$, para L un número par grande. Entonces $[\beta_L]$ es una representación de S_{L^2} . Del Ejemplo 4.1.12 y el Teorema 4.2.6, se tiene que la mayoría de los componentes irreducibles de $[\beta_L] \downarrow_{S_{L^2/2} \times S_{L^2/2}}$ son el producto tensorial de representaciones $[\nu_1], [\nu_2]$ cuyos diagramas son cercanos a α_L , que es justamente el diagrama cuya medida de transición es la distribución arco seno en $[-L, L]$, resultante de la proyección libre de traza $\frac{1}{2}$ de $\mu^{(\beta_L)}$.

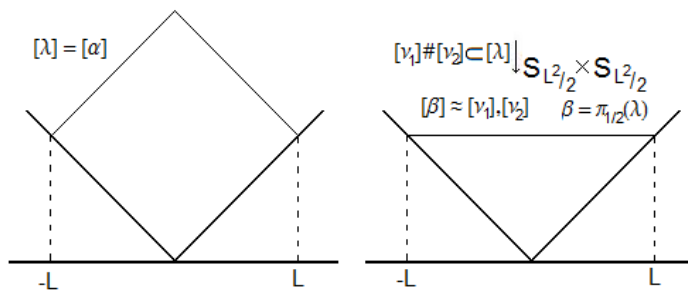


Figura 3. Restricción y Proyección Libre

4.2.4. Aproximación al Producto Exterior de Representaciones con la Convolución Libre

Cuando tomamos diagramas λ_1, λ_2 y escribimos $\lambda_1 \boxplus \lambda_2$, nos referimos al diagrama cuya medida de transición es la convolución libre de las medidas de transición de λ_1 y λ_2 .

Teorema 4.2.9 Para toda $A > 1$, y $\varepsilon, \delta > 0$ existe q_0 tal que para toda $q > q_0$ y para todos los diagramas de Young λ_1, λ_2 que satisfagan que $\text{grosor}(\lambda_1), \text{grosor}(\lambda_2) \leq A\sqrt{q}$ y $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq q_0$, el subespacio de la representación $[\lambda_1] \circ [\lambda_2]$, que generan todos los componentes isotípicos

$[\nu]$, que cumplen

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu(x) - \lambda_1 \boxplus \lambda_2(x)| \leq \varepsilon \sqrt{q}$$

tiene dimensión mayor que $(1 - \delta) \dim([\lambda_1] \circ [\lambda_2])$.

Es decir, la mayoría de los componentes de la representación $[\lambda_1] \circ [\lambda_2]$ tienen diagramas muy cercanos a aquél cuya medida de transición es la convolución libre de las medidas de transición de λ_1 y λ_2 .

En términos de caracteres se tiene lo siguiente.

Teorema 4.2.10 (Regla de la suma para inducciones) *Para toda $A > 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ y entero $n > 0$, existe q_0 tal que para toda $q > q_0$ y para todos los diagramas de Young λ_1, λ_2 que satisfagan que $\text{grosor}(\lambda_1), \text{grosor}(\lambda_2) \leq A\sqrt{q}$ y $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq q_0$, el subespacio de la representación $[\lambda_1] \circ [\lambda_2]$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu]$, que cumplen*

$$\begin{aligned} & \left| |\nu|^m \chi_\nu((1 \dots m)) - |\lambda_1|^m \chi_{\lambda_1}((1 \dots m)) - |\lambda_2|^m \chi_{\lambda_2}((1 \dots m)) \right| \\ & \leq \varepsilon q^{(m+1)/2} \end{aligned}$$

tiene dimensión mayor que $(1 - \delta) \dim([\lambda_1] \otimes [\lambda_2])$.

Ejemplo 4.2.11 *Consideremos el diagrama cuadrado β_L cuya medida de transición es la distribución Bernoulli simétrica en $\{-L, L\}$, para L un número grande. $[\beta_L]$ es una representación de S_{L^2} . Del Ejemplo 4.1.1 y el Teorema 4.2.9, se tiene que la mayoría de los componentes irreducibles de $[\beta_L] \circ [\beta_L]$ son representaciones $[\nu]$ cuyos diagramas son cercanos a α_{2L} , que es justamente el diagrama cuya medida de transición es la distribución arcoseno en $[-2L, 2L]$ que resulta de*

la convolución libre $\mu^{(\alpha_L)} \boxplus \mu^{(\alpha_L)}$.

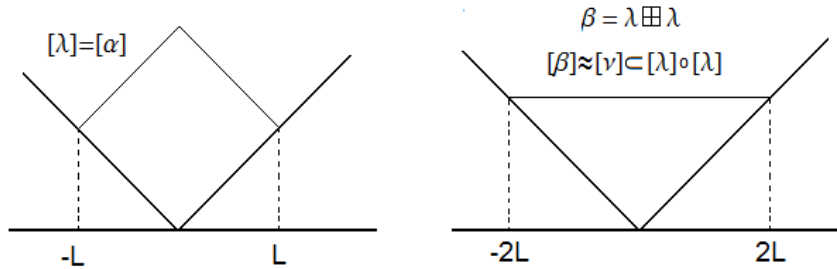


Figura 4. Convolution aditiva y producto exterior

4.3. Conceptos Claves

Como se mencionó anteriormente, no es propósito de esta tesis demostrar los teoremas de la sección anterior. Sin embargo, a continuación se incluyen algunos conceptos y resultados que son esenciales en las demostraciones de Biane [6]. Éstos ilustran claramente la importancia de relacionar diagramas con medidas.

Primero refreaseamos los teoremas en términos de los momentos de las medidas de transición de las representaciones involucradas. Una vez hecho esto, se busca un espacio de probabilidad no-conmutativo manejable, donde existan elementos autoadjuntos cuyas $*$ -distribuciones sean las medidas de transición requeridas. Entonces se utilizan las propiedades de este espacio de probabilidad no conmutativo junto con los resultados conocidos en probabilidad libre, especialmente, los resultados combinatorios que relacionan cumulantes y momentos.

4.3.1. Replanteamiento de los Teoremas en Términos de Medidas y Momentos

A continuación presentamos otra formulación de los Teoremas 4.2.4, 4.2.6 y 4.2.9 en términos de momentos de medidas de transición.

Teorema 4.3.1 *Para toda $A > 1$ y $n \in \mathbb{N}$, existen K, C_0 y q_0 tales que para toda $q > q_0$, $C > C_0$ y para todos los diagramas de Young A -balanceados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{Y}_q$, el subespacio de la representación $[\lambda_1] \otimes [\lambda_2]$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu]$, que cumplen*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\nu)}(x) - \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\Omega_q)}(x) \right| \leq C q^{k/2-1/2}, \text{ para toda } k \leq n,$$

tiene dimensión mayor que $(1 - K/C^2) \dim([\lambda_1] \otimes [\lambda_2])$.

Teorema 4.3.2 *Para toda $A > 1$, $\alpha \in (0, 1/2]$ y $n \in \mathbb{N}$, existen K, C_0 y q_0 tales que para todo $q \geq p > q_0$, con $\alpha q \leq p \leq (1 - \alpha)q$, para toda $C > C_0$ y para todos los diagramas de Young A -balanceados $\lambda \in \mathfrak{Y}_q$, el subespacio de la representación $[\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu_1] \otimes [\nu_2]$, que cumplen*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\nu_1)}(x) - \int_{\mathbb{R}} x^k \pi_{(p+1)/(q+1)}(\mu^{(\lambda)})(x) \right| \leq C q^{k/2-1/2}$$

y

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\nu_2)}(x) - \int_{\mathbb{R}} x^k \pi_{(q-p+1)/(q+1)}(\mu^{(\lambda)})(x) \right| \leq C q^{k/2-1/2},$$

para toda $k \leq n$, tiene dimensión mayor que $(1 - K/C^2) \dim([\lambda] \downarrow_{S_p \times S_{q-p}}) = (1 - \delta) \dim([\lambda])$.

Teorema 4.3.3 *Para toda $A > 1$, y $n \in \mathbb{N}$, existen K, C_0 y q_0 tales que para toda $q > q_0$, $C > C_0$ y para todos los diagramas de Young*

λ_1, λ_2 que satisfagan que $\text{grosor}(\lambda_1), \text{grosor}(\lambda_2) \leq A\sqrt{q}$ y $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq q_0$, el subespacio de la representación $[\lambda_1] \circ [\lambda_2]$, que generan todos los componentes isotípicos $[\nu]$, que cumplen

$$\left| \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\nu)}(x) - \int_{\mathbb{R}} x^k \mu^{(\lambda_1 \boxplus \lambda_2)}(x) \right| \leq Cq^{k/2-1/2}$$

tiene dimensión mayor que $(1 - K/C^2) \dim([\lambda_1] \circ [\lambda_2])$.

Los Teoremas 4.2.4, 4.2.6 y 4.2.9 se siguen de los Teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, del hecho de que la convergencia débil de medidas con soporte en el intervalo fijo $[-A, A]$ implica la convergencia uniforme de los diagramas asociados, y de aplicar esto a los diagramas reescalados $q^{-1/2}\lambda(q^{1/2})$.

4.3.2. Interpretación Espectral de la Medida de Transición

Para demostrar los Teoremas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, es necesario considerar un espacio de probabilidad no conmutativo adecuado (\mathcal{A}, τ) . Se requiere que éste sea un \mathbf{W}^* -espacio de probabilidad, en donde la medida de transición de los diagramas tiene una interpretación espectral, como veremos a continuación.

Sea $\lambda \vdash q$, V_λ el espacio de la representación $[\lambda]$ y dotemos a $\text{End}(V_\lambda)$ con la traza normalizada tr_λ , y la estructura de \mathbf{W}^* -álgebra de manera que $[\lambda]$ sea una representación unitaria. Denotemos por $\langle \cdot \rangle$ la traza normalizada en $M_{q+1}(\mathbb{C})$, con su estructura canónica de \mathbf{W}^* -álgebra. Se tiene la siguiente interpretación de la medida de transición de λ .

Proposición 4.3.4 *La medida $\mu^{(\lambda)}$ es la $*$ -distribución del elemento*

autoadjunto

$$\Gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & [\lambda](12) & [\lambda](13) & \dots & [\lambda](1q-1) & [\lambda](1q) \\ 1 & [\lambda](12) & 0 & [\lambda](23) & \dots & [\lambda](2q-1) & [\lambda](2q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & [\lambda](1q) & [\lambda](2q) & [\lambda](3q) & \dots & [\lambda](q-1q) & 0 \end{pmatrix}$$

en el espacio de probabilidad no conmutativo $(\text{End}(V_\lambda) \otimes M_{q+1}(\mathbb{C}), \text{tr}_\lambda \otimes \langle \cdot \rangle)$.

Para demostrar la proposición anterior se usan, entre otras cosas, el Lema de Schur (Teorema 1.1.17) y la Regla de Ramificación (Teorema 1.2.15).

Apéndice A

Conceptos Básicos de Probabilidad

En este apéndice se presentan los conceptos de probabilidad clásica necesarios para plantear y comprender los resultados del Capítulo 3, así como los elementos de probabilidad no conmutativa que se requieren en el Capítulo 4.

A.1. Elementos de Probabilidad Clásica

El objetivo de esta sección es definir el concepto de cadena de Markov. Para lograr esto, primero repasamos algunas definiciones básicas y recordamos la definición formal de esperanza y probabilidad condicional.

A.1.1. Definiciones Básicas

Comencemos con un espacio de probabilidad clásico, es decir, una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{F} es una σ -álgebra de Ω y \mathbb{P} es una medida de probabilidad en \mathcal{F} .

Definición A.1.1 Sea X una variable aleatoria real. Si $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ entonces X se llama *integrable*, y a

$$\mathbf{E}[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$$

se le llama la *esperanza* o *media* de X .

Definición A.1.2 Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ espacios medibles. Una función $\kappa : \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \rightarrow [0, \infty]$ se llama **probabilidad de transición** o **probabilidad de Markov** σ -finita si:

- i) $\omega_1 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ es \mathcal{F}_1 -medible para cualquier $A_2 \in \mathcal{F}_2$.
- ii) $A_2 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ es una medida σ -finita en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ para cualquier $\omega_1 \in \Omega_1$.

Si en ii) la medida es una medida de probabilidad para todo $\omega_1 \in \Omega_1$, entonces κ es llamado **núcleo estocástico** o **núcleo de Markov**.

Definición A.1.3 Un espacio topológico separable, cuya topología está inducida por una métrica completa es llamado **espacio Polaco**.

Sea E un espacio Polaco con σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(E)$, sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea $I \subset \mathbb{R}$ arbitrario.

Definición A.1.4 Una familia de variables aleatorias $X = (X_t)_{t \in I}$ (en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), con valores en $(E, \mathcal{B}(E))$ se llama un **proceso estocástico** con conjunto de índices (o tiempos) I y rango E .

A.1.2. Probabilidad Condicional

Si hay información parcial sobre el resultado de un experimento aleatorio, las probabilidades para los posibles eventos cambian. A este fenómeno se le denomina probabilidad condicional. Cuando la información conocida es que ha ocurrido algún evento del álgebra con probabilidad positiva, se utiliza un modelo de probabilidad condicional

elemental. Sin embargo, en muchas ocasiones la información parcial conocida es más complicada y el modelo de probabilidad condicional elemental dista mucho de ser suficiente. Entonces es necesario introducir los conceptos formales de esperanza y probabilidad condicional para modelar el problema. En particular, son necesarios para entender la definición de Cadenas de Markov.

Comenzamos recordando los conceptos elementales e intuitivos de probabilidad condicional elemental. Posteriormente, damos la definición formal de esperanza/probabilidad condicional

Definición A.1.5 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$. La **probabilidad condicional dado A** se define para cualquier $B \in \mathcal{F}$ como

$$\mathbb{P}[B|A] = \begin{cases} \frac{P[A \cap B]}{P[A]}, & \text{si } \mathbb{P}[A] > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que si $\mathbb{P}[A] > 0$, entonces $\mathbb{P}[\cdot|A]$ es una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) . En este modelo, el caso $\mathbb{P}[A] = 0$ se ignora. Ahora, si $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, entonces $\mathbf{1}_A X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}[\cdot|A])$. Entonces podemos definir de manera intuitiva la esperanza de X con respecto a $\mathbb{P}[\cdot|A]$.

$$\mathbb{E}[X|A] := \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}[d\omega|A] = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]}{P[A]}, & \text{si } \mathbb{P}[A] > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Rigurosamente, necesitamos definir esperanza condicional con respecto a una σ -álgebra.

Definición A.1.6 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ una sub σ -álgebra de Ω . Una variable aleatoria Y es una **esperanza condicional** de X dado \mathcal{A} , simbólicamente $\mathbf{E}[X|\mathcal{A}] := Y$, si:

(i) Y es \mathcal{A} -medible.

(ii) Para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\mathbf{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[Y\mathbf{1}_A]$.

Para $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}[B|\mathcal{A}] := \mathbf{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{A}]$ se llama **probabilidad condicional** de B dada la σ -álgebra \mathcal{A} .

Como $\mathbf{E}[X|\mathcal{A}]$ existe y es único (salvo igualdad casi seguramente), se puede hablar de la esperanza/probabilidad condicional, y no sólo de una esperanza/probabilidad condicional.

También podemos hablar de $\mathbb{P}[B|X] := \mathbb{P}[B|\sigma(X)]$, donde $\sigma(X)$ es la σ -álgebra generada por X . Finalmente reunimos los requisitos necesarios para definir cadenas de Markov.

A.1.3. Cadenas de Markov

Definición A.1.7 *Un proceso estocástico $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ con conjunto de tiempos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ y conjunto de estados E se llama una **cadena de Markov** con distribuciones $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ en el espacio (Ω, \mathcal{F}) si:*

- i) Para cada $x \in E$, X es un proceso estocástico en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ con $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$.*
- ii) La función $\kappa : E \times \mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{N}_0} \rightarrow [0, 1]$, $(x, B) \mapsto \mathbb{P}_x[X \in B]$ es un núcleo estocástico.*
- iii) X tiene la Propiedad de Markov, es decir*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} \in A | \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} \in A | X_n].$$

donde \mathcal{F}_n es la sub σ -álgebra de $\mathcal{B}(E)^{\otimes \mathbb{N}_0}$ generada por $X_0 \otimes \dots \otimes X_n$. Aquí, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la probabilidad de transición $\kappa_n : E \times \mathcal{B}(E) \mapsto [0, 1]$ es la probabilidad de Markov, definida para $x \in E$ y $A \in \mathcal{B}(E)$ por:

$$\kappa_n(x, A) := \kappa(x, \{y \in E^{\mathbb{N}_0} : y(n) \in A\}) = \mathbb{P}_x(X_n \in A).$$

La familia $(\kappa_n(x, A), n \in \mathbb{N}_0, x \in E, A \in \mathcal{B}(E))$ se llama la familia de **probabilidades de transición del n -ésimo paso de X** .

La propiedad iii) de la definición anterior indica que si en cierto

paso la cadena se encuentra en algún estado en específico, la probabilidad de que en el siguiente paso se encuentre en otro estado depende únicamente del estado en el que se encuentra y no de los estados anteriores.

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de Cadena de Markov, y su comprensión es fundamental para los propósitos de este trabajo.

Ejemplo A.1.8 *En la cadena de Markov de la Definición 2.2.2, E es el conjunto discreto de clases de conjugación $\{K \in S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ (o bien, el conjunto de particiones $\{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}_0\}$, o el conjunto de diagramas de Young). Nos concentramos en el caso en el que el estado inicial $X_0 = \lambda_0$, el diagrama sin cajas. Como ocurre para cualquier espacio discreto, $\mathcal{B}(E)$ es simplemente el conjunto potencia $\mathcal{P}(E)$. Entonces, el conjunto de probabilidades de transición del n -ésimo paso es*

$$\{\kappa_n(\lambda_0, A) : A \in \mathcal{P}(E)\}.$$

Sin embargo, todas estas probabilidades son 0, salvo las del conjunto

$$\{\kappa_n(\lambda_0, A) : A \in \mathcal{P}(E), A \cap T_n \neq \emptyset\},$$

pues a cada paso se van agregando cajas y en el n -ésimo paso se tendrá un diagrama de n cajas. Entonces, aunque el espacio de posibles resultados en el n -ésimo paso es $\{\lambda \vdash n, n \in \mathbb{N}_0\}$, dado que únicamente las particiones de n tienen probabilidad positiva, la cadena induce una medida de probabilidad μ_n en el conjunto de particiones de n , o bien, en el conjunto T_n de diagramas de n cajas,

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}(X_n = \lambda) = \begin{cases} \mu_n(\lambda), & \text{si } \lambda \vdash n, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde μ_n se calcula a partir de las probabilidades de transición de un solo paso,

$$p_{\lambda\Lambda} = \mathbb{P}_{\lambda_0}(X_{n+1} = \Lambda | X_n = \lambda),$$

definidas en (2.2.2).

Además, se induce una medida en el conjunto \mathfrak{Y} de diagramas de Young, como se describe en (2.2.4).

A.2. Elementos de Probabilidad No Conmutativa

Segun puede observarse en los artículos de Muraki [19] y Ben Ghorbal & Shürmann [5], existen solamente 5 tipos de “independencia”: clásica (tensorial), libre, booleana, monótona y anti monótona, que surgen a partir de los 5 posibles productos naturales en C^* -álgebras que dan origen a procesos de Lévy [11].

En este trabajo, es de nuestro especial interés el estudio de la probabilidad libre, sin embargo, en esta sección empezaremos recordando resultados y conceptos de espacios de probabilidad no conmutativos en general, para respaldar los conceptos y resultados particulares de probabilidad libre que se presentan en la primera sección del Capítulo 4.

Un aspecto muy agradable de la probabilidad no conmutativa es que, aunque no se cuenta con una intuición natural, el paralelismo que tiene con la probabilidad clásica permite encontrar resultados y teoremas, basados en sus análogos en probabilidad clásica, en donde sí se cuenta con ésta intuición.

A.2.1. Espacios de Probabilidad No Conmutativos y Productos Naturales

En esta subsección presentamos brevemente los fundamentos de la independencia libre a partir del producto libre, que es uno de los 5 posibles productos naturales.

Definición A.2.1 *Un espacio de probabilidad no-conmutativo*

es un par (\mathcal{A}, τ) donde \mathcal{A} es un álgebra unitaria compleja y τ es una funcional lineal $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tau(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$. Una **variable aleatoria no-conmutativa** es simplemente un elemento a de \mathcal{A} .

Sea \mathcal{K} la clase de espacios de probabilidad no conmutativos (\mathcal{A}, τ) . Para cada par de álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ definimos

$$\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 := \bigoplus_{\varepsilon \in \mathbf{A}} \mathcal{A}_{\varepsilon_1} \otimes \mathcal{A}_{\varepsilon_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{\varepsilon_n},$$

donde \mathbf{A} es el conjunto de palabras reducidas finitas $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de longitud $n \geq 1$, con $\varepsilon_i \in \{1, 2\}$ y $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$. Definimos i_1, i_2 las inclusiones $i_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, $i_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$. Para cualesquiera homomorfismos de álgebras $j_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$, $j_2 : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$, existe un único morfismo $j_1 \amalg j_2 : \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{j_1} & \mathcal{A}_1 & \\
 & \swarrow \iota_1 & & \searrow i_1 & \\
 \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{j_1 \amalg j_2} & & \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 & \\
 & \nwarrow \iota_2 & & \nearrow i_2 & \\
 & \mathcal{B}_2 & \xrightarrow{j_2} & \mathcal{A}_2 &
 \end{array}$$

donde ι_1, ι_2 son las inclusiones de \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 en $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$, respectivamente.

Podemos entonces definir el producto natural.

Definición A.2.2 Un **producto natural** en \mathcal{K} es una función de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ a \mathcal{K} , $((\mathcal{A}_1, \tau_1), (\mathcal{A}_2, \tau_2)) \rightarrow (\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2, \tau_1 \tau_2)$ que satisface las siguientes condiciones.

(N1) Asociatividad:

Bajo la identificación natural $(\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2) \sqcup \mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_1 \sqcup (\mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3)$, se

cumple

$$(\tau_1\tau_2)\tau_3 = \tau_1(\tau_2\tau_3) := \tau_1\tau_2\tau_3.$$

(N2) *Universalidad:*

Para cualesquiera homomorfismos de álgebras $j_1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$, $j_2 : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$, se cumple

$$(\tau_1 \circ j_1)(\tau_2 \circ j_2) = (\tau_1\tau_2) \circ (j_1 \amalg j_2).$$

(N3) *Normalización:*

Para todas $a \in \mathcal{A}_1$, $b \in \mathcal{A}_2$ se cumple

$$\begin{aligned} (\tau_1\tau_2) \circ i_1 &= \tau_1, \quad (\tau_1\tau_2) \circ i_2 = \tau_2, \quad (\text{extensión}) \\ (\tau_1\tau_2)[i_1(a)i_2(b)] &= (\tau_1\tau_2)[i_2(b)i_1(a)] = \tau_1[a]\tau_2[b], \quad (\text{factorización}). \end{aligned}$$

Más adelante, al revisar la definición de independencia, entenderemos la razón de ser de los axiomas anteriores.

Para cada palabra alternante $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{A}$, escribimos $V_1 := V_1(\varepsilon) := \{i | \varepsilon_i = 1\}$, y $V_2 := V_2(\varepsilon) := \{i | \varepsilon_i = 2\}$. Finalmente si $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, tal que para cada $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que $a_k = i_{\varepsilon_k} a_k^{(\varepsilon_k)}$, decimos entonces resumidamente que $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

Definición A.2.3 *El producto tensorial \otimes , el producto booleano \diamond , el producto libre \star , el producto monótono \triangleright y el producto anti monótono \triangleleft , sobre \mathcal{K} están dados por las siguientes reglas de cálculo para $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}_\varepsilon$. (donde $\prod_{k \in V}^{\rightarrow} a_k$ denota el producto de a_k en el orden en el que aparecen en $a_1 a_2 \dots a_n$.)*

$$(\tau_1 \otimes \tau_2)[a_1 a_2 \dots a_n] = \tau_1 \left[\prod_{k \in V_1}^{\rightarrow} a_k^{(1)} \right] \tau_2 \left[\prod_{l \in V_2}^{\rightarrow} a_l^{(2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_1 \diamond \tau_2)[a_1 a_2 \dots a_n] &= \left(\prod_{k \in V_1} \tau_1 [a_k^{(1)}] \right) \left(\prod_{k \in V_2} \tau_2 [a_k^{(2)}] \right) \\
 (\tau_1 \star \tau_2)[a_1 a_2 \dots a_n] &= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,n\} \\ I \neq \{1,2,\dots,n\}}} \left((\tau_1 \star \tau_2) \left[\overrightarrow{\prod_{k \in I} a_k} \right] \right) \left(\overrightarrow{\prod_{l \notin I} \tau_{\varepsilon_l} a_l^{(\varepsilon_l)}} \right)
 \end{aligned}$$

(donde el cálculo de $(\tau_1 \star \tau_2)$ debe entenderse como una fórmula recursiva con la convención $(\tau_1 \star \tau_2) \left[\overrightarrow{\prod_{k \in \emptyset} a_k} \right] := 1$.)

$$\begin{aligned}
 (\tau_1 \triangleright \tau_2)[a_1 a_2 \dots a_n] &= \tau_1 \left[\overrightarrow{\prod_{k \in V_1} a_k^{(1)}} \right] \left(\overrightarrow{\prod_{l \in V_2} \tau_2 [a_l^{(2)}]} \right) \\
 (\tau_1 \triangleleft \tau_2)[a_1 a_2 \dots a_n] &= \left(\overrightarrow{\prod_{k \in V_1} \tau_1 [a_k^{(1)}]} \right) \tau_2 \left[\overrightarrow{\prod_{l \in V_2} a_l^{(2)}} \right]
 \end{aligned}$$

Observación A.2.4 $(\tau_1 \triangleright \tau_2) = (\tau_2 \triangleleft \tau_1)$, bajo la identificación natural $\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_1$.

Teorema A.2.5 *Existen únicamente cinco productos naturales: el producto tensorial \otimes , el producto booleano \diamond , el producto libre \star , el producto monótono \triangleright y el producto anti monótono \triangleleft .*

A.2.2. Independencia

La siguiente definición generaliza la noción de independencia para espacios de probabilidad no conmutativos. Para cada producto natural, da origen a un tipo de independencia. Esta definición fue propuesta por Ben Ghorbal y Shürman en [5].

Dado un espacio de probabilidad no conmutativo (\mathcal{A}, τ) dos subálgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ y un producto natural, decimos que las álgebras \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son independientes, si τ puede recuperarse a partir de sus

restricciones $\tau_1 = \tau|_{\mathcal{A}_1}$, $\tau_2 = \tau|_{\mathcal{A}_2}$ mediante la “receta” que señala el producto natural. Más formalmente, sea $\iota : \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}$; $a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{A}$ (dada por la multiplicación en \mathcal{A}).

Definición A.2.6 *Sea (\mathcal{A}, τ) un espacio de probabilidad no conmutativo, sea*

$$((\mathcal{A}_1, \tau_1), (\mathcal{A}_2, \tau_2)) \mapsto (\mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2, \tau_1 \otimes \tau_2)$$

*un producto natural, sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ dos subálgebras, sea \mathcal{B} el álgebra generada por \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y sean $\tau_0 = \tau|_{\mathcal{B}}$, $\tau_1 = \tau|_{\mathcal{A}_1}$, $\tau_2 = \tau|_{\mathcal{A}_2}$. Decimos que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son **independientes respecto al producto \otimes** si*

$$\tau_0 \circ \iota = \tau_1 \otimes \tau_2$$

Ésta relación justifica el axioma de extensión (N3). Obsérvese que en el caso tensorial, booleano y libre la relación de independencia es simétrica. Gracias al axioma (N1) la definición de independencia se extiende para un número finito de álgebras. Un conjunto arbitrario de álgebras es **independiente** si cualquier subconjunto finito lo es. Ahora, dada una noción de independencia en álgebras, subconjuntos arbitrarios de álgebras son **independientes** si las álgebras unitarias generadas por los subconjuntos lo son. Finalmente, en el caso particular en que los subconjuntos son variables aleatorias $(\{a_n\}_n)$, decimos que las variables aleatorias son **independientes**.

A grandes rasgos, para que dos variables aleatorias sean independientes en algún sentido, se requiere que tanto el funcional τ como el álgebra \mathcal{A} , cumplan diversas propiedades, como puede observarse en el siguiente teorema.

Sea (\mathcal{A}, τ) un espacio de probabilidad no conmutativo, y sea I un conjunto de índices. Se tienen las siguientes reglas de independencia.

Teorema A.2.7 *Sea, para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ una subálgebra unitaria.*

(1) Las subálgebras (\mathcal{A}_i) son **independientes respecto al producto tensorial** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, a_2 \in \mathcal{A}_{i_2}, \dots, a_k \in \mathcal{A}_{i_k}$,

$$a_1, a_2, \dots, a_k \text{ conmutan en } \mathcal{A}$$

y

$$\tau(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = \tau(a_1^{n_1}) \tau(a_2^{n_2}) \dots \tau(a_k^{n_k})$$

siempre que $\mathcal{A}_{i_j} \neq \mathcal{A}_{i_l}$ ($1 \leq j < l \leq k$).

(2) Las subálgebras (\mathcal{A}_i) son **independientes respecto al producto booleano** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$\tau(a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}) = \tau(a_1^{n_1}) \tau(a_2^{n_2}) \dots \tau(a_k^{n_k})$$

siempre que $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, y elementos vecinos pertenecen a diferentes subálgebras ($\mathcal{A}_{i(j)} \neq \mathcal{A}_{i(j+1)}$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$).

(3) Las subálgebras (\mathcal{A}_i) son **independientes respecto al producto libre** si para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera polinomios p_1, p_2, \dots, p_k

$$\tau(p_1(a_1)p_2(a_2) \dots p_k(a_k)) = 0$$

siempre que $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$ y $\tau(p_j(a_j)) = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, y elementos vecinos pertenezcan a diferentes subálgebras (i.e $\mathcal{A}_{i(j)} \neq \mathcal{A}_{i(j+1)}$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$).

(4) Si I es un conjunto totalmente ordenado, las subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ (en ese orden) son **independientes respecto al producto monótono** si, para todos $n, m \in \mathbb{N}$

- a) $a_i a_j a_k = \tau(a_j) a_i a_k$ siempre que $i < j > k$
- b) $\tau(a_{i_m} \dots a_{i_2} a_{i_1} a_i a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}) = \tau(a_{i_m}) \dots \tau(a_{i_2}) \tau(a_{i_1}) \tau(a_i) \tau(a_{j_1}) \tau(a_{j_2}) \dots \tau(a_{j_n})$
siempre que $i_m > \dots > i_2 > i_1 > i < j_1 < j_2 < \dots < j_n$

para cualesquiera variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}_i$, $a_j \in \mathcal{A}_j$, $a_k \in \mathcal{A}_k$, $a_{i_l} \in \mathcal{A}_{i_l}$, $a_{j_l} \in \mathcal{A}_{j_l}$

(5) Si I es un conjunto totalmente ordenado, las subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ (en ese orden) son **independientes respecto al producto anti monótono** si, para todos $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a) \quad & a_i a_j a_k = \tau(a_j) a_i a_k \text{ siempre que } i > j < k \\ b) \quad & \tau(a_{i_m} \dots a_{i_2} a_{i_1} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n}) = \\ & \tau(a_{i_m}) \dots \tau(a_{i_2}) \tau(a_{i_1}) \tau(a_{j_1}) \tau(a_{j_2}) \dots \tau(a_{j_n}) \\ & \text{siempre que } i_m < \dots < i_2 < i_1 < i > j_1 > j_2 > \dots > j_n \end{aligned}$$

para cualesquiera variables aleatorias $a_i \in \mathcal{A}_i$, $a_j \in \mathcal{A}_j$, $a_k \in \mathcal{A}_k$, $a_{i_l} \in \mathcal{A}_{i_l}$, $a_{j_l} \in \mathcal{A}_{j_l}$

Notemos que en el caso tensorial, si reemplazamos a τ por \mathbb{E} , la regla de independencia es justamente un equivalente conocido a la relación de independencia clásica.

$$\mathbb{E}(X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_k^{n_k}) = \mathbb{E}(X_1^{n_1}) \mathbb{E}(X_2^{n_2}) \dots \mathbb{E}(X_k^{n_k})$$

Si dotamos al espacio de probabilidad no conmutativo de cierta estructura especial, podemos asignarles distribuciones a las variables aleatorias no conmutativas.

A.2.3. *-Álgebras y C*-Espacios de Probabilidad

Supondremos que \mathcal{A} es una ***-álgebra**, es decir que \mathcal{A} está dotado de una ***-operación antilineal** $((\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, a, b \in \mathcal{A})$, tal que $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Si se tiene que

$$\tau(a^* a) \geq 0, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

decimos que τ es positiva y llamamos a (\mathcal{A}, τ) un ***-espacio de probabilidad**.

En el marco de un *-espacio de probabilidad podemos hablar de tres tipos de variables aleatorias:

- a) variable aleatoria **autoadjunta**: $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$,
- b) variable aleatoria **unitaria**: $u \in \mathcal{A}$ tal que $u^*u = uu^* = 1$,
- c) variable aleatoria **normal**: $a \in \mathcal{A}$ tal que $aa^* = a^*a$.

Es de interés conocer los momentos de una variable aleatoria cualquiera a en (\mathcal{A}, τ) , es decir el valor de

$$\tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1} \dots a^{m_k}(a^*)^{n_k})$$

para cada $m_i, n_i \in \mathbb{N}$. Para esto se define la ***-distribución** de a . Denotamos por $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ al álgebra de polinomios en dos variables (no conmutativas) con coeficientes en los complejos.

Definición A.2.8 *Dada una variable aleatoria a en (\mathcal{A}, τ) , la ***-distribución (en el sentido algebraico)** de a es la funcional lineal $\mu_a : \mathbb{C}\langle x, y \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\mu_a(x^{m_1}(y)^{n_1} \dots x^{m_k}(y)^{n_k}) = \tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1} \dots a^{m_k}(a^*)^{n_k})$$

para cada $m_i, n_i \in \mathbb{N}$.

En el caso en que $a \in \mathcal{A}$ es normal definimos alternativamente la *-distribución de $a \in \mathcal{A}$ de la siguiente manera.

Definición A.2.9 *Sea (\mathcal{A}, τ) un *-espacio de probabilidad y sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Si existe una medida μ en \mathbb{C} con soporte compacto, tal que*

$$\int_{\mathbb{C}} z^k \bar{z}^l \mu(dz) = \tau(a^k(a^*)^l), \text{ para todo } k, l \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.1})$$

*diremos que μ es la ***-distribución (en el sentido analítico)** de a .*

Observación A.2.10 *Cuando existe μ que cumple con la condición (A.1) entonces μ es única por el Teorema de Stone-Weierstrass. Entonces tiene sentido hablar de la $*$ -distribución (en el sentido analítico) de a .*

Observación A.2.11 *Cuando a es autoadjunta, la $*$ -distribución de a tiene soporte sobre \mathbb{R} . Así, en este caso μ es una medida de probabilidad en \mathbb{R} y la ecuación (A.1) toma la forma*

$$\int_{\mathbb{R}} t^p \mu(dt) = \tau(a^p), \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Cuando a es autoadjunto llamaremos a su $$ -distribución μ la **medida espectral** de a . Estaremos interesados especialmente en este tipo de elementos y sus medidas espectrales. En este trabajo se estudiarán principalmente medidas con soporte en \mathbb{R} , de ahí la importancia de los elementos autoadjuntos para nosotros. $\tau(a^n) = m_n$ se denomina el m -ésimo momento de μ .*

El tipo de espacios de probabilidad no-conmutativos que estudiaremos estarán dotados de una estructura de \mathbf{C}^* -álgebra. Esto nos permitirá usar algunos de los resultados de esta teoría para poder asegurar la existencia de $*$ -distribuciones en el sentido analítico para cualquier elemento normal. Recordamos a continuación lo que es una \mathbf{C}^* -álgebra.

Definición A.2.12 *Decimos que un álgebra \mathcal{A} es una \mathbf{C}^* -álgebra si \mathcal{A} está dotada de una norma $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ que la hace un espacio de Banach, tal que:*

- i) $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$,*
- ii) $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in \mathcal{A}$.*

El correspondiente $*$ -espacio de probabilidad se define de la siguiente manera.

Definición A.2.13 *Un \mathbf{C}^* -espacio de probabilidad es un $*$ -espacio de probabilidad (\mathcal{A}, τ) donde \mathcal{A} es una \mathbf{C}^* -álgebra.*

Necesitaremos algunas de las propiedades de la teoría de \mathbf{C}^* -álgebras que se presentan, por ejemplo, en Nica y Speicher [20]. Recordemos que el espectro de a es el conjunto

$$Sp(a) = \{z \in \mathbb{C} : z1_{\mathcal{A}} - a \text{ no es invertible}\}.$$

Denotamos por $\mathbf{C}(Sp(a))$ el álgebra de funciones continuas $f : Sp(a) \rightarrow \mathbb{C}$.

El siguiente resultado es de los más importantes en \mathbf{C}^* -espacios de probabilidad.

Teorema A.2.14 [20] *Sea (\mathcal{A}, τ) un \mathbf{C}^* -espacio de probabilidad y sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces a tiene una $*$ -distribución en el sentido analítico. Más aún, si μ es la $*$ -distribución de a se tiene que*

- i) El soporte de μ está contenido en el espectro de a .*
- ii) Para $f \in C(Sp(a))$ tenemos la fórmula*

$$\int f d\mu = \tau(f(a)).$$

A veces se requiere que la $*$ -álgebra y el $*$ -espacio de probabilidad tengan estructuras aún más particulares.

Definición A.2.15 *Una $*$ -álgebra unitaria de operadores acotados en un espacio de Hilbert es una \mathbf{W}^* -álgebra o álgebra de Von Neumann si es cerrada con respecto a la topología débil en operadores.*

Se tiene que cualquier álgebra de Von Neumann es, en particular, una \mathbf{C}^* -álgebra.

Definición A.2.16 *Si (\mathcal{A}, τ) es un $*$ -espacio de probabilidad y adicionalmente cumple que:*

- i) \mathcal{A} es una \mathbf{W}^* -álgebra.
 ii) τ es **tracial**, es decir, para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

$$\tau(ab) = \tau(ba).$$

- iii) τ es **fiel**, es decir

$$\tau(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Decimos que (\mathcal{A}, τ) es un \mathbf{W}^* -espacio de probabilidad.

A.2.4. Convoluciones

En el contexto de C^* -espacios de probabilidad, al considerar variables aleatorias autoadjuntas a y b , y al ser éstas independientes en alguno de los 5 sentidos, puede calcularse la $*$ -distribución μ_{a+b} de $a + b$, en términos de las $*$ -distribuciones μ_a, μ_b de a y b . Más aún, μ_{a+b} solo depende de μ_a y μ_b y del tipo de relación de independencia que guarden a y b , y no del C^* -espacio de probabilidad en cuestión. En el caso en que a y b son independientes respecto al producto clásico (resp. booleano, libre, monótono o anti monótono) μ_{a+b} se denomina la convolución aditiva clásica (resp. booleana, libre, monótona, anti monótona), de μ_a y μ_b .

Así como en probabilidad clásica existen resultados y transformadas que simplifican la convolución, se cuenta con resultados similares bajo los otros tipos de independencia. En el Capítulo 4 se profundiza en algunas particularidades de la probabilidad libre. De los otros tipos de independencia no hablaremos más en este trabajo. Para la booleana puede revisarse [23], y para la monótona [18].

Apéndice B

Resultados Complementarios

En éste apéndice se presentan resultados que serán utilizados en la demostración de los Lemas del Capítulo 3.2. No se incluyen aquellas demostraciones que por elementales podrían reproducirse sin mucho problema. Asimismo, por ser bien conocidas, se omiten la demostraciones de la fórmula de particiones de Hardy-Ramanujan y la fórmula de Stirling.

B.1. Fórmula Gancho

Existe una fórmula, sencilla y atractiva desde el punto de vista de combinatoria, para calcular el número de tablas estándar de cierta forma dada, que además es útil al demostrar un importante resultado sobre el comportamiento asintótico de diagramas de Young con la medida de Plancherel. La prueba que a continuación se presenta se debe a Jason Bandlow [3], y es, desde mi particular punto de vista, una de las más directas y sencillas.

Para $\lambda \vdash n$, sea $h_{ij}(\lambda), (i, j) \in \lambda$ la distancia gancho de la caja

(i, j) , es decir, la suma de la distancia hacia arriba y la distancia hacia la derecha del centro de la caja (i, j) al borde del diagrama de λ .

Teorema B.1.1 (Fórmula Gancho). *Sea $\lambda \vdash n$. Entonces*

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)}.$$

Demostración. Consideraremos la versión del diagrama de Ferrer en forma de escalera. Sea $\lambda \vdash n$, cuyo diagrama de Ferrer tiene m escalones. Para un nodo $(i, j) \in \lambda$, definimos el contenido como $cont(i, j) = i - j$. Sea $\{\alpha_i\}_{i=0}^m$ la sucesión definida por $\alpha_0 = \alpha_{m+1} = 0$, $\alpha_1 = \lambda_1$, y para $1 \leq n \leq m$,

$$\alpha_{n+1} = \lambda_1 + \sum_{j=1}^n m_{\alpha_j}(\lambda).$$

Sea $\{\beta_i\}_{i=0}^m$ la sucesión definida por $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \lambda'_1(\lambda)$, y para $1 \leq n \leq m$,

$$\beta_{n+1} = \lambda_{l(\lambda')} - \sum_{j=1}^n m_{\beta_j}(\lambda').$$

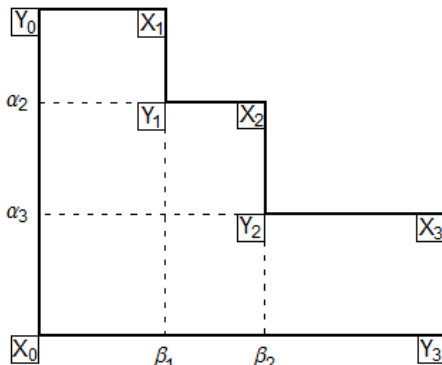


Figura 5.

Es decir, los α_i y los β_i son las alturas y las longitudes de los escalones, respectivamente, como se observa en la Figura 5. Sean

$$\begin{aligned} X_i &= (\alpha_i, \beta_i), \text{ si } 0 \leq i \leq m, \\ Y_i &= (\alpha_{i+1}, \beta_i), \text{ si } 0 \leq i \leq m, \end{aligned}$$

sean $x_i = \text{cont}(X_i)$, $y_i = \text{cont}(Y_i)$. Obsérvese que

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=0}^m x_i = \sum_{i=0}^m y_i. \tag{B.1}$$

Por inducción, y el lema 1.2.14 basta con demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)} &= \sum_{\mu \in \lambda^-} \frac{(n-1)!}{\prod_{(i,j) \in \mu} h_{ij}(\mu)} \\ &\Leftrightarrow n = \sum_{\mu \in \lambda^-} \frac{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)}{\prod_{(i,j) \in \mu} h_{ij}(\mu)}. \end{aligned}$$

Para esto, probaremos las siguientes igualdades

$$\sum_{\mu \in \lambda^-} \frac{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)}{\prod_{(i,j) \in \mu} h_{ij}(\mu)} = - \sum_{i \geq 1}^m \frac{\prod_{j=1}^m (x_i - y_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x_i - x_j)} \tag{B.2}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (x_i^2 - y_i^2) \tag{B.3}$$

$$= n. \tag{B.4}$$

la igualdad (B.2) se sigue de que los h_{ij} son iguales en λ y en μ salvo para las entradas en el renglón r o columna c donde se quitó la caja,

en los que disminuye 1. Supóngase que se encuentra en la caja justo a la izquierda de la caja que se eliminó. Entonces, a menos de que en la caja de la izquierda aumente la altura de la escalera $h_{ic}(\mu) = h_{(i-1)c}(\lambda)$. Entonces estos términos se cancelarán en el producto. Más precisamente, digamos que la partición λ_k^- resulta de quitar la caja que tenía coordenadas X_k , las celdas a las que les sobrevive el numerador después de esta serie de cancelaciones son las de la forma

$$L_j = (\alpha_{k-1}, \beta_j + 1) \in \lambda_k^-, \quad 0 \leq j < k,$$

y la celdas en las que sobrevive el denominador son

$$M_j = (\alpha_{k-1}, \beta_j) \in \lambda, \quad 1 \leq j \leq k,$$

Análogamente, considerando esta vez la columna donde cambian los h_{ij} , en vez del renglón, sobreviven los numeradores de

$$L_j = (\alpha_{j+1} + 1, \beta_k) \in \lambda_k^-, \quad k \leq j \leq m,$$

y los denominadores de

$$M_j = (\alpha_j, \beta_k) \in \lambda, \quad k < j \leq m,$$

Observemos que las distancias gancho pueden calcularse como sigue:

$$h_{(i,j)}(\lambda) = \text{cont}(N(i,j)) - \text{cont}(E(i,j)) + 1,$$

donde $N(i,j)$ y $E(i,j)$ son las celdas más al norte y más al este de la celda en cuestión, respectivamente. Entonces, aplicando la fórmula anterior a los L_j y a los M_j se obtiene que

$$\begin{aligned}
h_{L_j}(\mu^{(k)}) &= \text{cont}(N(L_j)) - \text{cont}(E(L_j)) + 1 \\
&= \begin{cases} y_j - x_k, & \text{si } 0 \leq j < k \\ x_k - y_k, & \text{si } k \leq j \leq m' \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{M_j}(\lambda) &= \text{cont}(N(M_j)) - \text{cont}(E(M_j)) + 1 \\
&= \begin{cases} x_j - x_k, & \text{si } 1 \leq j < k \\ x_k - x_j, & \text{si } k < j \leq m' \end{cases}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu \in \lambda^-} \frac{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}(\lambda)}{\prod_{(i,j) \in \mu} h_{ij}(\mu)} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=0}^m h_{L_j}(\lambda)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m h_{M_j}(\mu^{(i)})} \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{j=0}^{i-1} x_i - y_j \prod_{j=i}^m - (x_i - y_j)}{\prod_{j=1}^{i-1} x_i - x_j \prod_{j=i+1}^m - (x_i - x_j)} \\
&= - \sum_{i \geq 1} \frac{\prod_{j=0}^m (x_i - y_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x_i - x_j)}.
\end{aligned}$$

Ahora, la igualdad (B.3) se sigue del siguiente an3lisis. Consideremos

el polinomio en t

$$P(t) = - \sum_{i \geq 1}^m \frac{\prod_{j=0}^m (x_i - y_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x_i - x_j)} \prod_{j=1}^m (t - x_j),$$

inmediatamente se verifica que

$$P(x_s) = \prod_{j=0}^m (x_s - y_j) \text{ para } 1 \leq s \leq m,$$

y $P(t)$ tiene grado $n - 1$ y coeficiente principal

$$- \sum_{i \geq 1}^m \frac{\prod_{j=0}^m (x_i - y_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (x_i - x_j)}.$$

Si consideremos el polinomio

$$Q(t) = \prod_{j=0}^m (t - y_j),$$

entonces se tiene que

$$P(x_s) = \prod_{j=0}^m (x_s - y_j) \text{ para } 1 \leq s \leq m$$

y el término principal de $Q(t)$ es t^{m+1} .

Así, el polinomio $P(t) + Q(t)$ tiene término principal t^{m+1} , y ceros

en x_s , $1 \leq s \leq m$. Entonces por el teorema fundamental del álgebra

$$P(t) + Q(t) = (t - \alpha) \prod_{s=1}^m (t - x_s),$$

entonces,

$$\begin{aligned} P(t) &= (t - \alpha) \prod_{s=1}^m (t - x_s) - \prod_{j=0}^m (t - y_j) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$= \left(-\alpha - \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=0}^m y_i \right) t^m \quad (\text{B.6})$$

$$+ \left(-\alpha \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j - \sum_{0 \leq i < j \leq m} y_i y_j \right) t^{m-1} + \dots (\text{B.7})$$

Como $P(t)$ tiene grado $n-1$, de las ecuaciones (B.1) y (B.6), obtenemos que $\alpha = 0$. Usando que $x_0 = 0$, el coeficiente de t^{m-1} puede escribirse como

$$\sum_{0 \leq i < j \leq m} x_i x_j - y_i y_j.$$

Finalmente observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i < j \leq m} x_i x_j - y_i y_j &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=0}^m x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^m y_i \right)^2 - \sum_{i=0}^m (x_i^2 - y_i^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (x_i^2 - y_i^2), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue nuevamente de aplicar la igualdad (B.1).

Por último, la igualdad (B.4) se sigue de expandir los x_i y los y_i

en términos de los α_i y β_i .

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (x_i^2 - y_i^2) \\
 = & -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^m (\beta_i - \alpha_i)^2 - (\beta_i - \alpha_{i+1})^2 \\
 = & -\frac{1}{2} \left(\alpha_0^2 - \alpha_{m+1}^2 + \sum_{i=1}^m (-2\beta_i \alpha_i + 2\beta_i \alpha_{i+1}) \right) \\
 = & \sum_{i=1}^m \beta_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\
 = & n,
 \end{aligned}$$

pues la última suma el área en cada altura de la escalera, la cual es n .

■

B.2. Otros Resultados

Recordemos que la **Función Zeta de Riemann** se define para todo número complejo z con $Re(z) > 1$ como sigue:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Proposición B.2.1 *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ se tiene que $\zeta(k) \in \mathbb{R}$ y se cumple que*

$$0 < \zeta(k) < \frac{k}{k-1}.$$

Proposición B.2.2 *Sea C el cuadrado con vértices en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*

$$\iint_C (x+y)^{2m} dx dy = \frac{2}{(2m+1)(2m+2)}.$$

Proposición B.2.3

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)(m+1)(m+2)} = \frac{1}{4}.$$

Proposición B.2.4 *Supongamos que el Diagrama de Ferrer de una partición Λ tiene N cajas. Entonces pueden taparse $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ filas y $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ columnas y cubrir todas las cajas de Λ .*

Proposición B.2.5 *Sea $\Lambda \in T_N$ y $\tilde{\Lambda} \in T$ el diagrama escalado. Sea θ el funcional de la definición 3.2.1. Sea $h_{(x,y)}$, (resp. $\tilde{h}_{(x,y)}$) la distancia gancho de la caja donde se encuentra el punto (x,y) respecto al diagrama Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$) y sea $h(x,y)$ (resp. $\tilde{h}(x,y)$) la distancia gancho del punto (x,y) con respecto al diagrama Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$) (es decir, $h_{(x,y)}$ es constante en cada caja, y es igual a $h(x,y)$ cuando (x,y) es precisamente el centro de ésta). Definimos $r(x,y) = h(x,y) - h_{(x,y)}$. Entonces:*

$$\theta(\tilde{\Lambda}) = 1 + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln \left[\frac{h_{x,y} \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right)}{\sqrt{N}} \right] dx dy.$$

Demostración. Considérese el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \Lambda(s) - s, \\ y &= \Lambda(t) + t. \end{aligned}$$

Entonces se cumple que $2(s - t) = h(x,y)$ y aplicando el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned}
\theta(\tilde{\Lambda}) &= 2 \iint_{t < s} \ln [2\sqrt{e}(s-t)] \left(1 - \tilde{\Lambda}'(s)\right) \left(1 + \tilde{\Lambda}'(t)\right) dt ds \\
&= 2 \iint_{\tilde{\Lambda}} \ln [\sqrt{e}\tilde{h}(x,y)] dx dy \\
&= 2 \iint_{\tilde{\Lambda}} \frac{1}{2} dx dy + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln \left[\frac{h(x,y)}{\sqrt{N}} \right] dx dy \\
&= 1 + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln \left[\frac{h(x,y)}{\sqrt{N}} \right] dx dy \\
&= 1 + \frac{2}{N} \iint_{\Lambda} \ln \left[\frac{h_{x,y} \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}}\right)}{\sqrt{N}} \right] dx dy,
\end{aligned}$$

como se deseaba. ■

Proposición B.2.6 Sean $h(x,y)$, $h_{x,y}$ y $r(x,y)$ como en la proposición anterior (supongamos que las cajas son abiertas en los bordes sur y éste, cerradas en el norte y sur al ser visto Λ como una escalera). Entonces existe un $0 < \theta_1 < 1$ tal que

$$\iint_{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right) dx = -\theta_1 \sqrt{N}.$$

Demostración. Obsérvese que $r(x,y) = [x] + [y] - (x + y + 1)$ es periódica en los cuadrillos. Se tiene entonces lo siguiente:

$$\iint_{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_{(i,j)} \ln \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{x,y}} \right) dx dy \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left(1 + \frac{x+y}{h_{x,y}} \right) dx dy \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_C \ln \left(1 + \frac{x+y}{h_{x,y}} \right) dx dy,
\end{aligned}$$

donde C es el cuadrado con vértices en $\left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$. Entonces, del desarrollo de Taylor de la función $\ln(1+x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_C \ln \left(1 + \frac{x+y}{h_{x,y}} \right) dx dy \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_C \left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(\frac{x+y}{h_{x,y}} \right)^m \right) dx dy \\
&= \sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_C \left(-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{x+y}{h_{x,y}} \right)^{2m} \right) dx dy < 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la Proposición (B.2.4) se puede desglosar la suma sobre todos los cuadritos en sumas sobre las primeras \sqrt{N} filas y \sqrt{N} columnas. Entonces, se sigue que si a Λ se le asocia la partición

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ y a su conjugada $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{l_2})$,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{(i,j) \in \Lambda} \iint_C \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{x+y}{h_{x,y}} \right)^{2m} \right) dx dy \\
& \geq - \sum_{i=1}^{\min\{l, [\sqrt{N}]\}} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \left(\iint_C \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{x+y}{h_{x,y}} \right)^{2m} \right) dx dy \right) \\
& \quad - \sum_{i=1}^{\min\{l_2, [\sqrt{N}]\}} \sum_{j=1}^{\bar{\lambda}_i} \left(\iint_C \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x+y}{h_{x,y}} \right)^{2m} \right) dx dy \right) \\
& \geq -2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_C \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{x+y}{k} \right)^{2m} \right) dx dy \right) \\
& = -2\sqrt{N} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\iint_C \frac{1}{2m} \left(\frac{x+y}{k} \right)^{2m} dx dy \right).
\end{aligned}$$

Así, por la Proposición (B.2.2) y la definición de la función Zeta de Riemann

$$= -2\sqrt{N} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2}{(2m+1)(2m+2)} \right) \zeta(2m) \right),$$

ahora, por la Proposición (B.2.1)

$$\begin{aligned}
& \geq -2\sqrt{N} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2m-1)(2m+1)(2m+2)} \right) \\
& \geq -2\sqrt{N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)(m+1)(m+2)} \\
& > -\sqrt{N}.
\end{aligned}$$

Esto ultimo debido a la Proposición (B.2.3). Finalmente se concluye que

$$\begin{aligned} -\sqrt{N} &< \iint_{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{ij}(x,y)} \right) dx < 0 \\ \Rightarrow \iint_{\Lambda} \ln \left(1 + \frac{r(x,y)}{h_{ij}(x,y)} \right) dx &= -\theta_1 \sqrt{N}, \end{aligned}$$

para algún $0 < \theta_1 < 1$. ■

Proposición B.2.7

$$\frac{\exp \left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - (\varepsilon + 1) N^{\frac{1}{2}} \right)}{4N\sqrt{3}} = o \left(e^{-\varepsilon\sqrt{N}} \right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\exp \left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - (\varepsilon + 1) N^{\frac{1}{2}} \right)}{4N\sqrt{3}}}{\exp(-\varepsilon\sqrt{N})} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\exp \left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - N^{\frac{1}{2}} \right)}{4N\sqrt{3}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\exp \left(\frac{1}{2} \ln N - O(1) - N^{\frac{1}{2}} \right)}{4N\sqrt{3}} = 0, \end{aligned}$$

puesto que el numerador tiende a 0 y el denominador a ∞ . ■

Teorema B.2.8 (*Fórmula de Stirling*)

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O \left(\frac{1}{n} \right).$$

Teorema B.2.9 (*Fórmula de Particiones de Hardy-Ramanujan*)

$$|T_N| \approx \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{N}}{\sqrt{6}}\right)}{4N\sqrt{3}}.$$

Teorema B.2.10 *Sea $\Phi(z)$ una función analítica en $\text{Im } z > 0$. si $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^2 dx$ existe para cualquier $y > 0$, entonces, si $y \rightarrow 0$, $\Phi(x + iy)$ converge a una función $\Phi(x)$, y $\Phi(x + iy) \rightarrow \Phi(x)$ para casi toda x . Para $y > 0$*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u)}{u - z} du.$$

Si $\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, entonces $\Phi(x) = f(x) - ig(x)$, donde U, V, g y f cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt, \\ V(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - x)f(t)}{(t - x)^2 + y^2} dt, \\ U(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - x)g(t)}{(t - x)^2 + y^2} dt, \\ V(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t - z} dt, \end{aligned}$$

en particular, f y g son transformadas de Hilbert conjugadas, es decir, si P denota el valor principal en $x = t$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x} dt, \\ f(x) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t - x} dt. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Akhiezer, N.I. (1965). *The Classical Moment Problem*. Oliver & Boyd, Edinburgh-London.
- [2] Arizmendi, O. (2008). *Divisibilidad Infinita Libre de Medidas de Probabilidad*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, México.
- [3] Bandlow, J. (2008). An elementary proof of the Hook formula. *The Electronic Journal of Combinatorics* **15**, #R45.
- [4] Bercovici, H. & Voiculescu, D. (1993). Free convolution of measures with unbounded supports. *Indiana Journal of Mathematics* **42**, 733–773.
- [5] Ben Ghorbal, A. & Shürman, M. (2002). Non-commutative notions of stochastic independence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **133** 531-561.
- [6] Biane, P. (1998). Representations of symmetric groups and free probability. *Advances in Mathematics* **138**, 126–181.
- [7] Biane, P. (2003). *Characters of the symmetric groups and free cumulants*. Lecture Notes in Mathematics **1815**, 185–200, Springer, Berlin.

-
- [8] Biane, P. (2006). On the formula of Gouldan and Ratan for Kerov's character polynomial. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* **55**, article B55d.
- [9] Borodin, A. Okounkov, A. & Olshanski, G. (2000). Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups. *Journal of the American Mathematical Society* **13**, 481–515.
- [10] Donoghue, W (1974). *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*. Springer, New York.
- [11] Franz, U. & Muraki, N. (2005). Markov property of monotone Lévy processes. In *Infinite Dimensional Harmonic Analysis III*. (editores H. Heyer, T. Hirai, T. Kawazoe, K. Saito). World Scientific, Singapore, pp 37–57.
- [12] Kerov, S. V. (1993). Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem. *Functional Analysis and Applications* **27**, 104–117.
- [13] Kerov, S. V. (2000). Anisotropic Young diagrams and Jack symmetric functions. *Functional Analysis and Applications* **31**, 41–51.
- [14] Kerov, S. V. & Vershik, A. M. (1977). Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables. *Soviet Mathematics Doklady* **18**, 527–531.
- [15] Kerov, S. V. & Vershik, A. M. (1981). The asymptotics character theory of the symmetric group. *Functional Analysis and Applications* **15**, 246–255.
- [16] Lassalle, M. (2008). Jack polynomials and free cumulants. *arXiv:0802.0448v2*, Pre-impreso.
- [17] Logan, B. F. & Shepp, L. A. (1977). A variational problem for random Young tableaux. *Advances in Mathematics* **26**, 206–222.

- [18] Muraki, N. (2001). Monotonic Independence, Monotonic Central Limit Theorem and Monotonic Law of Small Numbers. *Infinite dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **4**, 39–58.
- [19] Muraki, N. (2003). The five independences as natural products. *Infinite dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **6**, 337–371.
- [20] Nica, A. & Speicher, R. (2006). *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*. London Mathematical Society Lecture Notes Series **335**, Cambridge University Press, Cambridge.
- [21] Okounkov, A. & Vershik, A. (1996). A new approach to representation theory of symmetric groups, *Selecta Mathematica, New Series*, **2** 581–605.
- [22] Sagan, B. E. (1991). *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions*, Graduate Texts in Mathematics **203**, Springer.
- [23] Speicher, R. & Woroudi, R. (1995), Boolean convolution, *Fields Institute Communications* **12**, (editor: D. Voiculescu) 267–279.
- [24] Takesaki, M. (2002). *Theory of Operator Algebras I*. Enciclopedia of Mathematical Sciences **124**, Springer-Verlag.
- [25] Teschl, G. (2000). *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. Mathematical Surveys and Monographs **72**, American Mathematical Society, Providence.
- [26] Titchmarsh, E. C. (1937). *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford at the Clarendon Press, Oxford.

- [27] Vázquez, A. (2006). *Teoría Espectral de Operadores de Jacobi*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, México.
- [28] Voiculescu, D. (1986). Addition of certain non-commuting random variables. *Journal of Functional Analysis* **66**, 323–346.