Divisibilidad Infinita Libre de Medidas de Probabilidad

Octavio Arizmendi Echegaray

Facultad de Matemáticas

Universidad de Guanajuato

Junio 2008 Guanajuato, Guanajuato

A mis padres, Lilia y Enrique,

y a mis hermanos, Damián y Gerardo

Agradecimientos

En estas líneas me es imposible nombrar a todas la personas e instituciones que contribuyeron de alguna forma a la realización de este trabajo.

En primer lugar, doy las gracias a mis padres que me han apoyado en cualquier proyecto que he decidido emprender en mi vida y cuya dirección me ha permitido concluir una carrera.

Quisiera mencionar el aprecio que le tengo a mi director de tesis Dr. Víctor Manuel Pérez Abreu Carrión y reconocerle el tiempo, la tolerancia y la confianza que me ha otorgado, sin lo cual no habría sido posible esta tesis.

Agradezco los comentarios y el tiempo que le dedicaron a la revisión de esta tesis los sinoidales Dr. Luis Gabriel Gorostiza y Dr. Stephen Bruce Sontz. Doy gracias al Dr. Constantin Tudor por sus valiosos comentarios y a mi amigo Carlos Vargas Obieta por sus observaciones al Capítulo 4.

Finalmente, agradezco a la Universidad de Guanajuato, al CIMAT y al CONACYT por las becas y apoyos que me otorgaron durante mi licenciatura, y al Sistema Nacional de Investigadores por el apoyo como ayudante de investigador nacional (SNI4337).

Contenido

Introducción

Esta tesis de licenciatura aborda el tema de convolución libre y divisibilidad infinita libre de medidas de probabilidad. El objetivo principal es exponer de manera detallada los fundamentos de esta teoría, hacer una revisión de las técnicas existentes para probar si una medida de probabilidad es infinitamente divisible en el sentido libre y presentar una serie de ejemplos, algunos conocidos y otros nuevos, que permitan apreciar claramente las ventajas y dificultades de estas técnicas.

El tema forma parte de la Teoría de Probabilidad Libre (Free Probability), en donde los objetos de interés no son variables aleatorias clásicas, sino variables aleatorias libres (no conmutativas) y en lugar de productos tensoriales se consideran productos libres; conceptos que aparecen, por ejemplo, en el contexto de álgebras de operadores. Esta teoría se inicia en la década de los 80 con los trabajos de Voiculescu [51], [52], [53] en conexión con algunas preguntas sobre teoría de álgebras de operadores, así como suma y multiplicación de variables aleatorias no conmutativas.

Otro contexto importante -abordado brevemente en esta tesis- en el que aparecen objetos no conmutativos es el de matrices aleatorias de dimensión grande, cuyo comportamiento asintótico proporciona una de las mayores aplicaciones de la teoría de probabilidad libre. La razón de esto es el hecho de que el conocer los valores propios de dos matrices no es, en general, suficiente para encontrar los valores propios de su suma, a menos que las matrices conmuten. Sin embargo, en el marco de probabilidad libre, Voiculescu [54] identificó una condición suficiente -llamada relación libre asintótica- bajo la cual el espectro asintótico de la suma puede obtenerse de los espectros asintóticos de los sumandos. Esto corresponde, precisamente, a calcular la convolución libre (aditiva) de medidas espectrales asintóticas de matrices aleatorias.

Actualmente, la probabilidad libre tiene también una relación importante con otras ramas de las matemáticas tales como combinatoria, probabilidad clásica, representaciones de grupos simétricos, así como con algunos modelos matemáticos de física, comunicaciones y teoría de información.

Los conceptos de convolución libre y la divisibilidad infinita asociada (libre) aparecen de manera natural al hacer un paralelismo con la convolución clásica de medidas y la divisibilidad infinita en la Teoría de Probabilidad Clásica. Su estudio puede abordarse desde dos puntos de vista: analítico y combinatorio. En esta tesis presentamos ambos planteamientos.

El primer enfoque, basado en la teoría de funciones analíticas, fue iniciado en 1986 por Voiculescu [52] para el caso de medidas con soporte compacto, continuado en 1992 por Maaseen [34] para el caso de medidas con segundo momento finito y completado en 1993 por Bercovici y Voiculescu [10] para medidas con soporte no acotado.

Por otro lado, a finales de la década de los 90, Speicher [38], [44] propone el uso de cumulantes libres, lo que proporciona herramientas puramente de combinatoria para estudiar divisibilidad infinita libre de una forma muy elegante, pero con la restricción de considerar medidas determinadas por sus momentos, en particular aquellas con soporte compacto. Es importante mencionar que, contrario a lo que sucede en divisibilidad infinita clásica en donde una distribución no trivial no puede tener soporte compacto, en divisibilidad infinita libre son muchas las distribuciones con esta propiedad que tienen soporte acotado.

En probabilidad clásica es bien conocido el hecho que las leyes infinitamente divisibles clásicas se caracterizan con base en una representación de Lévy-Khintchine para su función cumulante clásica (el logaritmo de su transformada de Fourier); ver por ejemplo Sato [42]. De manera similar es posible definir transformadas cumulantes libres y encontrar una caracterización tipo Lévy-Khintchine para distribuciones infinitamente divisibles libres. Esto fue probado en 1993 por Bercovici y Voiculescu [10] y recientemente Barndorff-Nielsen y Thorbjønsen [7] proponen una variante que resulta más análoga a la del caso clásico.

En el contexto del estudio de distribuciones estables, en 1999 Bercovici y Pata [9] introdujeron una biyección entre distribuciones infinitamente divisibles clásicas y libres. La biyección es tal que a una función cumulante clásica le asocia una transformada cumulante libre. En particular, a la distribución Gaussiana[1] le asocia la ley del semicírculo, a la distribución de Poisson la distribución de Poisson libre y a las distribuciones estables clásicas las estables libres, teniendo como punto fijo a la distribución de Cauchy. En general, no son muchos más los casos concretos reportados en la literatura. En esta tesis encontramos nuevos resultados sobre la biyección entre leyes infinitamente divisibles con soporte no negativo.

Pensamos que el conocimiento de ejemplos concretos de distribuciones infinitamente divisibles libres se encuentra en el estado en el que se encontraba hace 50 años el conocimiento de distribuciones infinitamente divisibles clásicas concretas. Para ser más específicos, recordamos que si bien la teoría de distribuciones infinitamente divisibles clásicas fue desarrollada en las décadas de 1920 y 1930, a principios de los años 1960 eran pocos los ejemplos concretos que se conocían, además de la distribución Gaussiana, la Poisson y las estables.

En este trabajo presentamos nuevos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles libres, así como conjeturas para ejemplos de familias de distribuciones para las cuales se tienen respuestas parciales. Asimismo, identificamos algunas distribuciones que son infinitamente divisibles en ambos sentidos.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 damos algunas definiciones básicas que se utilizarán más adelante. Primero recordaremos de forma muy breve conceptos básicos de probabilidad. En seguida presentemos una estructura que se conoce como espacio de probabilidad no-conmutativo. En este marco se define la relación de independencia libre de variables aleatorias con medida espectral de soporte compacto. Además presentamos dos ejemplos donde surgen como distribuciones espectrales la ley del arcoseno y la ley del semicírculo. Finalmente, se introduce el espacio de matrices aleatorias de dimensión infinita como ejemplo de espacio de probabilidad no-conmutativo, en donde se explica el concepto de relación asintótica libre para matrices aleatorias.

En el Capítulo 2 introducimos las herramientas analíticas para el estudio de la convolución libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Comenzamos recordando el concepto de funciones de Pick y la teoría de Nevanlinna-Pick. Seguido de esto, se presentan resultados sobre la transformada de Cauchy de una medida y su recíproca. Se introducen la transformada de

[1] Usamos el término Gaussiano para una distribución normal, ya que el término normal lo dejamos para operadores normales.

Voiculescu y la transformada cumulante libre, las cuales son funciones analíticas definidas a partir de la transformada de Cauchy y que se comportan en forma similar al logaritmo de la transformada de Fourier en convolución y probabilidad clásica. De especial importancia es el hecho de que linealizan la convolución libre aditiva. Finalmente se presenta la transformada S, que sirve para estudiar la convolución multiplicativa. El capítulo termina con la presentación de varias de las distribuciones tradicionales en la teoría de probabilidad libre, así como otras nuevas.

En el Capítulo 3 presentamos los conceptos de convolución y divisibilidad infinita libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ desde un punto de vista analítico. Primero definimos la convolución libre de dos medidas a partir de la transformada cumulante libre. A partir de esta convolución introducimos el concepto de divisibilidad infinita libre, sus principales propiedades, así como diferencias importantes con la convolución clásica. Se introduce la biyección de Bercovici-Pata entre leyes infinitamente divisibles clásicas y libres, así como sus principales propiedades. Como aportación de este trabajo, se hace un estudio específico de la correspondiente biyección en el caso de distribuciones infinitamente divisibles libres provenientes de distribuciones infinitamente divisibles clásicas con soporte no negativo (subordinadores). Se presenta de manera breve la convolución multiplicativa, con el objeto de dar interpretaciones a algunos ejemplos. Concluimos el capítulo con la presentación de ejemplos tanto tradicionales como nuevos.

En el Capítulo 4 retomamos los conceptos de convolución y divisibilidad infinita libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ desde un punto de vista combinatorio. Primero observamos la relaciones entre los momentos, los cumulantes clásicos y los cumulantes libres. Se presenta la convolución libre de medidas a través de los cumulantes libres y se retoma la biyección de Bercovici-Pata vista como una biyección entre cumulantes clásicos y cumulantes libres. En seguida estudiamos dos criterios para decidir si una distribución es infinitamente divisible en el sentido libre, el primero en términos de los cumulantes libres y el segundo en termino de los coeficientes de Jacobi. De igual forma que en el capítulo anterior, se culmina este capítulo con la presentación de ejemplos tanto tradicionales como nuevos.

Con el objeto de hacer el trabajo lo más independiente posible, al final del mismo hemos incluido dos apéndices, relacionados con el enfoque combinatorio. El Apéndice A contiene los resultados principales sobre particiones que no se cruzan, mientras que en el Apéndice B se expone un resumen del problema de momentos y sucesiones positivas definidas.

Finalmente, queremos mencionar algunos temas importantes de divisibilidad infinita libre no considerados en esta tesis. En primer lugar está el estudio de teoremas centrales de límite para sumas de variables aleatorias libres, considerado, por ejemplo, en Voiculescu [52]. Segundo, el enfoque reciente de matrices aleatorias propuesto por Benaych-Georges [8] para estudiar la biyección de Bercovici-Pata, el cual generaliza el trabajo pionero de Wigner [55] quien encontró que la ley del semicírculo es la distribución espectral límite del ensamble de matrices aleatorias Gaussianas.

Capítulo 1

Elementos de Probabilidad Libre

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas que se utilizarán en la tesis más adelante. Primero recordaremos de forma muy breve conceptos básicos de probabilidad. El primer motivo para hacer esto es que creemos que los temas abordados en esta tesis pueden interesar a lectores que no estén familiarizados con probabilidad. El segundo es que a lo largo de la tesis haremos una fuerte analogía entre objetos en probabilidad clásica y sus correspondientes en probabilidad libre, por ejemplo, las nociones de variables aleatorias y variables aleatorias no-conmutativas. En seguida, introducimos una estructura que se conoce como espacio de probabilidad no-conmutativo, enfocaremos nuestra atención en variables aleatorias no-conmutativas normales y su medida espectral. Finalmente, en este marco, podremos definir la relación libre de variables aleatorias con medida espectral de soporte compacto.

1.1 Espacios de Probabilidad Clásica

1.1.1 Definiciones Básicas

Empecemos recordando lo que se conoce como un espacio de probabilidad clásica[1], según los axiomas dados por Kolmogorov en 1933.

Definición 1.1.1 *Un espacio de probabilidad es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *donde* Ω *es un conjunto*

[1] No confundir con el concepto de probabilidad clásica que se refiere a resultados equiprobables en cursos introductorios de probabilidad.

no vacío, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad. Es decir,

$\mathcal{F}$ satisface las siguiente propiedades

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, *entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

(3) Si $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$.

Mientras que $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *es tal que*

(4) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(5) $\mathbb{P}$ *es σ-aditiva: Si* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *y* $A_n \cap A_m = \phi$ *siempre que* $n \neq m$, *entonces*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Observamos que el par $(\Omega, \mathcal{F})$ no es más que un espacio medible y que los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ se conocen como eventos. La colección de todos los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, si es $\mathcal{B}(\mathbb{R})-$medible.

Definición 1.1.2 (Variable aleatoria clásica) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria real, si es $\mathcal{F}$-medible en $\mathbb{R}$, esto es, $\{w : X(w) \in B\}$ está en $\mathcal{F}$, siempre que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Decimos que la medida μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es la distribución de X si*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mu(A) = \int_A \mu(dt) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Equivalentemente podemos definir a μ como la única medida que cumple que para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible acotada

$$E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_\mathbb{R} f(x)\mu(dx) \ .$$

Recordemos que una sucesión $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de medidas converge débilmente a la medida μ, si para toda función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x)\mu_n(dx) = \int_\mathbb{R} f(x)\mu(dx).$$

En este caso usaremos la notación $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. En el caso en que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ son medidas de probabilidad, esta convergencia también se conoce como convergencia en distribución.

Sean X e Y son variables aleatorias en un espacio de probabilidad y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, definimos la esperanza $E[f(X,Y)]$ como

$$E[f(X,Y)] = \int_\Omega f(X(\omega), Y(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$$

si la integral existe.

En particular definimos el momento de orden n de X (con distribución μ en $\mathbb{R}$) como

$$m_n(\mu) = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx).$$

1.1.2 Independencia y Convolución Clásica

Será muy útil estudiar variables aleatorias independientes en términos de la esperanza, vista como una funcional lineal, en analogía con la propiedad lineal de la esperanza. Para ello es necesario recordar el concepto de independencia clásica.

Definición 1.1.3 *Dos variables aleatorias X e Y son independientes si*

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \qquad \textit{para todo } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

En general, $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes si para todo $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas lo es.

Si suponemos que las variables aleatorias X e Y tienen distribuciones con soporte acotado, entonces todos los momentos de X e Y existen y determinan sus distribuciones. Además la condición de que X e Y sean independientes es equivalente a la siguiente condición

$$E[X^{n_1}Y^{m_1}...X^{n_k}Y^{m_k}] = E[X^{n_1+...+n_k}]E[Y^{m_1+...+m_k}],$$

para cada m_i, $n_i \in \mathbb{N}$.

Más formalmente, independencia de X e Y es equivalente a que se tengan las no correlaciones:

$$E\{[f(X) - E\{f(X)\}] \cdot [g(Y) - E\{g(Y)\}]\} = 0, \tag{1.1}$$

para cualesquiera funciones de Borel acotadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

De esta forma, si X e Y tienen soporte acotado y son independientes, los momentos de la variable aleatoria $X + Y$ se pueden obtener a partir de los momentos de X y los momentos de Y, equivalentemente tenemos que la distribución μ_{X+Y} está determinada por las distribuciones μ_X y μ_Y. Esto es la convolución clásica

$$\mu_X \star \mu_Y = \mu_{X+Y}.$$

La principal herramienta analítica para manejar esta convolución es el concepto de transformada de Fourier o función característica de una variable aleatoria.

Definición 1.1.4 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ y X una variable aleatoria con distribución μ. Definimos a $\widehat{\mu_X}$, la **función característica** de X, por*

$$\widehat{\mu_X}(t) := \int e^{itx}\mu(dx) = E[e^{itX}].$$

En el caso en que la distribución de X tiene soporte acotado tenemos la expansión

$$\widehat{\mu}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E[X^n],$$

es decir, la transformada de Fourier no es otra cosa que la serie exponencial de los momentos de X. La importancia de la transformada de Fourier en este trabajo es el hecho de que su logaritmo (cuando existe) linealiza la convolución clásica. Es decir, si μ_X y μ_Y son distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias independientes X e Y, entonces $\widehat{\mu_{X+Y}}(t) = \widehat{\mu_X}(t)\widehat{\mu_Y}(t)$

y por lo tanto

$$\log \widehat{\mu_{X+Y}}(t) = \log \widehat{\mu_X}(t) + \log \widehat{\mu_Y}(t).$$

Cuando existe, al logaritmo de la transformada de Fourier $C_X(t) = \log \widehat{\mu_X}(t)$ se le llama función cumulante clásica.

1.2 Espacios de Probabilidad No Conmutativos

Definición 1.2.1 *Un* ***espacio de probabilidad no-conmutativo*** *es un par* $(\mathcal{A}, \tau)$ *donde* $\mathcal{A}$ *es un álgebra unitaria compleja y* τ *es una funcional lineal* $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *tal que* $\tau(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$*. Una* ***variable aleatoria no-conmutativa*** *es simplemente un elemento* a *de* $\mathcal{A}$*.*

Una propiedad adicional que a veces es útil imponer a la funcional lineal τ es que sea una **traza**, es decir, tiene la propiedad que

$$\tau(ab) = \tau(ba) \text{ para todo } a, b \in \mathcal{A}.$$

Supondremos que $\mathcal{A}$ es una $*$**-álgebra**, es decir que $\mathcal{A}$ está dotado de una $*$**-operación anti-lineal** ($(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{A}$), tal que $(a^*)^* = a$ y $(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Si se tiene que

$$\tau(a^* a) \geq 0, \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

decimos que τ es positiva y llamamos a $(\mathcal{A}, \tau)$ un $*$**-espacio de probabilidad**.

En el marco de un $*$-espacio de probabilidad podemos hablar de tres tipos de variables aleatorias:

a) variable aleatoria **autoadjunta:** $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$,

b) variable aleatoria **unitaria**: $u \in \mathcal{A}$ tal que u^*u=$uu^* = 1$,

c) variable aleatoria **normal**: $a \in \mathcal{A}$ tal que $aa^* = a^*a$.

Es de interés conocer los momentos de una variable aleatoria cualquiera a en $(\mathcal{A}, \tau)$, es decir el valor de

$$\tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1} ... a^{m_k}(a^*)^{n_k})$$

para cada m_i, $n_i \in \mathbb{N}$. Para esto se define la **$*$-distribución** de a. Denotamos por $\mathbb{C}\langle x, y\rangle$ al álgebra de polinomios en dos variables (no conmutativas) con coeficientes en los complejos.

Definición 1.2.2 *Dada una variable aleatoria a en $(\mathcal{A}, \tau)$, la **$*$-distribución (en el sentido algebraico)** de a es la funcional lineal $\mu_a : \mathbb{C}\langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\mu_a(x^{m_1}(y)^{n_1}...x^{m_t}(y)^{n_k}) = \tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_k}(a^*)^{n_k})$$

para cada m_i, $n_i \in \mathbb{N}$.

En el caso en que $a \in \mathcal{A}$ es normal definimos alternativamente la $*$-distribución de $a \in \mathcal{A}$ de la siguiente manera.

Definición 1.2.3 *Sea $(\mathcal{A}, \tau)$ un $*$-espacio de probabilidad y sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Si existe una medida μ en $\mathbb{C}$ con soporte compacto, tal que*

$$\int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z}^l \mu(dz) = \tau(a^k(a^*)^l), \text{ para todo } k, l \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

*diremos que μ es la **$*$-distribución (en el sentido analítico)** de a.*

Observación 1.2.4 *Cuando existe μ que cumple con la condición (1.2) entonces μ es única por el Teorema de Stone-Weierstrass. Entonces tiene sentido hablar de la $*$-distribución (en el sentido analítico) de a.*

Cuando a es autoadjunta, la $*$-distribución de a tiene soporte sobre $\mathbb{R}$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |z - \overline{z}|^2 \mu(dz) &= \int_{\mathbb{C}} (z - \overline{z})(\overline{z} - z)\mu(dz) \\ &= \int_{\mathbb{C}} (2z\overline{z} - z^2 - \overline{z}^2)\mu(dz) \\ &= 2\tau(aa^*) - \tau(a^2) - \tau((a^*)^2) = 0\end{aligned}$$

de donde $z - \overline{z} = 0$ en el soporte de μ, entonces

$$sop(\mu) \subset \{z \in \mathbb{C} : z = \overline{z}\} = \mathbb{R}.$$

Así, en este caso μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ y la ecuación (1.2) toma la forma

$$\int_{\mathbb{R}} t^p \mu(dt) = \tau(a^p), \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

Cuando a es autoadjunto llamaremos a su $*$-distribución μ la **medida espectral** de a. Estaremos interesados especialmente en este tipo de elementos y sus medidas espectrales. En este trabajo se estudiarán principalmente medidas con soporte en $\mathbb{R}$, de ahí la importancia de los elementos autoadjuntos para nosotros.

1.2.1 C*-espacios de Probabilidad

El tipo de espacios de probabilidad no-conmutativos que estudiaremos estarán dotados de una estructura de C^*-álgebra. Esto nos permitirá usar algunos de los resultados de esta teoría para poder asegurar la existencia de $*$-distribuciones en el sentido analítico para cualquier elemento normal. Recordamos a continuación lo que es una C^*-álgebra.

Definición 1.2.5 *Decimos que un álgebra $\mathcal{A}$ es una **C*-álgebra** si $\mathcal{A}$ está dotada de una norma $\|\cdot\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ que la hace un espacio de Banach, tal que:*

i) $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$,

ii) $\|a^*a\| \leq \|a\|^2$, para todo $a \in \mathcal{A}$.

El correspondiente $*$-espacio de probabilidad se define de la siguiente manera.

Definición 1.2.6 *Un **C*-espacio de probabilidad** es un $*$-espacio de probabilidad $(\mathcal{A},\tau)$ donde $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra*

Necesitaremos algunas de las propiedades y definiciones de la teoría de C^*-álgebras, tal como se presenta en Nica y Speicher [39]. Recordemos que el espectro de a es el conjunto

$$Sp(a) = \{z \in \mathbb{C} : z1_{\mathcal{A}} - a \text{ no es invertible}\}.$$

Denotamos por $\mathbf{C(Sp(a))}$ el álgebra de funciones continuas $f : Sp(a) \to \mathbb{C}$.

Teorema 1.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra unitaria.*

i) Para todo $a \in \mathcal{A}$, $Sp(a)$ es un conjunto no vacío contenido en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\}$.

ii) Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Existe una aplicación $\Phi_a : C(Sp(a)) \to \mathcal{A}$ con las siguientes propiedades.

a) Φ_a es un homomorfismo.

b) $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ para toda $f \in C(Sp(a))$.

c) Si $id : Sp(a) \to \mathbb{C}$ denota la identidad $id(z) = z$ en $C(Sp(a))$, entonces $\Phi_a(id) = a$.

A Φ_a se le conoce como **cálculo funcional con funciones continuas** para el elemento a. De estas propiedades se puede obtener, para elementos normales, que para cualquier función $f \in C(Sp(a))$ se tiene

$$Sp(f(a)) = f(Sp(a))$$

donde $f(a)$ está definido por el cálculo funcional.

A continuación presentamos uno de los teoremas más importantes de C^*-espacio de probabilidad.

Teorema 1.2.8 *[39, Prop. 3.13] Sea $(\mathcal{A},\tau)$ un C^*-espacio de probabilidad y sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento normal. Entonces a tiene una $*$-distribución en el sentido analítico. Más aún, si μ es la $*$-distribución de a se tiene que*

i) El soporte de μ está contenido en el espectro de a.

ii) Para $f \in C(Sp(a))$ tenemos la fórmula

$$\int f d\mu = \tau(f(a)).$$

1.3 Independencia Libre

La noción de **relación libre (freeness)** entre dos variables aleatorias fue introducida en 1985 por Voiculescu [52], quién notó que la relación libre se comporta de forma análoga al concepto clásico de independencia, pero en espacios de probabilidad no-conmutativos.

En el contexto de $*$-espacios de probabilidad $(\mathcal{A},\tau)$ se define la **independencia libre** o **relación libre** de una manera análoga a la fórmula (1.1) para el caso de independencia clásica. Sin embargo, para este caso se hace en términos de la funcional lineal τ ya que no tenemos variables aleatorias clásicas, sino variables aleatorias no-conmutativas, es decir, elementos de $(\mathcal{A}, \tau)$. Definimos entonces la relación libre de la siguiente manera.

Definición 1.3.1 *Las variables aleatorias no-conmutativas $a, b \in \mathcal{A}$ se dicen en* ***relación libre (con respecto a*** τ***)*** *si*

$$\tau[p_1(a)q_1(b)p_2(a)q_2(b)...p_n(a)q_n(b)] = 0$$

siempre que p_i y q_j sean polinomios tales que

$$\tau[p_i(a)] = 0 = \tau[q_j(b)].$$

Una familia de subálgebras A_i, $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in A_i$, $i \in I$ en un espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \tau)$ se dice que es libre si $\tau(a_1 a_2 ... a_n) = 0$ siempre que $\tau(a_j) = 0$, $a_j \in A_{i(j)}$,y $i(1) \neq i(2) \neq ... \neq i(n)$. Más generalmente, una familia de subconjuntos $\Omega_i \subset A, i \in I$ es libre si las álgebras generadas por $\Omega_i \cup \{\mathbf{1}\}$ son libres.

Al igual que para el caso de variables aleatorias clásicas, esta relación de independencia puede entenderse como una regla para calcular los momentos mixtos de a y de b, permitiéndonos calcular los momentos de $a + b$ y de ab. Así, si $\{a, b\}$ es un par libre de variables aleatorias, entonces las $*$-distribuciones μ_{a+b} de $a + b$ y μ_{ab} de ab dependen sólo de la $*$-distribución μ_a de a y de la $*$-distribución μ_b de b.

Así, si μ_a y μ_b son medidas con soporte compacto en $\mathbb{C}$, podemos definir las operaciones $\boxplus, \boxtimes$ de convolución libre aditiva y multiplicativa, respectivamente, a través de las formulas

$$\begin{aligned} \mu_a \boxplus \mu_b &= \mu_{a+b} \\ \mu_a \boxtimes \mu_b &= \mu_{ab}. \end{aligned}$$

Si μ y ν son medidas en $\mathbb{R}$ con soporte compacto, se pueden encontrar a y b variables aleatorias no-conmutativas autoadjuntas en un C^*-espacio de probabilidad tales que a tenga $*$-distribución μ y b tenga $*$-distribución ν. Si pedimos que a y b estén en relación libre, entonces la $*$-distribución de $a + b$ se llama la convolución libre de μ y ν, la cual se denota por $\mu \boxplus \nu$. Por ejemplo, se pueden tomar a y b como operadores de multiplicación con la función identidad en los espacios de Hilbert $L^2(\mu)$ y $L^2(\nu)$, respectivamente, y después tomar el producto libre de estos C^*-espacios de probabilidad para hacer que a y b estén en relación libre; este resultado se presenta en el libro de Nica y Speicher [46, Lec. 6].

El hecho de que $\mu \boxplus \nu$ no dependa de la elección de a y b se sigue de que la $*$-distribución de $a+b$ sólo depende de los momentos de a y b los cuales están determinados por μ y ν.

De las relaciones de arriba no es claro que la definición de relación libre es diferente de la definición de independencia en el sentido clásico. Sin embargo, podemos ver que el momento mixto $\tau(abab)$ puede ser diferente de $\tau(a^2)\tau(b^2)$. En efecto, dado que

$$\tau(a_i - \tau(a_i)1_{\mathcal{A}}) = 0$$

tenemos que

$$\tau(a_1 - \tau(a_1)1_{\mathcal{A}})\tau(a_2 - \tau(a_2)1_{\mathcal{A}})\tau(a_3 - \tau(a_3)1_{\mathcal{A}})\tau(a_4 - \tau(a_4)1_{\mathcal{A}}) = 0$$

de donde se puede obtener fácilmente que

$$\tau(a_1a_2a_3a_4) = \tau(a_1a_3)\tau(a_2)\tau(a_4) + \tau(a_1)\tau(a_3)\tau(a_2a_4) - \tau(a_1)\tau(a_2)\tau(a_3)\tau(a_4),$$

siempre que $\{a_1, a_3\}$ y $\{a_2, a_4\}$ están en relación libre. En particular, cuando $a_1 = a_3 = a$ y $a_2 = a_4 = b$ son libres tenemos que

$$\tau(abab) = \tau(a)^2\tau(b^2) + \tau(a^2)\tau(b)^2 - \tau(a)^2\tau(b)^2.$$

Más aún, para que dos variables aleatorias sean independientes en el sentido clásico y estén en relación libre se debe tener que una de ellas es una función constante, lo que se obtiene como caso particular del siguiente lema.

Lema 1.3.1 *Sean a,$b \in A$ dos variables aleatorias conmutativas y en relación libre con respecto a τ. Entonces*

$$\tau((a-\tau(a)1)^2) = 0 \text{ ó } \tau((b-\tau(b)1)^2) = 0.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\tau(a^2)\tau(b^2) &= \tau(a^2b^2) = \tau(abab)\\ &= \tau(a)^2\tau(b^2) + \tau(a^2)\tau(b)^2 - \tau(a)^2\tau(b)^2\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}0 &= (\tau(a^2) - \tau(a)^2)(\tau(b^2) - \tau(b)^2)\\ &= \tau((a - \tau(a)1_{\mathcal{A}})^2)\tau((b - \tau(b)1_{\mathcal{A}})^2).\end{aligned}$$

■

1.4 Ejemplos

1.4.1 Elementos Haar Unitarios y P-Haar Unitarios

En esta sección presentamos dos ejemplos de variables aleatorias no-conmutativas y encontramos su $*$-distribución.

Definición 1.4.1 *Sea $(\mathcal{A}, \tau)$ un $*$-espacio de probabilidad no-conmutativo.*

*a) Un elemento $u \in \mathcal{A}$ se dice que es **Haar Unitario** si es unitario y*

$$\tau(u^k) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

*b) Sea p un entero positivo. Un elemento $u \in \mathcal{A}$ se dice que es **p-Haar unitario** si es unitario, si $u^p = 1$ y si*

$$\tau(u^k) = 0, \ \text{si } p \text{ no divide a } k.$$

El nombre de "Haar unitario" viene del hecho de que cuando u es como en (a) arriba entonces la medida de Haar en el círculo sirve como $*$-distribución para u. En efecto, un elemento unitario de Haar cumple que

$$\tau(u^k(u^*)^l) = \tau(u^{k-l}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = l \\ 1 & \text{si } k \neq l \end{cases}, \tag{1.3}$$

y para la medida de Haar se tiene

$$\int_{\mathbb{S}} z^k \overline{z}^l dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k = l \\ 1 & \text{si } k \neq l \end{cases},$$

donde $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{C}$ y dz es la medida de Haar en $\mathbb{S}$ normalizada.

Por otra parte, si tomamos una medida uniforme en las raíces de la unidad de orden p, $\omega_1, \omega_2 ... \omega_p$, es decir

$$\mu = \frac{1}{p}(\sum_{j=1}^{p} \delta_{\omega_j}),$$

del hecho de que las raíces de la unidad suman cero se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z}^l \mu(dz) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = l \\ 1 & \text{si } k \neq l \end{cases},$$

lo que nos dice que μ es la $*$-distribución de un elemento p-Haar unitario. En la Sección 4.6.5 mostraremos que esta distribución es la medida de Lévy asociada a la distribución p-Poisson libre, distribución que no se encontró en la literatura y que se introduce en este trabajo.

Ahora consideremos el elemento autoadjunto $u + u^* \in \mathcal{A}$, donde u es Haar unitario, nos gustaría saber cual es su $*$-distribución μ. Sólo necesitamos encontrar qué es $\tau((u + u^*)^k)$ ya que $u + u^*$ es autoadjunto. Como u y u^* conmutan se cumple la fórmula del binomio

$$(u + u^*)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^j (u^*)^{k-j}.$$

Así, usando el hecho de que $u^* = u^{-1}$ y aplicando τ a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$\tau((u + u^*)^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \tau((u)^{2j-k}) \tag{1.4}$$

de donde usando (1.3) tenemos

$$\tau((u + u^*)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \binom{2n}{n} & \text{si } k \text{ es par, } k = 2n. \end{cases}$$

Por lo tanto, la medida μ es tal que sus momentos $m_k(\mu) = \int t^k \mu(dt)$ cumplen que

$$m_k(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \binom{2n}{n} & \text{si } k \text{ es par, } k = 2n. \end{cases}$$

Esta es $A_{0,2}$, la **ley arcoseno** en $(-2, 2)$, con densidad

$$a_{0,2}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-t^2}} 1_{[-2,2]}(x),$$

cuyo estudio detallado e importancia retomamos en los ejemplos de los siguientes capítulos.

1.4.2 Elementos Semicirculares

Notación 1.4.1 *Fijemos un $*$-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \tau)$ y un elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que:*

i) $aa^* = 1 \neq a^*a$

ii) a genera a $(\mathcal{A}, \tau)$ como una $*$-álgebra.

iii) Los elementos de la forma $(a^*)^m a^n$ son linealmente independientes entre sí.

iv) La funcional $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisface la ecuación

$$\tau((a^*)^n a^m) = \begin{cases} 1 & \textit{si } m = n = 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases} \tag{1.5}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Es de interés saber cuales son los momentos de a, esto es, queremos conocer el valor de

$$\tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_k}).$$

Parecería de (1.5) que la $*$-distribución es una medida de Dirac δ_0, sin embargo en este caso vemos de (i) en (1.4.1) que a no es normal. Por lo tanto debemos de calcular $\tau(\widehat{a})$ para todos los elementos de la forma $\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_k}$. Claramente de (iv) en la Notación 1.4.1, si $\sum_{i=1}^{k}(m_i - n_i) \neq 0$, se tiene que $\tau(a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_k}) = 0$. Sin embargo, cuando $\sum_{i=1}^{k}(m_i - n_i) = 0$ el análisis es más fino.

Definición 1.4.2 *Decimos que el elemento* $\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_k}$ *no cruza la diagonal si*

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i - n_i) = 0 \tag{1.6}$$

y

$$\sum_{i=1}^{t}(m_i - n_i) \geq 0 \textit{ para todo } t = 1, 2, ..., k. \tag{1.7}$$

Si un elemento $\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1}...a^{m_t}(a^*)^{n_k}$ *no cruza la diagonal escribimos* $\widehat{a} \in NCD(a)$.

El nombre de elementos que no cruzan la diagonal se justifica debido a que existe una biyección entre los elementos $\widehat{a} \in NCD(a)$ y los caminos monótonos que se pueden trazar a través de las líneas de una malla de $n \times n$ celdas cuadradas, de forma que nunca se cruce la diagonal. Un camino monótono es aquél que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha. La biyección es como sigue: para cada elemento de la forma $\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1} \cdots a^{m_k}(a^*)^{n_k}$ asociamos el camino que primero sube m_1 después sigue n_1 hacia la derecha, así sucesivamente, hasta llegar a n_k. Resulta que los únicos elementos de la forma $\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1} \cdots a^{m_t}(a^*)^{n_k}$ tales que $\tau(\widehat{a})$ no se anula son los que no cruzan la diagonal. Esto se prueba a continuación.

Proposición 1.4.1 *Sea* $a \in \mathcal{A}$ *como en la Notación 1.4.1 y sea* $\widehat{a}$ *un elemento de la forma*

$$\widehat{a} = a^{m_1}(a^*)^{n_1} \cdots a^{m_t}(a^*)^{n_k}.$$

Entonces

$$\tau(\widehat{a}) = \begin{cases} 1 & si\ \widehat{a} \in NCD(a) \\ 0 & si\ \widehat{a} \notin NCD(a) \end{cases} . \tag{1.8}$$

Demostración Si $\widehat{a} \in NCD(a)$ entonces es claro que $\tau(\widehat{a}) = 1$, ya que $\widehat{a} = 1$ pues como $aa^* = 1$, las ecuaciones (1.6) y (1.7) aseguran que siempre hay a's suficientes para cancelar las a^*'s y que no sobran. Por otra parte si $\widehat{a} \notin NCD(a)$ como $1 \neq aa^*$, entonces $\widehat{a}$ se puede escribir como $\widehat{a} = a_1 a_2 ... a_k .. a_n$ con $a_k = (a^*)^k a^l$ linealmente independiente de a_{k+1} y a_{k-1}. Ya que los elementos de la forma $a^n(a^*)^m$ forman una base, por la ecuación (1.5) tenemos que $\tau(a_k) = 0$ y por lo tanto $\tau(\widehat{a}) = 0$ ■

Como en el caso de elementos Haar unitarios, estamos interesados en calcular la $*$-distribución de $a + a^*$, los llamados **elementos semicirculares**. De (1.8) vemos que $\tau(\widehat{a})$ no es otra cosa que la función indicadora en $NCD(a)$ y un argumento similar al usado en (1.4) nos permite obtener que el n-ésimo momento de $a + a^*$ es igual al número de elementos que no cruzan la diagonal de tamaño n. Es claro que existe una biyección entre estos elementos (o los caminos monótonos) y las **palabras de Dyck** (las palabras en un alfabeto de dos letras A y B de forma que no haya ningún segmento inicial que tenga más A's que B's). Es bien conocido que la cantidad de palabras de Dyck de longitud $2n$ es el enésimo **número de Catalán**

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{1.9}$$

Por lo tanto,

$$\tau((a + a^*)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ C_n & \text{si } k = 2n. \end{cases}$$

En la Sección 2.6.1 mostramos que la **ley del semicírculo** en $[-2, 2]$ con densidad

$$w_{0,1}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} \cdot 1_{[-2,2]}(x)$$

es la única medida cuyos momentos nones son cero y los pares son los números de Catalán C_n. Esta ley desempeña un papel fundamental en la teoría de divisibilidad infinita libre, teniendo un papel similar al que la distribución Gaussiana juega en probabilidad clásica.

1.4.3 Matrices Aleatorias y Relación Libre Asintótica

Para terminar con este capítulo introductorio damos un ejemplo donde la definición de independencia libre resultó ser muy útil: la Teoría de Matrices Aleatorias. Para el estudio de esta teoría, remitimos al lector a los libros de Metha [36] y Guionnet [23]. El estudio de matrices aleatorias se inició como parte del análisis estadístico multivariado a partir de los trabajos de Wishart en los años 1920, pero fue hasta los años 1950 cuando Wigner demostró que el estudio de varias propiedades importantes de sistemas físicos podían ser abordado con matrices aleatorias. En particular, Wigner sugirió que en mecánica cuántica se podía sustituir el operador Hamiltoniano en un espacio de Hilbert de dimensión infinita por un ensamble de matrices aleatorias Hermitianas. Así mismo, la estadística de los niveles de energía de núcleos se empezó a explicar en términos de los valores propios de matrices aleatorias de dimensión grande. Por otro lado, la relevante relación entre Teoría de Matrices Aleatorias y Teoría de Números se puede apreciar de la reciente edición de artículos hecha por Mezzadri y Snaith [37].

Un **ensamble de matrices aleatorias** es una sucesión $\mathbf{A} = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ donde A_n es una matriz $n \times n$ con entradas aleatorias. En el caso de una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión infinita, se considera de forma implícita el ensamble de las submatrices cuadradas superiores, por lo que muchas veces en la literatura no se usa el término ensamble. Además podemos hablar del producto de los ensambles $\mathbf{A} = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\mathbf{B} = (B_n)_{n=1}^{\infty}$, simplemente definiéndolo como el ensamble $\mathbf{AB} = (A_n B_n)_{n=1}^{\infty}$.

El espacio de ensambles de matrices aleatorias admite una funcional lineal τ (estrictamente, nos restringiremos al subespacio donde τ está bien definida), llamada el valor esperado asintótico de $\mathbf{A}$

$$\tau(\mathbf{A}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} E(\mathrm{tr} A_n).$$

Observemos que $\tau(\mathbf{I}) = 1$, donde la identidad $\mathbf{I}$ es por definición el ensamble de matrices identidad y que el k-ésimo momento esperado asintóticamente de $\mathbf{A}$ es $\tau(\mathbf{A}^k)$, donde $\mathbf{A}^k$ es el ensamble de matrices $((A_n)^k)_n$.

Entonces podemos considerar a este espacio dentro del marco de espacio de probabilidad no-conmutativo y por lo tanto definir la relación libre para ensambles de matrices aleatorias y la funcional τ.

Definición 1.4.3 *Los ensambles* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son* ***asintóticamente libres*** *si para todos los polinomios* $p_i(\cdot)$ *y* $q_j(\cdot)$ *tales que*

$$\tau[p_i(\mathbf{A})] = 0 = \tau[q_j(\mathbf{B})] \ i, j = 1, 2 \ldots n$$

se tiene que

$$\tau[p_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{B}) p_2(\mathbf{A}) q_2(\mathbf{B}) \ldots p_n(\mathbf{A}) q_n(\mathbf{B})] = 0$$

donde un polinomio $p(\mathbf{A})$ *debe de está definido como el ensamble de matrices aleatorias* $(p(A_n))_n$.

Esta relación se conoce como relación asintótica libre. Para ilustrar la utilidad de esta noción mencionamos algunos resultados bien conocidos sobre la relación libre asintótica de matrices aleatorias, remitimos al lector a [24]:

i) Supongamos que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con medio cero y varianza positiva. Entonces $X_1\mathbf{I}$ y $X_2\mathbf{I}$ no son asintóticamente libres. Más generalmente, si dos ensambles de matrices aleatorias son asintóticamente libres y conmutan, entonces una de ellas es necesariamente determinista.

ii) Cualquier ensamble de matrices aleatorias y la identidad son asintóticamente libres.

iii) Ensambles de matrices aleatorias Hermitianas con entradas Gaussianas independientes son asintóticamente libres.

iv) **Teorema del Límite Central Libre**: Sea $\mathbf{A}_1^{(n)}$, $\mathbf{A}_2^{(n)}, ..., \mathbf{A}_n^{(n)}$ una sucesión de ensambles de matrices aleatorias asintóticamente libres. Si $\tau(\mathbf{A}_i^{(n)}) = 0$, $\tau(\left(\mathbf{A}_i^{(n)}\right)^2) = 1$ y $\sup_i \left|\tau(\left(\mathbf{A}_i^{(n)}\right)^k)\right| < \infty$ para toda k, entonces el espectro de

$$\mathbf{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\mathbf{A}_1^{(n)} + \mathbf{A}_2^{(n)} + \cdots + \mathbf{A}_n^{(n)})}{\sqrt{n}}$$

es la distribución del semicírculo. Esto es

$$\tau((\mathbf{A})^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ C_n & \text{si } k = 2n \end{cases}.$$

Capítulo 2

Transformadas de Medidas

El objetivo principal de este capítulo es presentar las herramientas analíticas para el estudio de la convolución libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Comenzamos recordando el concepto de funciones de Pick y la teoría de Nevanlinna-Pick, lo cual es fundamental para el estudio analítico de medidas infinitamente divisibles libres. Seguido de esto, se presentan resultados sobre la transformada de Cauchy de una medida y su recíproca, que son las herramientas adecuadas para el estudio de las diferentes convoluciones en probabilidad no-conmutativa. En seguida, se introducen la transformada de Voiculescu y la transformada cumulante libre, las cuales son funciones analíticas definidas a partir de la transformada de Cauchy y que se comportan en forma similar al logaritmo de la transformada de Fourier en convolución y probabilidad clásica. De especial importancia es el hecho de que linealizan la convolución libre aditiva. Así mismo, se presenta de manera breve la transformada S de Voiculescu, herramienta que sirve para el estudio de la convolución multiplicativa libre.

Al final del capítulo presentamos como ejemplos algunas de las distribuciones más usadas en probabilidad libre e introducimos la familia de potencias del semicírculo de una forma más general que Kingman [31].

2.1 Funciones de Pick

Una función de Pick es una función analítica $\Psi : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$, donde $\mathbb{C}^+$ denota el semiplano complejo $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Estas funciones también se conocen como **funciones de Her-**

glotz o de Pick-Nevanlinna y se extienden por reflexión a funciones analíticas en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Para un estudio detallado de este tema sugerimos los libros Akhiezer [2], Donoghue [13] ó Teschl [48]. Una revisión en español de varios resultados se encuentra en la tesis de Vázquez [50], en donde en particular se demuestra a detalle la siguiente representación integral.

Teorema 2.1.1 Ψ *es una función de Pick si y sólo si tiene la siguiente representación*

$$\Psi(z) = b_0 + b_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1})\rho(dt) \tag{2.1}$$

donde $b_0 \in \mathbb{R}$, $b_1 \geq 0$ *y* ρ *es una medida en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\rho(dt) < \infty.$$

Del Apéndice B en [48] se tiene que la terna (b_0, b_1, ρ) está únicamente determinada como

$$\begin{aligned} b_0 &= \mathrm{Re}(\Psi(i)), \\ b_1 &= \lim_{y\to\infty} \frac{\Psi(iy)}{iy}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

mientras que la medida ρ se recupera de la fórmula de inversión de Stieltjes

$$\rho((t_0,t_1]) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta\to 0+} \lim_{y\to 0+} \int_{t_0+\delta}^{t_1+\delta} \mathrm{Im}(\Psi(x+iy))dx, \quad t_0 < t_1. \tag{2.3}$$

A la medida ρ se le conoce como medida espectral. Equivalentemente se tiene la siguiente representación

$$\Psi(z) = b_0 + b_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1+tz}{t-z})\sigma(dt), \tag{2.4}$$

donde b_0 y b_1 son como en (2.1) y σ es una medida finita. En efecto, tomando $\sigma(u) = \sigma((-\infty, u]) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{t^2+1}\rho(dt)$ tenemos

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= b_0 + b_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1})\rho(dt) \\ &= b_0 + b_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1+tz}{(t-z)(t^2+1)})\rho(dt) \\ &= b_0 + b_1 z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1+tz}{t-z})\sigma(dt). \end{aligned}$$

La siguiente es una caracterización muy útil de las funciones de Pick. Su demostración se puede consultar, por ejemplo, en el Capítulo 3 de [2] ó en el Capítulo 13 de [13].

Teorema 2.1.2 *Sea D un dominio de $\mathbb{C}^+$. Para una función $\Psi : D \to \mathbb{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Ψ se extiende a una función de Pick.

ii) Para toda $z_1, ..., z_n \in D$, la matriz

$$\left[\frac{\Psi(z_j) - \overline{\Psi(z_k)}}{z_j - \overline{z_k}}\right]_{j,k}$$

es semi-positiva definida.

2.2 Transformada de Cauchy

Definición 2.2.1 *Sea μ una medida finita en $\mathbb{R}$. Definimos la **transformada de Cauchy** G_μ de μ como*

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t}\mu(dt), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

La transformada de Cauchy también se conoce como transformada de Cauchy-Stieltjes. A la función $H_\mu(z) = -G_\mu(z)$ se le llama **transformada de Borel**. De la representación (2.1) es fácil ver que H_μ es una función de Pick. Por consiguiente la transformada G_μ es una función analítica de $\mathbb{C}^+$ en $\mathbb{C}^-$. La transformada de Cauchy desempeñará un papel análogo a la transformada de Fourier en el caso clásico y esta relacionada con ella de la siguiente forma

$$G_\mu(z) = \begin{cases} i\int_{-\infty}^{0} e^{-itz}\widehat{\mu}(t)dt, & \mathrm{Im}(z) > 0 \\ -i\int_{0}^{\infty} e^{-itz}\widehat{\mu}(t)dt, & \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

como se puede verificar usando el teorema de Fubini. Además, si escribimos $z = x + iy$ se tiene la siguiente descomposición en parte real e imaginaria de $G_\mu(z)$

$$G_\mu(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\mu(dt) - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mu(dt). \tag{2.7}$$

De esta descomposición se obtienen las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.1 *Sea μ una medida finita en $\mathbb{R}$. Entonces*

i) $G_\mu(\mathbb{C}^\pm) \subset \mathbb{C}^\mp$ *y* $G_\mu(\overline{z}) = \overline{G_\mu(z)}$.

ii) $|G_\mu(z)| \leq \dfrac{\mu(\mathbb{R})}{\mathrm{Im}(z)}$.

iii) $\mathrm{Im}(z)\, \mathrm{Im}\, G_\mu(z) < 0$.

iv) $\lim\limits_{y\to\infty} y\,|G_\mu(iy)| < \infty$.

v) $\lim\limits_{y\to\infty} iyG_\mu(iy) = \mu(\mathbb{R})$, *en particular si μ es una medida de probabilidad se tiene que*

$$\lim_{y\to\infty} iyG_\mu(iy) = 1.$$

Como caso especial de la fórmula de inversión (2.3) podemos recuperar la medida μ a partir de su transformada de Cauchy G_μ de la siguiente manera

$$\mu((t_0, t_1]) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta\to 0+} \lim_{y\to 0+} \int_{t_0+\delta}^{t_1+\delta} \mathrm{Im}(G_\mu(x+iy))dx, \quad t_0 < t_1. \tag{2.8}$$

En particular, cuando μ tiene densidad f_μ (μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue) se tiene que

$$f_\mu(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y\to 0+} \mathrm{Im}\, G_\mu(x+iy). \tag{2.9}$$

Recordemos que una medida μ es simétrica si $\mu(A) = \mu(-A)$ $\forall A \in \mathbb{R}$. De la fórmula de inversión arriba se puede obtener una relación entre la simetría de la medida μ y la transformada de Cauchy. Este sencilla resultado no se encontró reportado en la literatura.

Proposición 2.2.2 *La medida μ es simétrica si y sólo si su transformada de Cauchy G_μ es impar.*

Demostración Si μ es simétrica, calculando la transformada de Cauchy para $-z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} G_\mu(-z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{-z-t}\mu(dt) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z+t}\mu(dt) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-y}\mu(-dy) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-y}\mu(dy) \\ &= -G_\mu(z). \end{aligned}$$

Por otro lado, suponiendo que la transformada de Cauchy es impar, entonces $G_\mu(z) = -G_\mu(-z)$ y usando (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu((t_0,t_1]) &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0+}\lim_{y\to 0+}\int_{t_0+\delta}^{t_1+\delta} \mathrm{Im}(G_\mu(x+iy))dx, \quad t_0 < t_1 \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0+}\lim_{y\to 0+}\int_{t_0+\delta}^{t_1+\delta} \mathrm{Im}(-G_\mu(-x-iy))dx, \quad t_0 < t_1 \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{\delta_0\to 0- \\ \delta_0=\delta}}\lim_{\substack{y'\to 0- \\ y'=y}}\int_{t_0-\delta_0}^{t_1-\delta_0} \mathrm{Im}(-G_\mu(-x+iy'))dx, \quad t_0 < t_1 \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\delta_0\to 0-}\lim_{y'\to 0-}\int_{-t_1+\delta_0}^{-t_0+\delta_0} \mathrm{Im}(G_\mu(z+iy'))dz, \quad t_0 < t_1 \\
&= \mu([-t_1, -t_0))
\end{aligned}$$

■

El siguiente resultado caracteriza las funciones analíticas que son transformadas de Cauchy de medidas de probabilidad. Es el análogo del teorema de Bochner para transformadas de Fourier. Usamos la notación

$$\Gamma_\alpha = \{z = x + iy : y > 0,\ x < \alpha y\}$$

para cada $\alpha > 0$.

Proposición 2.2.3 *[10, Prop 5.1] Sea $G : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ una función analítica. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) Existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ tal que $G_\mu = G$ en $\mathbb{C}^+$.

ii) Para cada $\alpha > 0$ tenemos que

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} zG(z) = 1.$$

iii) Se tiene que $\lim_{y\to+\infty} iyG(iy) = 1$.

Demostración La equivalencia entre (i) y (iii) se sigue de la Proposición 2.2.1(v) y la representación (2.1) para funciones de Pick. Claramente (iii) se sigue de (ii), ya que $iy \in \Gamma_\alpha$

para cada $y > 0$. Finalmente probamos que las transformadas de Cauchy cumplen con la propiedad (ii).

Es fácil ver que para $z \in \Gamma_\alpha$, se tiene la desigualdad $|t/(z-t)| \leq |\alpha + i| = \sqrt{\alpha^2+1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces para $T > 0$, $z = x + iy \in \Gamma_\alpha$ y escribiendo $\widehat{\alpha} = \sqrt{\alpha^2+1}$ tenemos

$$\begin{aligned} |zG_\mu(z) - 1| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{z-t} \mu(dt) \right| \\ &\leq \widehat{\alpha}\mu(\{t : |t| \geq T\}) + \int_{-T}^{T} \left| \frac{t}{z-t} \right| \mu(dt) \\ &\leq \widehat{\alpha}\mu(\{t : |t| \geq T\}) + \frac{T}{y}\mu((-T,T)) \end{aligned}$$

de donde

$$\limsup_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} |zG_\mu(z) - 1| \leq \widehat{\alpha}\mu(\{t : |t| \geq T\}.$$

El resultado se sigue entonces de que $\lim_{T\to\infty} \mu(\{t : |t| \geq T\}) = 0$. ■

En el caso en que μ tiene soporte acotado se tiene la expansión en series de potencias

$$G_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k(\mu) z^{-k-1}, \qquad |z| > r, \tag{2.10}$$

donde $m_k(\mu) := \int_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt)$ es el k-ésimo momento de μ, $k \geq 0$ y $r := \sup\{|t| : t \in sop(\mu)\}$. Por ésta razón G_μ puede pensarse como función generadora de momentos.

2.3 Recíproca de una Transformada de Cauchy

Definición 2.3.1 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con transformada de Cauchy $G_\mu(z)$. Definimos la aplicación $F_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ como*

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^+ .$$

El hecho de que F_μ sea una función de Pick no sólo es de importancia en convolución libre, la transformada F_μ también desempeña un papel importante en otro tipo de convoluciones. Remitimos al lector al trabajo de Speicher y Woroudi [45] para el caso de la **convolución booleana** y al artículo reciente de Franz y Muraki [17] para la **convolución monótona**.

Los resultados de esta sección se encuentran en Bercovici y Voiculescu [10].

Usando propiedades de funciones de Pick se obtiene la siguiente caracterización para funciones analíticas que son recíprocas de transformadas de Cauchy, análogo a la Proposición 2.2.3.

Proposición 2.3.1 *Sea* $F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ *una función analítica . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) Existe una medida de probabilidad μ *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $F_\mu = F$ *en* $\mathbb{C}^+$*.*

ii) Para todo $\alpha > 0$ *tenemos que*

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\Gamma_\alpha} \frac{F(z)}{z} = 1.$$

iii) Se tiene que $\lim_{y\to\infty} F(iy)/iy = 1$*.*

iv) Existe $b_0 \in \mathbb{R}$ *y una medida finita* σ *en* $\mathbb{R}$ *con*

$$F(z) = b_0 + z + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1+tz}{t-z})\sigma(dt),\ z \in \mathbb{C}^+.$$

Demostración La equivalencia entre (i), (ii) y (iii) se sigue de la Proposición 2.2.3. Que $F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ sea una función analítica nos dice que tiene representación como en (2.4), y $b_1 = \lim_{y\to\infty} F(iy)/iy = 1$. Esto muestra la equivalencia entre (iii) y (iv). ■

De la representación (iv) en la proposición anterior se obtiene la siguiente propiedad de F_μ.

Corolario 2.3.2 *Para toda medida de probabilidad* μ *en* $\mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\mathrm{Im}(F_\mu(z)) \geq \mathrm{Im}(z)$$

con igualdad para todo $z \in \mathbb{C}^+$ *si y sólo si* μ *es una medida de Dirac.*

Para números positivos α y β definimos las regiones

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \{z = x + iy : y > \beta, |x| < \alpha y\}.$$

Lema 2.3.1 *Sea* μ *una medida de probabilidad en* $\mathbb{R}$ *y sea* $0 < \varepsilon < \alpha$*. Existe* $\beta > 0$ *tal que*

i) La función F_μ *es univaluada en* $\Gamma_{\alpha,\beta}$*.*

ii) $\Gamma_{\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon} \subset F_\mu(\Gamma_{\alpha,\beta})$

Demostración Por (ii) en la Proposición 2.3.1 podemos tomar β suficientemente grande de tal forma que $|F_\mu(z) - z| < \varepsilon |z|$ para $z \in \Gamma_{\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon}$. Sea $\omega \in \Gamma_{\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon}$, si $\beta' > \beta$ es suficientemente grande, la imagen de la frontera de la sección de anillo $\{z \in \Gamma_{\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon} : |z| < \beta'\}$ es una curva que rodea a ω exactamente una vez, entonces por la analiticidad de F debe de tomar el valor ω sólo una vez. ■

El siguiente resultado es el principal de esta sección. Nos garantiza la existencia de la inversa derecha de la recíproca de una transformada de Cauchy.

Proposición 2.3.2 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Existe un dominio Γ de la forma $\Gamma = \cup_{\alpha>0}\Gamma_{\alpha,\beta_\alpha}$ tal que F_μ tiene una inversa derecha F_μ^{-1} definida en Γ. Además se tiene*

$$\mathrm{Im}(F_\mu^{-1}(z)) \leq \mathrm{Im}(z), \qquad z \in \Gamma \tag{2.11}$$

y

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\Gamma_\alpha} \frac{F^{-1}(z)}{z} = 1 \tag{2.12}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demostración El hecho de que exista el dominio $\Gamma = \cup_{\alpha>0}\Gamma_{\alpha,\beta_\alpha}$ se sigue del lema anterior. Por otra parte, (2.11) se sigue del Corolario 2.3.2 y (2.12) es consecuencia de (ii) en la Proposición 2.3.1. ■

2.4 Transformada de Voiculescu y sus Variantes

A partir de la inversa derecha de la transformada de Cauchy recíproca podemos definir la llamada transformada de Voiculescu definida en el dominio $\Gamma = \cup_{\alpha>0}\Gamma_{\alpha,\beta_\alpha}$ considerado en la Proposición 2.3.2.

Definición 2.4.1 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con transformada de Cauchy recíproca $F_\mu(z)$. Definimos la* ***transformada de Voiculescu*** *$\phi_\mu : \Gamma \to \mathbb{C}^-$ por*

$$\phi_\mu(z) = F_\mu^{-1}(z) - z \qquad z \in \Gamma.$$

Una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ está únicamente determinada por su transformada de Voiculescu. En efecto, supongamos que μ y μ' son tales que $\phi_\mu = \phi_{\mu'}$ en un región $\Gamma_{\alpha,\beta}$. Entonces se sigue que $F_\mu = F_{\mu'}$ en una región de $\mathbb{C}^+$, y entonces por continuación analítica, F_μ y $F_{\mu'}$ coinciden en todo $\mathbb{C}^+$. Por la tanto, μ y μ' tienen la misma transformada de Cauchy y en consecuencia $\mu = \mu'$.

La importancia de la transformada de Voiculescu es el hecho de que linealiza la convolución libre de medidas con soporte compacto, como se definió en el Capítulo 1. Específicamente, Voiculescu [52] probó que si μ y v son medidas de probabilidad con soporte compacto en $\mathbb{R}$, entonces $\phi_{\mu \boxplus v}(z) = \phi_\mu(z) + \phi_v(z)$. Motivados por este hecho, en la sección siguiente daremos la definición analítica de convolución libre para cualesquiera dos medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Para ello utilizamos la siguiente caracterización para transformadas de Voiculescu.

Proposición 2.4.1 *[10, Prop. 5.6] Sea ϕ una función analítica definida en una región de la forma $\Gamma_{\alpha,\beta}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) Existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$, tal que $\phi_\mu(z) = \phi(z)$ para todo z en un dominio $\Gamma_{\alpha,\beta'}$ con $\beta' \geq \beta$.

ii) Existe $\beta' \geq \beta$ de tal forma que

a) $\mathrm{Im}(\phi(z)) \leq 0$ para todo $z \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$.

b) $\phi(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, $z \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$

c) Para todo n entero positivo y cualesquiera puntos $z_1, z_2, ..., z_n$ en $\Gamma_{\alpha,\beta'}$, la matriz

$$\left[\frac{z_j - \overline{z_k}}{z_j + \phi(z_j) - \overline{z_k} - \phi(\overline{z_k})}\right]_{1 \leq j,k \leq n}$$

es semi-positiva definida.

Demostración Supongamos que $\phi_\mu(z) = \phi(z)$ para todo z en un dominio $\Gamma_{\alpha,\beta'}$ con $\beta' \geq \beta$. Debemos probar que $\phi_\mu(z)$ cumple con (a), (b) y (c). De la Proposición 2.3.2 se tiene claramente que para $z \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$, $\phi_\mu(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ e $\mathrm{Im}(\phi_\mu(z)) \leq 0$. Además como ϕ es analítica, ϕ_μ también debe ser analítica en $\Gamma_{\alpha,\beta'} \subset \mathbb{C}^+$, es decir F_μ es una función de Pick univaluada en $\Gamma_{\alpha,\beta'}$. Por lo tanto podemos escribir

$$\left[\frac{z_j - \overline{z_k}}{z_j + \phi(z_j) - \overline{z_k} - \phi(\overline{z_k})}\right]_{j,k} = \left[\frac{F_\mu(\varsigma_j) - F_\mu(\overline{\varsigma_k})}{\varsigma_j - \overline{\varsigma_k}}\right]_{j,k} \tag{2.13}$$

para algunos $\varsigma_j, \varsigma_k \in \mathbb{C}^+$ la cual es una matriz semi-positiva definida por la Proposición 2.1.2.

Probamos ahora que (ii) implica (i). Como ϕ es analítica en $\Gamma_{\alpha,\beta}$ y es semi-positiva definida, podemos escribir

$$\left[\frac{z_j - \overline{z_k}}{z_j + \phi(z_j) - \overline{z_k} - \phi(\overline{z_k})}\right]_{j,k} = \left[\frac{F(\varsigma_j) - F(\overline{\varsigma_k})}{\varsigma_j - \overline{\varsigma_k}}\right]_{j,k}$$

para alguna función F y algunos $\varsigma_j, \varsigma_k \in \mathbb{C}^+$. Usando otra vez la Proposición 2.1.2, F se extiende a una función de Pick. El hecho de que $\phi(z)/z \to 0$, es equivalente a que $F(z)/z \to 1$ de donde por la Proposición 2.3.1, $F = F_\mu$ para alguna medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. ■

El siguiente teorema -que es el resultado principal de esta sección- nos dice que la suma de dos transformadas de Voiculescu es una transformada de Voiculescu. Presentamos una prueba totalmente analítica usando la proposición anterior.

Teorema 2.4.2 *Sean ϕ_{μ_1} y ϕ_{μ_2} las transformadas de Voiculescu de las medidas de probabilidad μ_1 y μ_2 en $\mathbb{R}$ respectivamente. Entonces $\phi = \phi_{\mu_1} + \phi_{\mu_2}$ es la transformada de Voiculescu de una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$.*

Demostración Probaremos que $\phi = \phi_1 + \phi_2$ cumple con a), b) y c) de la parte ii) de la proposición anterior. Probar que ϕ cumple con a) y b) es trivial pues ϕ_1 y ϕ_2 también lo cumplen. Resta probar que

$$\left[\frac{z_j - \overline{z_k}}{z_j + \phi(z_j) - \overline{z_k} - \phi(\overline{z_k})}\right]_{j,k}$$

es semi-positiva definida. Siguiendo la prueba de la proposición pasada, como ϕ_1 y ϕ_2 son analíticas, podemos escribir

$$\left[\frac{z_j - \overline{z_k}}{z_j + \phi(z_j) - \overline{z_k} - \phi(\overline{z_k})}\right]_{j,k} = \left[\frac{F(\varsigma_j) - F(\overline{\varsigma_k})}{\varsigma_j - \overline{\varsigma_k}}\right]_{j,k}.$$

Para probar que $F(z)$ se extiende como una función de Pick es suficiente probar que $\varsigma \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$ implica que $F(\varsigma) \in \mathbb{C}^+$. Esto es equivalente a que $z \in \mathbb{C}^+$ siempre que $z + \phi(z) \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$. Si $z + \phi(z) \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$, entonces $z + \phi_1(z) + \phi_2(z) \in \Gamma_{\alpha,\beta'}$. Como $\mathrm{Im}(\phi_2(z)) \leq 0$, se cumple para β'' que $z + \phi_1(z) \in \Gamma_{\alpha,\beta''}$ esto dice que $z \in \mathbb{C}^+$. ■

Consideramos ahora la continuidad de ϕ. Llamaremos al siguiente el **Teorema de Continuidad de Lévy Libre**.

Teorema 2.4.3 *Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas de probabilidad. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) La sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a μ.

ii) Existen α, β de tal forma que la sucesión $\{\phi_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en compactos de $\Gamma_{\alpha,\beta}$ a una función ϕ_{μ}.

Demostración Supongamos que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en distribución a μ. Entonces, no es difícil ver de la Proposición 2.3.1 que $\lim_{y\to\infty} F_{\mu_n}(z) = F_{\mu}(z)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}^+$ y

$$F_{\mu_n}(z) = z(1 + o(1)),\ F_{\mu}(z) = z(1 + o(1)) \text{ cuando } |z| \to \infty,\ z \in \Gamma_{\alpha}$$

uniformemente en n. Se sigue que existen $\alpha, \beta > 0$ tales que las funciones ϕ_{μ} y ϕ_{μ_n} están definidas y tienen parte imaginaria negativa en $\Gamma_{\alpha,\beta}$. Además, $\phi_{\mu_n} = o(z)$ uniformemente en n cuando $|z| \to \infty$, $z \in \Gamma_{\alpha,\beta}$. La familia $\{\phi_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$es normal en $\Gamma_{\alpha,\beta}$. Así, basta probar que el límite de una subsucesión convergente $\{\phi_{\mu_{n_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ es de hecho igual a ϕ_{μ}. En efecto, si $z \in \Gamma_{\alpha,\beta}$ tenemos que $z + \phi(z) \in \mathbb{C}^+$ y

$$\begin{aligned} |F_{\mu}(z + \phi(z)) - z| &= \left|F_{\mu}(z + \phi(z)) - F_{\mu_{n_j}}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z))\right| \\ &\leq \left|F_{\mu}(z + \phi(z)) - F_{\mu}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z))\right| \\ &\quad + \left|F_{\mu}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z)) - F_{\mu_{n_j}}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z))\right|. \end{aligned}$$

Como $F_{\mu_{n_j}}$ converge a F_{μ} uniformemente en una vecindad de $z + \phi(z)$, se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \left|F_{\mu}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z)) - F_{\mu_{n_j}}(z + \phi_{\mu_{n_j}}(z))\right| = 0.$$

Entonces $z + \phi(z) = F^{-1}(z)$ en $\Gamma_{\alpha,\beta}$ y por lo tanto $\phi = \phi_{\mu}$.

Supongamos que se cumple (ii). Por la primera parte de la demostración es suficiente probar la convergencia de $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tenemos que $F_{\mu_n}^{-1}(z) = z+\phi_{\mu_n}(z) = z(1+o(1))$ uniformemente en n cuando $|z| \to \infty$, $z \in \Gamma_{\alpha,\beta}$. Esto implica, en particular, que $iyG_{\mu_n}(iy)-1 = o(1)$ uniformemente en n cuando $y \to \infty$. La desigualdad

$$-\operatorname{Re}(iyG\mu_n(iy) - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{y^2 + t^2}\mu_n(dt) \geq \frac{1}{2}\mu_n(\{t : |t| \geq y\})$$

nos da entonces la convergencia en distribución de $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

A partir de la transformada de Voiculescu ϕ_μ se pueden definir variantes importantes que también linealizan la convolución libre y cuyas propiedades se siguen trivialmente de las de ϕ_μ. En el estudio de divisibilidad infinita libre de medidas con soporte compacto (tema que se presenta en el Capítulo 4) es usual trabajar con la **$\mathcal{R}_\mu$-transformada de Voiculescu** definida como

$$\mathcal{R}_\mu(z) = \phi_\mu(\frac{1}{z}) = F_\mu^{-1}\left(z^{-1}\right) - \frac{1}{z} \qquad z^{-1} \in \Gamma. \tag{2.14}$$

Una propiedad importante, que se sigue de la definición, es la siguiente relación entre la transformada de Cauchy G_μ y $\mathcal{R}_\mu$

$$G_\mu(\mathcal{R}_\mu(z) + \frac{1}{z}) = z. \tag{2.15}$$

Otra variante, propuesta recientemente por Barndorff-Nielsen y Thorbjørnsen [7], es la **transformada cumulante libre** $\mathcal{C}_\mu(z)$ definida como

$$\mathcal{C}_\mu(z) = z\phi(\frac{1}{z}) = zF_\mu^{-1}\left(z^{-1}\right) - 1, \qquad z^{-1} \in \Gamma. \tag{2.16}$$

Esta transformada es similar a la función cumulante clásica de la Sección 1.1 y desempeña un papel análogo en la caracterización de distribuciones infinitamente divisibles libres. Por ello la usamos en el siguiente capítulo para definir la convolución libre de medidas.

2.5 Transformada S

En esta sección se presenta la transformada S de Voiculescu para medidas con todos sus momentos, estudiada inicialmente en [53]. Ésta desempeña el papel de la transformada cumulante libre en lo que se conoce como la convolución multiplicativa libre $\boxtimes$ introducida en el Capítulo 1. Retomamos el estudio de esta convolución en la Sección 3.6.

Definición 2.5.1 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con momentos $m_n(\mu)$, $n \geq 1$ y con $m_1(\mu) \neq 0$. Entonces su **S-transformada** S_μ se define como sigue. Sea χ la inversa de la serie formal de potencias*

$$M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu) z^n \tag{2.17}$$

entonces

$$S_\mu(z) = \chi(z)\frac{1+z}{z}.$$

El hecho de que μ tenga media diferente de cero asegura que la inversa de $M(z)$ existe como serie de potencias formal en z. Más aún, M puede recuperarse de S_μ. Observemos que la serie de potencias M puede obtenerse de la transformada de Cauchy a través de la fórmula

$$M(z) = \frac{1}{z}G_\mu(\frac{1}{z}) - 1. \tag{2.18}$$

Más recientemente Speicher y Raj Rao [46] extendieron la definición de S_μ para medidas con media cero. El principal problema es que $M(z)$ no tiene inversa única. Supongamos que μ tiene media cero. Si excluimos el caso en que $\mu = \delta_0$, entonces sabemos que $m_2(\mu) > 0$ y por lo tanto la serie $M(z)$ empieza con un múltiplo de z^2. Esto significa que aunque $M(z)$ no puede ser invertida por una serie de potencias en z, si puede ser invertida por serie de potencias en $\sqrt{z}$. La inversa no es única, pero de hecho sólo existen dos opciones (que corresponden a elegir la rama de $\sqrt{z}$). El siguiente resultado explica esto más formalmente.

Proposición 2.5.1 *Sea M una función de la forma*

$$M(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n$$

con $\alpha_2 \neq 0$. Entonces existen exactamente dos series de potencias χ y $\widetilde{\chi}$ (en $\sqrt{z}$) que satisfacen

$$M(\chi(z)) = z.$$

Ahora podemos definir transformadas S_μ y $\widetilde{S}_\mu$ para medidas con media cero y varianza diferente de cero.

Definición 2.5.2 *Sean μ una media con media cero y segundo momento diferente de cero. Entonces sus S-transformadas S_μ y $\widetilde{S}_\mu$ se definen como sigue. Sean χ y $\widetilde{\chi}$ las inversas de la serie formal de potencias*

$$M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu) z^n$$

entonces

$$S_\mu = \chi(z).\frac{1+z}{z} \ \ y \ \widetilde{S}_\mu = \widetilde{\chi}(z).\frac{1+z}{z}$$

respectivamente.

Además, si M es como en (2.17) para una medida con media cero entonces las correspondientes transformadas S_μ y $\widetilde{S}_\mu$ son de la forma

$$\begin{aligned} S_\mu &= d_{-1}\frac{1}{\sqrt{z}} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k/2} \\ \widetilde{S}_\mu &= \tilde{d}_{-1}\frac{1}{\sqrt{z}} + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{d}_k z^{k/2} \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{d}_k = (-1)^k d_k.$$

2.6 Ejemplos

En esta sección encontramos fórmulas para diversas transformadas de distribuciones que aparecen comúnmente en probabilidad no-conmutativa, como la del semicírculo, la ley arcoseno y la Cauchy. Cabe destacar que varias de las distribuciones que son útiles en probabilidad clásica no tienen una transformada de Cauchy en forma cerrada. Tal es el caso, por ejemplo, de la distribución exponencial y la Gaussiana, para las cuales parece ser conveniente el enfoque combinatorio del Capítulo 4. Al final del capítulo introducimos la familia potencias de semicírculo, que incluye a las distribuciones del semicírculo, la uniforme, la ley arcoseno y cómo caso límite a la Gaussiana.

2.6.1 Ley de Semicírculo

Comenzamos con la distribución del semicírculo, la cual aparece de manera natural como la $*$-distribución de elementos semicirculares (variables aleatorias no-conmutativas normales), como se vio en la Sección 1.4.2.

A partir de la década de los 50's, la medida de semicírculo ha surgido también de manera relevante en teoremas límites de probabilidad que aparecen en diversas áreas de la matemática.

Una de las más importantes es la Teoría de Matrices Aleatorias, en donde esta distribución (también llamada de Wigner) aparece como el límite de la medida espectral de diversos ensambles de matrices aleatorias, trabajo iniciado por Wigner [55]; ver también [24], [30] y [36]. Por otro lado, la distribución de semicírculo aparece como límite de sumas de variables aleatorias en relación libre, razón por la cual también es conocida como **distribución Gaussiana libre**. Para el estudio del Teorema del Límite Central Libre remitimos a las referencias [9], [24], [39] ó [54]. A su vez, en el estudio de relaciones entre probabilidad y teoría de representaciones de grupos simétricos, la distribución de semicírculo aparece como límite de las probabilidades de transición de Plancherel asociados a diagramas de Young, como se muestra en [11] y [29].

Sea μ una medida de probabilidad con momentos

$$m_k(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ C_n & \text{si } k \text{ es par, } k = 2n \end{cases} \qquad (k \geq 1) \tag{2.19}$$

donde $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$ son los **números de Catalán**.

Veamos que μ es la distribución del semicírculo, usando la transformada de Cauchy para recuperar la medida μ a partir de los momentos (2.19). Cómo se mencionó en la Sección 1.4.2, μ debe tener soporte compacto (otro argumento -analítico- de este hecho se presenta en B.2.4). Por lo tanto, de (2.10) tenemos que para $|z|$ suficientemente grande

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}}.$$

Usando le recurrencia $C_k = \sum_{j=1}^{k} C_{j-1}C_{k-j}$ tenemos

$$\begin{aligned}
G_\mu(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+1}} \left(\sum_{j=1}^{k} C_{j-1}C_{k-j} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{C_{j-1}}{z^{2j-1}} \left(\frac{C_{k-j}}{z^{2(k-j)+1}} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{j-1}}{z^{2j-1}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} G_\mu(z) G_\mu(z),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación cuadrática para la transformada de Cauchy

$$G_\mu(z)^2 - zG_\mu(z) + 1 = 0, \qquad z \in \mathbb{C}^+. \tag{2.20}$$

Entonces, si μ es una medida con momentos (2.19), su transformada de Cauchy es

$$G_\mu(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}, \tag{2.21}$$

en donde hemos tomado la raíz cuadrada con signo negativo, ya que se tiene que satisfacer la condición (iii) en la Proposición 2.2.3.

Utilizamos la fórmula de inversión (2.9) para obtener la **ley del semicírculo** $W_{0,2}$ con densidad

$$w_{0,2}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \cdot 1_{[-2,2]}(x). \tag{2.22}$$

Por lo tanto (2.21) es la transformada de Cauchy $G_{W_{0,2}}(z)$ de la distribución de semicírculo, de donde obtenemos que

$$F_{W_{0,2}}(z) = \frac{1}{G_{W_{0,2}}(z)} = \frac{2}{z - \sqrt{z^2 - 4}}$$

y

$$F_{W_{0,2}}^{-1}(z) = z + 1/z.$$

Así, de la definición de transformada de Voiculescu y (2.16) obtenemos que las transformadas de Voiculescu y cumulante libre de la ley del semicírculo están dadas, respectivamente, por

$$\phi_{W_{0,2}}(z) = 1/z \tag{2.23}$$

y

$$\mathcal{C}_{W_{0,2}}(z) = z^2. \tag{2.24}$$

Ahora calculemos una transformada S de la distribución de semicírculo $W_{0,2}$, la cual tiene media cero. De (2.18) la serie de potencias M está dada por

$$M(z) = \frac{1}{z} G_\mu(\frac{1}{z}) - 1 = \frac{1 - z(\sqrt{\frac{1}{z^2} - 4} + 2z)}{2z^2}$$

de donde

$$\chi(z) = \frac{\sqrt{z}}{(1+z)}$$

y por lo tanto una transformada S de la distribución de semicírculo es

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Más generalmente, para m real y $\sigma^2 > 0$, se define la **distribución del semicírculo** $W_{m,\sigma}$ mediante la densidad

$$w_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - (x-m)} \cdot 1_{[m-2\sigma, m+2\sigma]}(x). \tag{2.25}$$

Esta distribución tiene media m y varianza σ^2.

La transformada de Cauchy de $W_{m,\sigma}$ está dada por

$$G_{W_{m,\sigma}}(z) = \frac{2}{r^2}(z - \sqrt{(z-m)^2 - r^2}),$$

mientras que su transformada cumulante libre es

$$\mathcal{C}_{W_{m,\sigma}}(z) = mz + \frac{r^2 z^2}{4} = mz + \sigma^2 z^2 \tag{2.26}$$

donde $r = 2\sigma$ es el radio del soporte.

2.6.2 Ley Arcoseno

La distribución Arcoseno aparece en el estudio de un problema de la probabilidad clásica: límite de la distribución de la fracción de tiempo que un proceso estocástico es positivo, cuyo estudio fue iniciado por Paul Lévy para las caminatas aleatorias; ver [14] ó [49]. Así mismo, esta distribución tiene varias aplicaciones en economía y teoría estadística de la comunicación (como se menciona en [4]), así como en la simulación de variables aleatorias Gaussianas mediante el bien conocido método de Box-Muller (ver [19]).

En el campo de la probabilidad no-conmutativa la distribución de arcoseno aparece como la $*$-distribución de elementos de Haar, como se mostró en la Subsección 1.4.1. Es igualmente importante para construir ejemplos y contraejemplos en probabilidad libre, como mostramos más adelante en este trabajo. Así mismo, recientemente se ha mostrado que esta distribución desempeña en la llamada convolución monótona, el papel que la distribución Gaussiana y la ley del semicírculo tienen en las convoluciones clásica y libre, respectivamente. Para esto último remitimos al lector al trabajo de Franz y Muraki [17].

Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con momentos

$$m_k(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \binom{2n}{n} & \text{si } k \text{ es par, } k = 2n. \end{cases} .$$

Veamos que μ es la ley de Arcoseno.

En el ejemplo anterior se mostró que la transformada de Cauchy de la distribución semicírculo es

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^{2k+1}} = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}, \tag{2.27}$$

Ahora consideremos la función

$$H(z) = \frac{G(z)}{z}$$

derivando con respecto de z obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial z}H(z) = \frac{-2}{z^2\sqrt{z^2-4}}.$$

Por otra parte, derivando término a término tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{C_k}{z^{2k+2}}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{-(2k+2)C_k}{z^{2k+3}} \\ &= -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{2k}{k}}{z^{2k+3}} = \frac{-2G_\mu(z)}{z^2}\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$G_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-4}}. \tag{2.28}$$

Podemos entonces utilizar la fórmula de inversión (2.9) para obtener la **ley arcoseno** $A_{0,2}$ con densidad

$$a_{0,2}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot 1_{[-2,2]}(x). \tag{2.29}$$

Por lo tanto (2.28) es la transformada de Cauchy $G_{A_{0,2}}(z)$ de la distribución arcoseno, de donde obtenemos que

$$F_{A_{0,2}}(z) = \frac{1}{G_{A_{0,2}}(z)} = \sqrt{z^2-4}$$

y

$$F^{-1}_{A_{0,2}}(z) = \sqrt{z^2+4}.$$

De manera análoga al ejemplo anterior, las transformadas de Voiculescu y cumulante libre de la ley arcoseno están dadas, respectivamente, por

$$\phi_{A_{0,2}}(z) = \sqrt{z^2+4} - z \tag{2.30}$$

y

$$\mathcal{C}_{A_{0,2}}(z) = \sqrt{4z^2+1} - 1. \tag{2.31}$$

2.6.3 Distribución Uniforme

Recordemos que la distribución uniforme en $[-1,1]$ tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

Entonces su transformada de Cauchy es

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-t}dt = \frac{1}{2}\log(z+1) - \frac{1}{2}\log(z-1) = \frac{1}{2}\log(\frac{z+1}{z-1})$$

de donde obtenemos

$$F_\mu(z) = (\frac{2}{\log(\frac{z+1}{z-1})}).$$

Entonces las transformadas de Voiculescu y cumulante libre de la distribución uniforme están dadas, respectivamente por

$$\phi_\mu(z) = F_\mu(z)^{-1} - z = \frac{e^{2/z}+1}{e^{2/z}-1} - z \tag{2.32}$$

y

$$\mathcal{C}_\mu(z) = z\frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1} - 1.$$

2.6.4 Distribución de Cauchy

Recordemos que una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ tiene distribución de Cauchy con escala $\lambda > 0$ si su densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Podemos calcular fácilmente su transformada de Fourier

$$\widehat{\mu}(x) = \exp(-\lambda\,|x|).$$

La distribución de Cauchy no sólo no tiene soporte acotado, sino que carece de media y varianza. Esta distribución solo se puede tratar desde el punto de vista analítico. Veremos más adelante su importancia en nuestro estudio.

Podemos calcular su transformada de Cauchy usando la relación (2.6) entre transformadas de Fourier y Cauchy, obteniendo

$$G_\mu(z) = -i\int_{-\infty}^{0} e^{-itz}\widehat{\mu}(t)dt = -i\int_{-\infty}^{0} e^{-itz}e^{-\lambda|t|}dt = -i\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda-iz)t}dt = \frac{1}{z+\lambda i}, \qquad z\in\mathbb{C}^+.$$

Entonces, trivialmente $F_\mu(z) = 1/G_\mu(z) = z+\lambda i$, $F_\mu^{-1}(z) = z-\lambda i$. Por lo tanto las transformadas de Cauchy, Voiculescu y cumulante libre de la distribución de Cauchy están dadas por

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z+\lambda i}, \tag{2.33}$$

$$\phi_\mu(z) = -\lambda i, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{C}_\mu(z) = -i\lambda z. \tag{2.35}$$

2.6.5 Potencias de Semicírculo

La distribución de semicírculo en $(-\varsigma,\varsigma)$, $\varsigma>0$, tiene densidad

$$w_{0,2\varsigma} = \frac{2}{\pi\varsigma^2}\sqrt{\varsigma^2-x^2}1_{(-\varsigma,\varsigma)}(x). \tag{2.36}$$

En esta sección introducimos una familia de distribuciones cuyas densidades se obtienen como potencias reales de la densidad de semicírculo. Específicamente, para $\theta\geq -3/2$ y $\varsigma>0$, sea

$$f_\theta(x\,;\varsigma) = c_{\theta,\varsigma}\left(\frac{2}{\pi\varsigma^2}\sqrt{\varsigma^2-x^2}\right)^{2\theta+1} 1_{(-\varsigma,\varsigma)}(x) \tag{2.37}$$

donde

$$c_{\theta,\varsigma}^{-1} = \int_{-\varsigma}^{\varsigma}\left(\frac{2}{\pi\varsigma^2}\sqrt{\varsigma^2-t^2}\right)^{2\theta+1} dt \tag{2.38}$$

Una distribución con densidad (2.37) se llama **distribución potencia de semicírculo** y la denotamos por $PS(\theta,\varsigma)$. Observamos que es una distribución simétrica con soporte acotado, cuyo parámetro de forma es θ, mientras que ς es un parámetro de rango. Esta familia de distribuciones fue estudiada, cuando θ es entero, por Kingman [31] en el contexto de distribuciones para la parte esférica de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ que son invariantes bajo transformaciones ortogonales. Los resultados que presentamos en esta sección para las potencias de semicírculo no se encontraron reportados en la literatura.

La familia de distribuciones potencia de semicírculo incluye casos importantes de distribuciones simétricas con soporte acotado. El caso frontera $\theta = -3/2$ es la distribución que asigna masa $1/2$ a los puntos 1 y -1. El caso $\theta = -1$ es la ley arcoseno, mientras que el caso $\theta = -1/2$ es la distribución uniforme en $[-1, 1]$ y el caso $\theta = 0$ es la ley del semicírculo.

Una génesis interesante de esta familia de distribuciones es que una mezcla apropiada con una distribución gamma recupera la distribución Gaussiana. Más específicamente, recordemos que la distribución gamma $G(\alpha, \beta)$ con parámetros $\alpha > 0, \beta > 0$, tiene densidad

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}), \; x > 0.$$

Proposición 2.6.1 *Sea $\theta > -3/2$ y $G_{\theta+2}$ una variable aleatoria con distribución gamma $G(\theta+2, 2)$ e independiente de la variable aleatoria S_θ con distribución potencia del semicírculo $PS(\theta, 1)$. La variable aleatoria*

$$Z \stackrel{d}{=} \sqrt{G_{\theta+2}} S_\theta \tag{2.39}$$

tiene distribución Gaussiana estándar con media cero y varianza uno.

Demostración De la fórmula de la densidad del producto de dos variables aleatorias independientes, obtenemos que

$$f_Z(z) = |z| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2} f_{S_\theta}(x) g_{(\theta+2,2)}(\frac{z^2}{y^2}) dy, \quad - < z < \infty.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= |z| \int_{-1}^{1} \frac{1}{y^2} c_{\theta,1} (\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2})^{2\theta+1} \frac{1}{2^{\theta+2}} \frac{(\frac{z^2}{y^2})^{\theta+1}}{\Gamma(\theta+2)} e^{-z^2/(2y^2)} dy \\
&= \frac{2^{2\theta+2} c_{\theta,1}}{\pi^{2\theta+1}\Gamma(\theta+2)} z^{2\theta+3} \frac{1}{2^{\theta+2}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\theta+\frac{1}{2}}}{x^{2\theta+4}} e^{-z^2/(2x^2)} dx \\
&\overset{(y=1/x)}{=} (\frac{1}{\sqrt{\pi}}) \frac{z^{2\theta+3}}{\Gamma(\theta+3/2)} \frac{1}{2^{\theta+1}} \int_1^\infty \frac{(\frac{y^2-1}{y^2})^{\theta+\frac{1}{2}} y^{2\theta+4}}{y^2} e^{-z^2 y^2/2} dy \\
&= (\frac{1}{\sqrt{\pi}}) \frac{z^{2\theta+3}}{\Gamma(\theta+3/2)} \frac{1}{2^{\theta+1}} \int_1^\infty y (y^2-1)^{\theta+\frac{1}{2}} e^{-z^2 y^2/2} dy \\
&\overset{(t=y^2-1)}{=} (\frac{1}{\sqrt{\pi}}) \frac{z^{2\theta+3}}{\Gamma(\theta+3/2)} \frac{1}{2^{\theta+2}} e^{-z^2/2} \int_0^\infty t^{\theta+\frac{1}{2}} e^{-z^2 t/2} dy \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) \frac{z^{2\theta+3}}{\Gamma(\theta+3/2)} \frac{e^{-z^2/2}}{z^{2\theta+3}} \Gamma(\theta+3/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.
\end{aligned}
$$

■

El resultado anterior fue observado para $\theta = 0$ (distribución de semicírculo) en Pérez-Abreu [40]. El caso $\theta = -1$ (arcoseno) está implícito en el método Box-Muller para generar un par de variables aleatorias Gaussiana ([19]).

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que la sucesión de potencias de semicírculo propiamente escalada converge a la distribución Gaussiana estándar, resultado conocido como Teorema de Poincaré.

Corolario 2.6.1 *Para $n \geq 1$ sea S_n una variable aleatoria con distribución potencia de semicírculo $PS(n,1)$. La sucesión de variables aleatorias $\left\{(\sqrt{2(n+2)}S_n\right\}_{n\geq 1}$ converge en distribución a la distribución Gaussiana estándar.*

Demostración Por la ley de los grandes números, $(n+2)^{-1}G_{n+2}$ converge en probabilidad a $E(G_1) = 2$, donde $G_m \sim G(m,2)$. De (2.39) y usando el teorema de Slutsky ([15]) tenemos

$$\sqrt{2(n+2)}S_n = \sqrt{2(n+2)}\,(G_{n+2})^{-1/2}\, Z \to_{n\to\infty} Z,$$

donde la convergencia es en distribución ■

Además podemos calcular fácilmente los momentos de las distribuciones potencia de semicírculo.

Proposición 2.6.2 *Sea* S_θ *una variable aleatoria con distribución potencia de semicírculo* $PS(\theta, \varsigma)$*, para* $\theta > -3/2$, $\varsigma > 0$*. Entonces,*

a) Para cualquier $\alpha > 0$

$$E\,|S_\theta|^\alpha = \frac{\varsigma^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha/2 + 1/2))\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(2\theta+2+\alpha/2)}.$$

b) Para cualquier entero $k \geq 1, ES_\theta^{2k+1} = 0$ *y*

$$\begin{aligned} ES_\theta^{2k} &= \left(\frac{\varsigma}{2}\right)^{2k} C_k(k+1)!\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)} \\ &= \left(\frac{\varsigma}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{k!}\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)}. \end{aligned}$$

c) Si θ *es un entero*

$$ES_\theta^{2k} = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{\theta+k+1}{k}}\left(\frac{\varsigma}{2}\right)^{2k}.$$

Demostración Es suficiente tomar el caso $\varsigma = 1$. Para $\alpha > 0$, si Z es Gaussiana estándar y $G_{\theta+2}$ es gamma, entonces es bien conocido que

$$E\,|Z|^\alpha = \frac{2^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha/2 + 1/2)$$

y

$$EG_{\theta+2}^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2}\frac{\Gamma(\theta+2+\alpha/2)}{\Gamma(\theta+2)}.$$

Usando que $Z \stackrel{d}{=} \sqrt{G_{\theta+2}}S_\theta$ y el hecho de que S_θ y $G_{2\theta+1}$ son independientes, obtenemos

$$E\,|S_\theta|^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha/2 + 1/2)\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(2\theta+2+\alpha/2)}.$$

Cuando k es entero, por simetría, $ES_\theta^{2k+1} = 0$. Por otra parte si $\alpha = 2k$ tenemos $\Gamma(\alpha/2+1/2) =$

$\sqrt{\pi}2^{-2k}(2k)!/k!$. Entonces,

$$\begin{aligned} ES_\theta^{2k} &= \frac{1}{2^k}\frac{(2k)!}{k!}\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)} \\ &= \frac{1}{2^k}C_k(k+1)!\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)}. \end{aligned}$$

■

Observación 2.6.2 *a) Para un $\theta > -3/2$, la distribución correspondiente con media cero y varianza uno se obtiene cuando $\varsigma^2 = 2\Gamma(\theta+3)/\Gamma(\theta+2)$. En particular, cuando θ es un entero, la distribución estándar está dada cuando $\varsigma^2 = 2(\theta+2)$.*

b) Cuando θ es entero,los momentos $C_k^\theta = \binom{2k}{k}/\binom{\theta+k+1}{k}$ son un tipo de números de Catalán generalizados (difieren en un factor $\binom{2(\theta+1)}{\theta+1}$ de los llamados Super Números de Catalán y por lo tanto $C_k^\theta(\theta+2)(\theta+3)\cdots(2\theta+1)!$ es un entero múltiplo de $\theta!$); ver [20], [25].

Existe una recursión entre las potencias de semicírculo, la cual probamos a continuación. Este resultado es una generalización de una observación de Ledoux [32], quien señaló que la ley de semicírculo es una mezcla de la ley arcoseno con una distribución uniforme.

Proposición 2.6.3 *Para $\theta > -1/2$, $S_\theta \overset{d}{=} U^{1/(2(\theta+1))}S_{\theta-1}$.*

Demostración Sea $V = U^{1/(2(\theta+1))}S_{\theta-1}$, entonces la densidad de V puede ser calculada como sigue:

$$\begin{aligned} f_V(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}c_{\theta-1}(\sqrt{1-y^2})^{2\theta-1}2(\theta+1)(\frac{x}{y})^{2\theta+1}dy \\ &= 2c_{\theta-1}(\theta+1)\,|x|^{2\theta+1}\int_x^1\frac{(\sqrt{1-y^2})^{2\theta+1}}{y^{2\theta+2}}dy \\ &= 2c_{\theta-1}(\theta+1)\,|x|^{2\theta+1}\int_{\mathrm{arcsen}(x)}^{\pi/2}\frac{\cos(y)^{2\theta}}{\mathrm{sen}(y)^{2\theta+2}}dy \\ &= 2c_{\theta-1}(\theta+1)\,|x|^{2\theta+1}\left.\frac{\cos(y)^{2\theta+1}}{\mathrm{sen}(y)^{2\theta+1}}\right]_{\mathrm{arcsen}(x)}^{\pi/2} \\ &= \frac{2\theta+2}{2\theta+1}c_{\theta-1}(\sqrt{1-x^2})^{2\theta+1} \\ &= c_\theta(\sqrt{1-x^2})^{2\theta+1} \end{aligned}$$

■

Finalmente demostramos que la transformada de Cauchy de una distribución potencia del semicírculo está dada en términos de la función hipergeométrica de Gauss

$$\mathcal{F}(a,b;c,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k \tag{2.40}$$

donde para un número complejo ζ y un entero no negativo k usamos el símbolo de Pochhammer $(\zeta)_k$ para denotar la expresión

$$(\zeta)_k=\zeta(\zeta+1)\cdots(\zeta+k-1).$$

Proposición 2.6.4 *La transformada de Cauchy de $f_\theta(x\,;\varsigma)$ está dada por*

$$G_{f_\theta}(z)=z^{-1}\mathcal{F}(\frac{1}{2},1;\theta+2;\varsigma^2z^{-2}). \tag{2.41}$$

Demostración De (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} G_{f_\theta}(z)=E(z-X)^{-1}&=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-1}EX^k\\ &=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-2k}EX^{2k}\\ &=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-2k}\left(\frac{\varsigma}{2}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{k!}\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Usando en (2.40) las expresiones $(\theta+2)_k=\Gamma(\theta+2+k)/\Gamma(\theta+2)$, $(1/2)_k=(2k)!/2^{2k}$ y $(1)_k=k!$, a partir de (2.42) obtenemos (2.41). ■

Una representación integral alternativa para la transformada de Cauchy se sigue de la expresión integral de la función hipergeométrica, ver [22, 9.111 p. 995]

Corolario 2.6.3 *Para $\theta>-1$ se tiene*

$$G_{f_\theta}(z)=\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+1)}\int_0^1(1-t)^\theta(z^2-t\varsigma^2)^{-1/2}dt.$$

Desafortunadamente resulta muy difícil tratar de invertir la función $F_{f_\theta}=1/G_{f_\theta}(z)$ para obtener en forma explícita las transformadas cumulantes libres para valores de θ diferentes de los ya mencionados. Sin embargo, usando criterios de cumulantes basados en el enfoque combinatorio, en el Capítulo 4 mostraremos que ciertas Potencias de Semicírculo no son infinitamente divisibles en el sentido libre.

Capítulo 3

Convolución y Divisibilidad Infinita Libre de Medidas

En este capítulo presentamos los conceptos de convolución y divisibilidad infinita libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ desde un punto de vista analítico. Este enfoque fue iniciado en 1986 por Voiculescu [52] para el caso de medidas con soporte compacto, continuado en 1992 por Maaseen [34] para el caso de medidas con segundo momento finito y completado en 1993 por Bercovici y Voiculescu [10] para medidas con soporte no acotado.

Primero definimos la convolución libre de dos medidas a partir de la transformada cumulante. Después, a partir de esta convolución introducimos un nuevo concepto de divisibilidad infinita libre. Además, presentamos la biyección de Bercovici Pata entre leyes infinitamente divisibles clásicas y libres y sus principales propiedades. Finalmente, hacemos una breve presentación del tema de convolución multiplicativa y concluimos con ejemplos, algunos bien conocidos y otros nuevos, señalando casos que son infinitamente divisibles en ambos sentidos.

3.1 Convolución Aditiva Libre de Medidas

Usamos ahora la teoría del Capítulo 2 para definir la **convolución libre (aditiva)** de dos medidas de probabilidad μ_1 y μ_2, desde un punto de vista analítico, sin hacer referencia a variables aleatorias libres.

Sean $\mathcal{C}_{\mu_1}$ y $\mathcal{C}_{\mu_2}$ las transformadas cumulantes de μ_1 y μ_2 definidas en los dominios $\Gamma_{\alpha_1,\beta_1}$

y $\Gamma_{\alpha_2,\beta_2}$ respectivamente. De (2.16) y el Teorema 2.4.2 sabemos que existe una medida μ de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{C}_\mu = \mathcal{C}_{\mu_1} + \mathcal{C}_{\mu_2}$ en $\Gamma_{\alpha_1,\beta_1} \cap \Gamma_{\alpha_2,\beta_2}$. Esta medida es única por la unicidad de la transformada de Voiculescu. Por lo tanto, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 3.1.1 *Sean μ_1 y μ_2 medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Se define la* ***convolución libre*** *de μ_1 y μ_2 como la única medida de probabilidad $\mu_1 \boxplus \mu_2$ en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{C}_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) = \mathcal{C}_{\mu_1}(z) + \mathcal{C}_{\mu_2}(z), \qquad z \in \Gamma_{\alpha_1,\beta_1} \cap \Gamma_{\alpha_2,\beta_2}. \tag{3.1}$$

En términos de transformadas de Voiculescu, la condición (3.1) es equivalente a pedir que

$$\phi_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) = \phi_{\mu_1}(z) + \phi_{\mu_2}(z) \tag{3.2}$$

ó

$$\mathcal{R}_{\mu_1 \boxplus \mu_2}(z) = \mathcal{R}_{\mu_1}(z) + \mathcal{R}_{\mu_2}(z). \tag{3.3}$$

Como en el caso de convolución clásica $\star$ la operación de convolución libre $\boxplus$ es conmutativa y asociativa, lo cual se sigue trivialmente de la definición. Asimismo, si μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ y δ_x una medida de Dirac, $\mu \boxplus \delta_x$ es la traslación de la medida μ por x, es decir $\mu \boxplus \delta_x(A) = \mu(A - x)$. Por lo tanto $\mu \boxplus \delta_x = \mu \star \delta_x$. Por otro lado, recordemos que para $c \neq 0$ la dilatación de una medida μ en $\mathbb{R}$ es la medida $D_c\mu$ en $\mathbb{R}$ tal que $D_c\mu(A) = D_c\mu(c^{-1}A)$. Es importante notar que la transformada cumulante libre se comporta exactamente igual, con respecto a la dilatación D_c, que la transformada cumulante clásica, es decir, $\mathcal{C}_{D_c\mu} = \mathcal{C}_\mu(cz)$, para cualquier medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ y cualquier constante $c \neq 0$.

Por otra parte, algunos aspectos interesantes de la convolución libre son muy diferentes a lo que se encuentra en la convolución clásica. Por ejemplo, para la convolución clásica se cumple que $sop(\mu \star v) = sop(\mu) + sop(v)$, mientras si μ y v son medidas con soporte compacto y a, b, c los máximos de los soportes de μ, v y $\mu \boxplus v$ respectivamente, entonces $c = a + b$ si $\mu(\{a\}) + v(\{b\}) \geq 1$, mientras que $c < a + b$ si $\mu(\{a\}) + v(\{b\}) < 1$.

También en contraste con la convolución clásica, la convolución libre de dos medidas atómicas puede ser una medida absolutamente continua. En el Ejemplo 3.7.1, al final de este capítulo, mostramos que la distribución arcoseno es la convolución libre de la medida atómica

$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ con ella misma. Este ejemplo también permite ver que, a diferencia del caso clásico, el operador $\boxplus$ no es distributivo con respecto a la suma convexa de medidas de probabilidad. En efecto, si $\boxplus$ fuera distributiva tendríamos en particular, tomando $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, que

$$\begin{aligned} \mu \boxplus \mu &= \mu \boxplus \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1) = \frac{1}{2}(\mu \boxplus \delta_{-1}) + \frac{1}{2}(\mu \boxplus \delta_1) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1) \boxplus \delta_{-1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1) \boxplus \delta_1) \\ &= \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2, \end{aligned}$$

que es una contradicción pues

$$\frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2 \neq A_{0,2}$$

Otras propiedades en que es muy diferente la probabilidad libre de la probabilidad clásica surgen en el estudio de leyes infinitamente divisibles.

3.2 Divisibilidad Infinita Libre

En completa analogía al caso de divisibilidad infinita clásica definimos el concepto de **divisibilidad infinita libre** (aditiva).

3.2.1 Definición y Propiedades Básicas

Definición 3.2.1 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Decimos que μ es* ***infinitamente divisible*** *con respecto a la convolución $\boxplus$, si para todo entero positivo n, existe una medida de probabilidad μ_n en $\mathbb{R}$, tal que*

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \mu_n \boxplus \ldots. \boxplus \mu_n}_{n\ veces}. \tag{3.4}$$

Denotamos por $ID(\boxplus)$ a la clase de las medidas infinitamente divisibles con respecto a la convolución $\boxplus$. Si $\mu \in ID(\boxplus)$ decimos también que μ es ***$\boxplus$-infinitamente divisible*** *o* ***infinitamente divisible libre****.*

Usando la asociatividad y la conmutatividad de $\boxplus$ se siguen fácilmente propiedades útiles de medidas $\boxplus$-infinitamente divisibles.

Proposición 3.2.1 *Sean μ y ν medidas de probabilidad $\boxplus$-infinitamente divisibles. Se cumple que*

i) $\mu \boxplus \nu$ es $\boxplus$-infinitamente divisible.

ii) Si

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \mu_n \boxplus ... \boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}}$$

entonces μ_n es $\boxplus-$infinitamente divisible. (Llamamos la n-ésima componente de μ a μ_n).

Demostración i) Sea n un entero positivo. Como $\mu, v \in ID(\boxplus)$ tenemos que μ y ν se pueden escribir como

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \mu_n \boxplus ... \boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}}, \; v = \underbrace{\nu_n \boxplus \nu_n \boxplus ... \boxplus \nu_n}_{n \text{ veces}}$$

entonces

$$\mu \boxplus v = \underbrace{\mu_n \boxplus ... \boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}} \boxplus \underbrace{\nu_n \boxplus ... \boxplus \nu_n}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(\mu_n \boxplus v_n) \boxplus ... \boxplus (\mu_n \boxplus v_n)}_{n \text{ veces}}$$

ii) Sea m un entero positivo y sea μ_n la n-ésima componente de μ. Entonces $\mathcal{C}_{\mu_n} = \frac{1}{n}\mathcal{C}_\mu$. Como $\mu \in ID(\boxplus)$ también $\frac{1}{nm}\mathcal{C}_\mu$ es una transformada de cumulantes libre entonces existe una medida μ_{nm} tal que

$$\mu_n = \underbrace{\mu_{nm} \boxplus \mu_{nm} \boxplus ... \boxplus \mu_{nm}}_{m \text{ veces}}.$$

Esto prueba que μ_n es $\boxplus$-infinitamente divisible. ■

Más aún, la divisibilidad infinita libre define un **$\boxplus$-semigrupo** continuo de medidas $(\mu_t)_{t\geq 0}$ en el espacio de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ con la topología de convergencia en distribución o convergencia débil de medidas de probabilidad.

Lema 3.2.1 *Sea μ una medida de probabilidad $\boxplus$-infinitamente divisible. Existe una familia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que*

i) $\mu_0 = \delta_0, \mu_1 = \mu$.

ii) $\mu_{t+s} = \mu_t \boxplus \mu_s$ para $= s, t \geq 0$

iii) La aplicación $t \to \mu_t$ es continua con respecto a la topología débil.

Demostración Si $\mu \in ID(\boxplus)$, de la Proposición 3.2.1 y (3.1), la función $t\mathcal{C}_\mu$ es de la forma $\mathcal{C}_{\mu_t}$ cuando t es racional. De Teorema 2.4.3 se sigue que $t\mathcal{C}_\mu$ también es una transformada cumulante libre para todo t real. De la misma forma iii) se sigue del Teorema 2.4.3. Por otra parte (ii) se sigue de la definición de convolución libre ya que $\mathcal{C}_{\mu_{t+s}} = (t+s)\mathcal{C}_\mu = t\mathcal{C}_\mu + s\mathcal{C}_\mu = \mathcal{C}_{\mu_t} + \mathcal{C}_{\mu_s}$. ■

3.2.2 Caracterizaciones y otras Propiedades

A partir de la transformada de Voiculescu y sus variantes es posible caracterizar las medidas $\mu \in ID(\boxplus)$, con representación análoga a la representación de Levy-Kintchine. La primera caracterización para medidas con soporte no acotado fue dada por Bercovici y Voiculescu [10] en términos de un par característico (γ, σ).

Teorema 3.2.2 *[10, Teo. 5.10] Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Los siguientes enunciados son equivalentes*

i) μ es $\boxplus$-infinitamente divisible.

ii) ϕ_μ tiene una extensión analítica definida en $\mathbb{C}^+$ con valores en $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$.

iii) Existe una medida finita σ en $\mathbb{R}$ y una constante real γ tal que

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{z-t}\sigma(dt), \qquad z \in \mathbb{C}^+.$$

En caso de que se cumpla (i), (ii) y (iii) para (γ, σ) se le conoce como par generador de μ.

Demostración Omitimos partes técnicas de la prueba para su fácil lectura. La prueba se puede ver a detalle en [10].

Supongamos que μ es una medida de probabilidad $\boxplus$-infinitamente divisible en $\mathbb{R}$ y que $\{\mu_t : t \geq 0\}$ es como en el Lema 3.2.1. Sea $\Gamma_{\alpha,\beta}$ un domino donde $\phi_\mu(z)$ esté bien definido, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{C}$ con $|t| \leq \varepsilon$, la función $z + t\phi_\mu(z)$ tiene inversa $F(t,z)$ definida en $\Gamma_{\alpha',\beta'} \subset \Gamma_{\alpha,\beta}$. La función $F(t,z)$ es analítica en t y z. Además la función $G(t,z) = 1/F(t,z)$ coincide con $G_{\mu_t}(z)$ en $\Gamma_{\alpha',\beta'}$ para $t \geq 0$. Así, derivando la ecuación $G(t, z + t\phi_\mu(z)) = 1/z$, con respecto a t, obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, z + t\phi_\mu(z)) + \phi_\mu(z)\frac{\partial G}{\partial z}(t, z + t\phi_\mu(z)) = 0$$

para $t \geq 0$ y $z \in \Gamma_{\alpha',\beta'}$. En particular para $t = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\phi_\mu(z) &= \frac{\frac{\partial G}{\partial t}(0,z)}{\frac{\partial G}{\partial t}(0,z)} = \frac{\frac{\partial G}{\partial t}(0,z)}{\frac{\partial}{\partial z}(1/z)} = z^2 \frac{\partial G}{\partial t}(0,z) \\
&= z^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[G(\varepsilon, z) - G(0,z)] \\
&= z^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{z-t} - \frac{1}{z}] \mu_\varepsilon(dt) \\
&= z^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zt}{z-t} \mu_\varepsilon(dt).
\end{aligned}$$

Si definimos la familia de medidas $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por $d\sigma_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} t^2/(1+t^2)\mu_\varepsilon(dt)$, podemos reescribir el último término como

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zt}{z-t} \mu_\varepsilon(dt) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{z-t} \sigma_\varepsilon(dt) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+1} \mu_\varepsilon(dt),$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$\phi_\mu(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{z-t} \sigma(dt)$$

donde $\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_\varepsilon$ y $\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} t/(t^2+1)\mu_\varepsilon(dt)$. Esto muestra que (i) implica (iii)

La equivalencia entre (ii) y (iii) se sigue de las Proposiciones 2.3.1 y 2.4.1. El hecho de que (iii) implica (i) se sigue de que si ϕ se puede representar de la forma

$$\phi(z) = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{z-t} d\sigma(t)$$

entonces definiendo

$$\phi_n(z) = \alpha + \int_{-n}^{n} \frac{1+tz}{z-t} d\sigma(t)$$

se tiene que $\phi_n(z) = \phi_{\mu_n}(z)$ para algunas medidas de probabilidad μ_n. El Teorema 2.4.3 nos dice que $\phi = \phi_\mu$. El mismo resultado se puede obtener para ϕ/k, lo que dice que μ es $\boxplus$-infinitamente divisible. ■

Corolario 3.2.3 *Sea* $\phi : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ *una función analítica. Entonces* ϕ *es la continuación* *analítica de ϕ_μ para una medida $\mu \in ID(\boxplus)$ si y solo sí*

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\Gamma_\alpha} \frac{\phi(z)}{z} = 0$$

para alguna $\alpha > 0$.

Recordemos que una medida de probabilidad μ es infinitamente divisible en el sentido clásico si y sólo si su función cumulante clásica $\log \widehat{\mu}$ tiene la representación Lévy-Khintchine

$$\log \widehat{\mu}(u) = i\eta u - \frac{1}{2}au^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(t))\nu(dt), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ y ν es una medida de Lévy en $\mathbb{R}$, es decir $\int_{\mathbb{R}} \min(1, t^2)\nu(dt) < \infty$ y $\nu(\{0\}) = 0$. Si existe esta representación, la terna (η, a, ν) está determinada de forma única y se llama la terna característica clásica de μ.

La correspondiente representación de Lévy-Khintchine en términos de una terna para divisibilidad infinita libre fue propuesta por Barndorff-Nielsen y Thorbjørnsen [7].

Teorema 3.2.4 *[7, Prop 4.16] Una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ es $\boxplus$-infinitamente divisible si y sólo si existen $\eta \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ y una medida de Lévy ν en $\mathbb{R}$ de tal forma que*

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \eta z + az^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 - zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t) \right) \nu(dt), \quad z \in \mathbb{C}^-. \tag{3.6}$$

En este caso la terna (η, a, ν) esta determinada de forma única y se llama la terna característica libre de μ.

Demostración Sea $\mu \in ID(\boxplus)$ con transformada de Voiculescu dada por el Teorema 3.2.2, es decir

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + tz}{z - t}\sigma(dt), \qquad z \in \mathbb{C}^+.$$

Definimos la terna (η, a, ν) por

$$\begin{aligned} a &= \sigma(\{0\}), \\ \nu(dt) &= \frac{1+t^2}{t^2} 1_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(t)\sigma(dt), \\ \eta &= \gamma + \int_{\mathbb{R}} t(1_{[-1,1]}(t) - \frac{1}{1+t^2})\rho(dt). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ahora, para $z \in \mathbb{C}^-$, la transformada cumulante libre está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu(z) &= z\phi_\mu(\frac{1}{z}) = z\left(\gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+t(1/z)}{z-t(1/z)}\sigma(dt)\right) = \gamma z + \int_{\mathbb{R}} \frac{z^2+tz}{1-tz}\sigma(dt) \\ &= \eta z - \left(\int_{\mathbb{R}} t(1_{[-1,1]}(t) - \frac{1}{1+t^2})\rho(dt)\right) z + az^2 + \int_{\mathbb{R}} (\frac{z^2+tz}{1-tz})\frac{t^2}{1+t^2} v(dt) \\ &= \eta z - \left(\int_{\mathbb{R}} t(\frac{t}{1+t^2} - 1_{\mathbb{R}/[-1,1]}(t))\rho(dt)\right) z + az^2 + \int_{\mathbb{R}} (\frac{z^2}{1-tz} + \frac{tz}{1+t^2})t^2\nu(dt) \\ &= \eta z + az^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t^2 z^2}{1-tz} - tz_{\mathbb{R}/[-1,1]}(t)\right)\nu(dt) \\ &= \eta z + az^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t)\right)\nu(dt) \end{aligned}$$

y para el recíproco los pasos anteriores se pueden revertir. ■

Para terminar con esta sección veremos algunas propiedades de las leyes infinitamente divisibles. Antes, necesitamos enunciar un resultado técnico de teoría de funciones que usaremos en la demostración de la Proposición 3.2.2, ver [10] para una demostración.

Lema 3.2.2 *Sea $u : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ una función analítica, y sea Γ una curva en $\mathbb{C}^+$ que se aproxima a cero no tangencialemente a $\mathbb{R}$. Si $\lim_{z\to 0, z\in\Gamma} u(z) = L$, entonces $\lim_{z\to 0, z\in\Gamma_\alpha} u(z) = L$ para todo $\alpha > 0$.*

Proposición 3.2.2 *Sea μ una medida $\boxplus$-infinitamente divisible en $\mathbb{R}$.*

i) Se tiene que $F_\mu(z) + \phi_\mu(F_\mu(z)) = z$, además

$$1 + \mathcal{C}_\mu(G_\mu(z)) = zG_\mu(z), \quad z \in \mathbb{C}^+. \tag{3.8}$$

ii) μ tiene a lo más un átomo.

iii) Si μ no es una medida de Dirac, entonces, para n suficientemente grande, la medida

$$\mu^{\boxplus n} = \underbrace{\mu \boxplus \mu \boxplus ... \boxplus \mu}_{n \ veces}$$

no tiene átomos.

Demostración El hecho de que $F_\mu(z) + \phi_\mu(F_\mu(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^+$ se obtiene como continuación analítica, ya que ϕ tiene continuación analítica por el Teorema 3.2.2. La identidad $1 + \mathcal{C}_\mu\left(G_\mu(z)\right) = zG_\mu(z)$ se obtiene de la siguientes siguientes igualdades

$$\begin{aligned} z &= F_\mu(z) + \phi_\mu(F_\mu(z)) \\ &= \frac{1}{G_\mu(z)} + \phi_\mu(\frac{1}{G_\mu(z)}) \\ &= \frac{1}{G_\mu(z)} + \frac{\mathcal{C}_\mu\left(G_\mu(z)\right)}{G_\mu(z)} \end{aligned}$$

donde usamos la definición de la transformada cumulante libre $\mathcal{C}_\mu$ dada por la ecuación (2.16).

Asumiendo $\beta = \mu(\{a\}) > 0$, es decir, a es un átomo de la medida μ, se tiene

$$|G_\mu(a+iy)| \geq |\operatorname{Im} G_\mu(a+iy)| \geq \frac{\beta}{y},$$

y entonces $|F_\mu(a+iy)| \leq \frac{y}{\beta}$. Más aún

$$|\operatorname{Re}(F_\mu(a+iy))| \leq |F_\mu(a+iy)| \leq \frac{y}{\beta} \leq \operatorname{Im}|F_\mu(a+iy)|/\beta$$

entonces $F_\mu(a+iy) \in \Gamma_{1/\beta}$ para todo y. Entonces la curva $\Gamma = \{F_\mu(a+iy : y \in (0,\infty)\}$ se está aproximando a cero no tangencialemente, y

$$\lim_{z\to 0, z\in\Gamma} (z + \phi_\mu(z)) = a.$$

Por lo tanto $\lim_{z\to 0, z\in\Gamma} \phi_\mu(z) = a$ y por el Lema 3.2.2 tenemos la unicidad de a, ya que el límite no puede tomar dos valores.

Finalmente supongamos que ϕ_μ tiene representación

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{z-t}\sigma(dt),$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$ y σ una medida finita. Como μ no es una medida de Dirac, existen a y b tales que $\sigma[a,b] > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\phi_\mu(z) &\leq -y\int_a^b \frac{1+t^2}{|z-t|^2}\sigma(dt). \\ &\leq cy\max\left\{\frac{1}{|z-a|^2}, \frac{1}{|z-b|^2}\right\}, \end{aligned}$$

donde $z = x+iy$ y c es una constante que sólo depende de σ, a y b. Entonces si $\operatorname{Im}\{z+n\phi_\mu(z)\} > 0$ se tiene $\max\left\{\frac{1}{|z-a|^2}, \frac{1}{|z-b|^2}\right\} \leq 1/nc$.

Así para n suficientemente grande la desigualdad $\operatorname{Im}\{z+n\phi_\mu(z)\} > 0$ implica que $|z| > 0$ y por lo tanto no habrá curva $\Gamma \subset F_{\mu^{\boxplus n}}$ que se aproxime a cero. Entonces, $\mu^{\boxplus n}$ no tiene átomos para esos valores de n. ■

En particular, ninguna distribución discreta no trivial es $\boxplus$-infinitamente divisible, contrastando el hecho de que en el caso clásico existen muchas. Por otra parte, existen muchos ejemplos de distribuciones con soporte compacto que son $\boxplus-$infinitamente divisible, mientras que en el caso clásico sólo las acumuladas en un punto lo son.

El siguiente teorema prueba que, así como la divisibilidad infinita clásica, la divisibilidad infinita libre es cerrada bajo convergencia en distribución.

Proposición 3.2.3 *Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de medidas de probabilidad $\boxplus$-infinitamente divisibles en $\mathbb{R}$ convergente en distribución a una medida de probabilidad μ. Entonces μ es $\boxplus$-infinitamente divisible.*

Demostración Por el Teorema 2.4.3 de continuidad de Lévy libre existen α, β de tal forma que la sucesión $\{\phi_{\mu_n}\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en compactos de $\Gamma_{\alpha,\beta}$ a la función ϕ_μ. Por el Teorema 3.2.2 ϕ_{μ_n} se extiende a una función $\widehat{\phi}_{\mu_n} : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$. Dado que ϕ es la restricción de ϕ_μ, se sigue que ϕ tiene una extensión en $\mathbb{C}^+$ con valores en $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$. Finalmente del Teorema 3.2.2 se sigue que μ es $\boxplus$-infinitamente divisible ■

3.3 Biyección entre Leyes Infinitamente Divisibles Clásicas y Libres

De las expresiones (3.5) y (3.6) se ve que existe una gran similitud entre la representación de *Lévy-Khintchine* clásica para medidas $\star$-infinitamente divisibles clásicas $ID(\star)$ y la representación de *Lévy-Khintchine* para medidas $\boxplus$-infinitamente divisibles $ID(\boxplus)$. De hecho de estas representaciones es claro que existe una biyección entre $ID(\star)$ y $ID(\boxplus)$. Esta biyección fue introducida por Bercovici y Pata en [9]. En términos de ternas características es la siguiente.

Definición 3.3.1 *Por la* ***Biyección de Bercovici-Pata*** *denotamos a la aplicación* $\Lambda : ID(\star) \to ID(\boxplus)$ *que manda la medida* μ *en* $ID(\star)$ *con terna característica clásica* (η, a, ν) *a* $\Lambda(\mu)$ *en* $ID(\boxplus)$ *con terna característica libre* (η, a, ν)*.*

A continuación probamos algunas propiedades de la biyección Λ.

Teorema 3.3.2 *La biyección* $\Lambda : ID(\star) \to ID(\boxplus)$ *tiene la siguientes propiedades*

i) Si $\mu_1, \mu_2 \in ID(\star)$*, entonces* $\Lambda(\mu_1 \star \mu_2) = \Lambda(\mu_1) \boxplus \Lambda(\mu_2)$*.*

ii) Para toda constante c *en* $\mathbb{R}$*, se tiene* $\Lambda(\delta_c) = \delta_c$*.*

iii) Sea $\mu \in ID(\star)$ *y* $c \in \mathbb{R}$*, se tiene* $\Lambda(D_c\mu) = D_c\Lambda(\mu)$*.*

Demostración i) Sean μ_1 y μ_2 con ternas características clásicas (η_1, a_1, ν_1) y (η_2, a_2, ν_2) entonces $\mu_1 \star \mu_2$ tiene terna característica $(\eta_1 + \eta_2, a_1 + a_2, \nu_1 + \nu_2)$, donde $(\nu_1 + \nu_2)(A) := \nu_1(A) + \nu_2(A)$ para todo conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{aligned} \log \widehat{\mu_1}(u) + \log \widehat{\mu_2}(u) &= i\eta_1 u - \frac{1}{2}a_2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(t))\nu_1(dt) + \\ &\quad ic_2 u - \frac{1}{2}a_2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(t))\nu_2(dt) \\ &= i(\eta_1 + \eta_2)u - \frac{1}{2}(a_1 + a_2)u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iut} - 1 - iut1_{[-1,1]}(t))(\nu_1 + \nu_2)(dt)\,. \end{aligned}$$

Un argumento idéntico para la transformada cumulante libre permite ver que $\Lambda(\mu_1) \boxplus \Lambda(\mu_2)$ tiene la terna característica libre $(\eta_1 + \eta_2, a_1 + a_2, \nu_1 + \nu_2)$.

ii) Esto es sólo observar que la terna característica clásica de δ_c es $(c, 0, 0)$, mientras que su terna libre es $(c, 0, 0)$.

iii) Hemos visto en la Sección 3.1 que la transformada cumulante de $D_c\mu$ se comporta igual que la transformada de Fourier con respecto a la dilatación en consecuencia $\mathcal{C}_{D_c\Lambda(\mu)}(z) = \mathcal{C}_{\Lambda(\mu)}(cz) = \mathcal{C}_{\Lambda(D_c\mu)}(z)$. ■

Como consecuencia de (i), (ii) y (iii) en el teorema anterior tenemos el siguiente corolario. Debemos mencionar que este corolario no sólo da una idea de "geometría" de la biyección Λ, sino que sirve para dar una biyección entre las leyes $\star$-estables y sus correspondientes en probabilidad libre.

Corolario 3.3.3 *La biyección $\Lambda : ID(\star) \to ID(\boxplus)$ es invariante bajo transformaciones afines, es decir, si $\mu \in ID(\star)$ y $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un transformación afín entonces*

$$\Lambda(\psi(\mu)) = \psi(\Lambda(\mu)).$$

Demostración Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una transformación afín de la forma $\psi(t) = dt + c$. Entonces para una medida de probabilidad $\psi(\mu) = D_d\mu \star \delta_c$, y también $\psi(\mu) = D_d\mu \boxplus \delta_c$. Tomamos $\mu \in ID(\star)$. Por (ii) y (iii) del Teorema 3.3.2

$$\Lambda(\psi(\mu)) = \Lambda(D_d\mu \star \delta_c) = D_d\Lambda(\mu) \boxplus \Lambda(\delta_c) = D_d\Lambda(\mu) \boxplus \delta_c = \psi(\Lambda(\mu)),$$

lo que demuestra el corolario ■

Para terminar con esta sección, estudiamos una propiedad topológica de la biyección Λ. El siguiente es un teorema análogo a la versión clásica de convergencia de distribuciones infinitamente divisibles en términos de la terna característica, una versión equivalente de la prueba aquí formulada se da en [7], en términos del par generador (γ, σ).

Teorema 3.3.4 *Sea μ una medida en $ID(\boxplus)$, y sea (μ_n) una sucesión de medidas en $ID(\boxplus)$. Para cada n sea (η_n, a_n, ν_n) la terna característica libre de μ_n. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, cuando $n \to \infty$

ii) $a_n \to a$, $\eta_n \to \eta$ y $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$ cuando $n \to \infty$.

Demostración De [7, Teo. 5.13] , $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, cuando $n \to \infty$ es equivalente a que el par generador (γ, σ) cumpla $\gamma_n \to \gamma$ y $\sigma_n \xrightarrow{w} \sigma$. Ahora, si $\gamma_n \to \gamma$ y $\sigma_n \xrightarrow{w} \sigma$. Recordemos de la demostración de la Proposición 3.2.4 que la terna característica se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} a &= \sigma(\{0\}), \\ \nu(dt) &= \frac{1+t^2}{t^2} 1_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(t)\sigma(dt), \\ \eta &= \gamma + \int_{\mathbb{R}} t(1_{[-1,1]}(t) - \frac{1}{1+t^2})\sigma(dt). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es claro que $a_n \to a$ pues $\sigma_n\{0\} \to \sigma\{0\}$. Por otra parte como

$$\begin{aligned} |\eta_n - \eta| &\leq |\gamma_n - \gamma| + \left| \int_{\mathbb{R}} t(1_{[-1,1]}(t) - \frac{1}{1+t^2})(\sigma_n - \sigma)(dt) \right| \\ &\leq |\gamma_n - \gamma| + \left| \int_{-1}^{1} (\sigma_n - \sigma)(dt) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} (\sigma_n - \sigma)(dt) \right| \end{aligned}$$

de donde $\eta_n \to \eta$ pues $\gamma_n \to \gamma$ y la función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ es continua y esta acotada. Por último, la equivalencia entre $\sigma_n \xrightarrow{w} \sigma$ y $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$ se sigue de que $\lim_{t\to\infty} \frac{1+t^2}{t^2} = 1$. ■

Finalmente, como consecuencia del teorema anterior y el correspondiente en probabilidad clásica tenemos el siguiente resultado

Corolario 3.3.5 *La biyección de Bercovici-Pata $\Lambda : ID(\star) \to ID(\boxplus)$ es un homeomorfismo en la convergencia en distribución. Es decir, si μ es una medida en $ID(\star)$ y (μ_n) es una sucesión de medidas en $ID(\boxplus)$, entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, cuando $n \to \infty$, si y sólo si $\Lambda(\mu_n) \xrightarrow{w} \Lambda(\mu)$, cuando $n \to \infty$.*

Demostración Para cada n, sea (η_n, a_n, ν_n) la terna característica libre de μ_n y sea (η, a, ν) la terna característica libre de $\Lambda(\mu)$. Supongamos que $\Lambda(\mu_n) \xrightarrow{w} \Lambda(\mu)$. Entonces por el Teorema 3.3.4 $a_n \to a$, $\eta_n \to \eta$ y $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$. Como (η_n, a_n, ν_n) es la terna característica clásica de μ_n y (η, a, ν) la de μ, se sigue de la versión clásica de Gnedenko y Kolmogorov [21] que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. Un argumento idéntico nos dice que $\Lambda(\mu_n) \xrightarrow{w} \Lambda(\mu)$ si $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. ■

3.4 Distribuciones No Negativas

Los resultados de esta sección no se encontraron reportados en la literatura. A continuación nos restringimos al conjunto de medidas que son infinitamente divisibles y tienen soporte en

$\mathbb{R}^+$. Denotaremos entonces como $ID_+(\star)$ y $ID_+(\boxplus)$ al conjunto de medidas con soporte en $\mathbb{R}^+$ infinitamente divisibles en el sentido clásico y libre, respectivamente.

Es conocido que $\mu \in ID_+(\star)$ si y sólo si la terna característica (η, a, ν) es tal que las siguientes tres condiciones se cumplen

i) $a = 0$

ii) ν esta concentrada en $(0,\infty)$ y

$$\int_0^\infty \min(1,t)\nu(dt) < \infty$$

iii) $\eta_0 = \eta - \int_0^1 t\nu(dt) \geq 0$ es la deriva.

En este caso la función cumulante clásica es

$$\log \widehat{\mu} = i\eta_0 u + \int_0^\infty (e^{iut} - 1)\nu(dt) \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Consideremos ahora $\lambda = \Lambda(\mu) \in ID(\boxplus)$. De (3.10) tenemos

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \eta_0 z + z\int_0^\infty \frac{t}{1-tz}\nu(dt) \qquad z \in \mathbb{C}^-. \tag{3.11}$$

Utilizamos la identidad (3.8)

$$1 + \mathcal{C}_\lambda\left(G_\lambda(z)\right) = zG_\lambda(z) \tag{3.12}$$

de donde obtenemos

$$\operatorname{Im}\mathcal{C}_\lambda\left(G_\lambda(z)\right) = \operatorname{Im}(zG_\lambda(z)).$$

Sean

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_\nu(z) &= \int_0^\infty \frac{t^2}{(1 - t\operatorname{Re} G_\lambda(z))^2 + t^2(\operatorname{Im}(G_\lambda(z))^2}\nu(dt) \geq 0 \\
H_\nu(z) &= \int_0^\infty \frac{t}{(1 - t\operatorname{Re} G_\lambda(z))^2 + t^2(\operatorname{Im} G_\lambda(z))^2}\nu(dt) \geq 0
\end{aligned}$$

las cuales son finitas como veremos en el siguiente lema.

Lema 3.4.1

$$\operatorname{Im} \mathcal{C}_\lambda \left(G_\lambda(z)\right) = H_\nu(z) \operatorname{Im} G_\lambda(z) + \eta_0 \operatorname{Im} G_\lambda(z) = x \operatorname{Im} G_\lambda(z) + y \operatorname{Re} G_\lambda(z).$$

Demostración Para la igualdad entre el primer y último término de (3.12) tenemos que, escribiendo $z = x + iy$

$$\operatorname{Im} \mathcal{C}_\lambda \left(G_\lambda(z)\right) = \operatorname{Im}(zG_\lambda(z)) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} G_\lambda(z) + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} G_\lambda(z) = x \operatorname{Im} G_\lambda(z) + y \operatorname{Re} G_\lambda(z).$$

Por otra parte, de (3.11) tenemos

$$\operatorname{Im} \mathcal{C}_\lambda \left(G_\lambda(z)\right) = \eta_0 \operatorname{Im} G_\lambda(z) + \operatorname{Im} \left[G_\lambda(z) \int_0^\infty \frac{t}{1 - tG_\lambda(z)} \nu(dt) \right] \qquad z \in \mathbb{C}^-.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{t}{1 - tG_\lambda(z)} v(dt) &= \int_0^\infty \frac{t(1 - t \operatorname{Re} G_\lambda(z))}{(1 - t \operatorname{Re} G_\lambda(z))^2 + t^2 (\operatorname{Im}(G_\lambda(z))^2} v(dt) \\ &\quad + i \int_0^\infty \frac{t^2 \operatorname{Im} G_\lambda(z)}{(1 - t \operatorname{Re} G_\lambda(z))^2 + t^2 (\operatorname{Im}(G_\lambda(z))^2} \nu(dt) \end{aligned}$$

esto prueba que $\widetilde{H}_v(z)$ y $H_v(z)$ existen y además

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[G_\lambda(z) \int_0^\infty \frac{t}{1 - tG_\lambda(z)} v(dt) \right] &= \operatorname{Re} G_\lambda(z) \operatorname{Im} \int_0^\infty \frac{t}{1 - tG_\lambda(z)} \nu(dt) \\ &\quad + \operatorname{Im} G_\lambda(z) \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{t}{1 - tG_\lambda(z)} v(dt) \\ &= \operatorname{Re} G_\lambda(z) \operatorname{Im} G_\lambda(z) \widetilde{H}_\nu(z) \\ &\quad + \operatorname{Im} G_\lambda(z) (H_\nu(z) - \widetilde{H}_\nu(z) \operatorname{Re} G_\lambda(z)) \\ &= \operatorname{Im} G_\lambda(z) H_\nu(z) \end{aligned}$$

de donde se sigue el lema. ■

Del lema anterior se sigue el siguiente resultado. Recordemos que λ tiene a lo más un átomo x_0, es decir $\lambda(\{x_0\}) > 0$.

Lema 3.4.2 *Sea* $\lambda = \Lambda(\mu)$, $\mu \in ID_\star(\mathbb{R}_+)$ *y sean a,b tales que* $\lambda(\{a\}) = \lambda(\{b\}) = 0$. *Entonces*

$$\lambda((a,b]) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \to 0^+} \int_a^b \frac{1}{x} \{H_\nu(x+iy) \operatorname{Im} G_\lambda(x+iy) + \eta_0 \operatorname{Im} G_\lambda(x+iy)\}\, dx. \tag{3.13}$$

Demostración De Lema 3.4.1 obtenemos

$$\operatorname{Im} G_\lambda(z) = \frac{1}{x}(H_\nu(z) \operatorname{Im} G_\lambda(z) + \eta_0 \operatorname{Im} G_\lambda(z) - y \operatorname{Re} G_\lambda(z)).$$

Entonces usando la fórmula de inversión (2.8) y escribiendo $z = x + iy$

$$\lambda((a,b]) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \to 0^+} \int_a^b \frac{1}{x} ((H_\nu(x+iy) \operatorname{Im} G_\lambda(x+iy) + \eta_0 \operatorname{Im} G_\lambda(x+iy) - y \operatorname{Re} G_\lambda(x+iy))\, dx.$$

observemos que $\mathcal{H}(x) = \lim_{y \to 0^+} \operatorname{Re} G_\lambda(x+iy)$ donde $\mathcal{H}$ es la función de Hilbert. De donde $\lim_{y \to 0^+} y \operatorname{Re} G_\lambda(x+iy) = 0$ y se sigue el lema. ■

Del lema anterior podemos obtener los siguientes corolarios, que nos llevarán al resultado más importante de la sección.

Corolario 3.4.1 *Si* $a < b < 0$ *y* $\lambda(\{b\}) = 0$ *entonces* $\lambda(a,b] = 0$.

Demostración Para $y > 0$ y $a < x < b < 0$, $H_\nu(x+iy) \geq 0$ y $\operatorname{Im} G_\lambda(x+iy) \leq 0$ de donde

$$\frac{1}{x}(\operatorname{Im} G_\lambda(x+iy)) H_\nu(x+iy) \operatorname{Im} G_\lambda(z)) \geq 0$$

y

$$\frac{1}{x}(\operatorname{Im} G_\lambda(x+iy)) \operatorname{Im} G_\lambda(z)) \geq 0$$

de donde por (3.13) en el lema anterior tenemos $\lambda((a,b]) \leq 0$. ■

Para el posible átomo tenemos.

Corolario 3.4.2 *Sea* $\mu \in ID_+(\star)$ *y* $\lambda = \Lambda(\mu)$ *con un átomo en* x_0. *Entonces* $x_0 \geq 0$.

Demostración Supongamos que $x_0 < 0$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon < 0$ además como x_0 es el único átomo, $\lambda(\{x_0 + \varepsilon\}) = 0$. Por el Corolario 3.4.1 anterior

$$\lambda(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = 0$$

de donde $\lambda(\{x_0\}] = 0$ y por lo tanto se llega a una contradicción. ■

Finalmente de los Corolarios 3.4.1 y 3.4.2 se tiene el siguiente resultado, que nos dice que si $\mu \in ID(\star)$ tiene soporte en $\mathbb{R}^+$, entonces $\Lambda(\mu) \in ID(\boxplus)$ también tiene soporte en $\mathbb{R}^+$.

Teorema 3.4.3 $\mu \in ID_+(\star) \Longrightarrow \Lambda(\mu) \in ID_+(\boxplus)$.

Observación 3.4.4 *Es importante mencionar que el recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir* $\Lambda^{-1}(ID_+(\boxplus)) \not\subset ID_+(\star)$. *Dos contraejemplos de naturaleza diferente se darán en las Subsecciones 3.7.2 y 3.7.3 al final de este capítulo.*

Otro resultado importante sobre el soporte de λ es el siguiente.

Corolario 3.4.5 *Si* $0 \leq a < b$ *y* $\lambda(\{b\}) = \lambda(\{a\}) = 0$ *entonces*

$$\lambda(a, b] \geq \eta_0 \frac{1}{b} \lambda(a, b],$$

donde η_0 *es la deriva.*

Demostración Se sigue de (3.13). ■

Corolario 3.4.6 *Si* $a < b$ *y* $\lambda(a, b] > 0$, *entonces* $b \geq \eta_0$.

Finalmente de estos dos últimos corolarios se puede mejorar el Teorema 3.4.3

Teorema 3.4.7 *Sea* $\lambda = \Lambda(\mu)$ *una medida* $\boxplus-$*infinitamente divisible. Si* μ *es una medida con soporte en* $\mathbb{R}^+$ *con terna característica* $(\eta, 0, \nu)$ *entonces el*

$$sop(\lambda) \subseteq (\eta_0, \infty).$$

donde η_0 *es la deriva.*

3.5 Distribuciones Simétricas

Sea μ una medida de probabilidad en $ID(\star)$. Claramente $\mu^- = D_{-1}\mu$ también es infinitamente divisible y por lo tanto $\widetilde{\mu} = \mu \boxplus (\mu^-)$ también lo es. En particular, cuando $\mu \in D_+(\star)$, $\widetilde{\mu}$ es simétrica. Una pregunta natural es si toda medida $\widetilde{\mu}$ simétrica y $\boxplus$-infinitamente divisible se puede escribir $\widetilde{\mu} = \upsilon \boxplus (\upsilon^-)$ para alguna medida υ en $ID(\boxplus)$. Abordar este problema parece difícil, sin embargo usando la biyección de Bercovici-Pata se puede obtener un resultado en esta dirección.

Los resultados de esta sección no se encontraron en la literatura.

Proposición 3.5.1 *Sea $\widetilde{\lambda}$ una medida en $ID(\boxplus)$ con terna característica libre $(0, 0, \nu)$ tal que ν satisface $\int_{(0,1)} x\nu(dx) < \infty$ y $\nu = \nu^-$. Entonces $\widetilde{\lambda}$ puede escribirse como*

$$\widetilde{\lambda} = \lambda \boxplus (\lambda^-)$$

donde λ es $\boxplus$-infinitamente divisible con soporte en $\mathbb{R}^+$.

Demostración El Corolario 4.16 de Steutel [47] prueba que una variable aleatoria X se puede escribir como $Y - Y'$ donde Y y Y' son infinitamente divisibles en el sentido clásico y donde $\mu_Y = \mu_{Y'}$ tiene soporte en $\mathbb{R}^+$ sí y sólo si X es infinitamente divisible y tiene terna característica $(0, 0, \nu)$ tal que ν satisface $\int_{(0,1)} x\nu(dx) < \infty$ y $\nu = \nu^-$.

Sea $\widetilde{\lambda} = \Lambda(\widetilde{\mu})$ donde $\widetilde{\lambda}$ tiene terna característica libre $(0, 0, \nu)$ tal que ν satisface $\int_{(0,1)} x\nu(dx) < \infty$ y $\nu = \nu^-$. De las consideraciones del párrafo anterior $\widetilde{\mu} = \mu \star (\mu^-)$ donde μ tiene soporte en $\mathbb{R}^+$. Por el Teorema 3.4.3 se tiene que $\Lambda(\mu)$ tiene soporte en $\mathbb{R}^+$ y $\widetilde{\lambda}$ puede escribirse como

$$\widetilde{\lambda} = \lambda \boxplus (\lambda^-), \text{ donde } \lambda = \Lambda(\mu)$$

por la propiedad (i) en la Proposición 3.3.2. Así $\widetilde{\lambda} = \lambda \boxplus (\lambda^-)$ donde λ es $\boxplus$-infinitamente divisible y tiene soporte en $\mathbb{R}^+$. ■

Como en el caso de las medidas con soporte positivo, es bien conocida la caracterización de medidas de probabilidad $\mu \in ID(\star)$ simétricas. Una medida $\mu \in ID(\star)$ es simétrica si y sólo si la terna característica (η, a, ν) es tal que se cumplen

i) $\eta = 0$

ii) ν es simétrica

En este caso la función cumulante clásica es

$$\log \widehat{\mu} = -\frac{1}{2}u^2 a + 2\int_0^\infty (\cos ux - 1)\nu(dt) \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Cuando ν es una medida finita simétrica, suponiendo que $\eta = a = 0$, obtenemos

$$\mathcal{C}_{\Lambda(\mu)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{1-zx} - 1)\nu\,(dx)\,.$$

En este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Lambda(\mu)}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-zx}\nu\,(dx) - \nu(\mathbb{R}) & (3.15)\\ &= z^{-1}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z^{-1}-x}\nu\,(dx) - \nu(\mathbb{R}) \\ &= z^{-1}G_\nu\left(z^{-1}\right) - \nu(\mathbb{R}). & (3.16)\end{aligned}$$

Usando (2.16) obtenemos

$$F^{-1}_{\Lambda(\mu)}(z) = z^2 G_\nu(z) + z(\nu(\mathbb{R}) - 1). \tag{3.17}$$

Esta última ecuación nos permite dar un resultado parecido al Teorema 3.4.3 para distribuciones simétricas. Este sencillo resultado no se encontró reportado en la literatura.

Teorema 3.5.1 *Si $\mu \in ID(\star)$ es una distribución simétrica entonces $\lambda = \Lambda(\mu) \in ID(\boxplus)$ es simétrica.*

Demostración Supongamos que $\mu \in ID(\star)$ es una distribución simétrica con soporte compacto y parte Gaussiana cero, esto es con terna $(0, 0, \nu)$ y ν simétrica. Entonces de (3.17) y por la Proposición 2.2.2 se tiene que $F^{-1}_{\Lambda(\mu)}$ es impar, de donde $F_{\Lambda(\mu)}$ y $G_{\Lambda(\mu)}$ también deben de ser impares y en consecuencia, otra vez por la Proposición (2.2.2), $\Lambda(\mu)$ es una medida simétrica.

Finalmente sea ν una medida con soporte no acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos ν_n como la medida en $[-n, n]$ de tal forma que $\nu(B) = \nu_n(B)$ para todo $B \subset [-n, n]$, entonces ν_n converge en distribución, cuando $n \to \infty$ a la medida medida ν por lo tanto por el Teorema 3.3.4 μ_n con terna $(0, 0, \nu_n)$ converge a μ con terna $(0, 0, \nu_n)$. En particular cuando ν_n es simétrica se tiene el resultado para cualquier medida con representación de Lévy-Khintchine $(0, 0, \nu)$.

Finalmente para el caso más general, donde la representación de Lévy-Khintchine tiene parte Gaussiana basta observar que $\mathcal{C}_\mu$ es la suma de dos funciones pares y por lo tanto $\mathcal{C}_\mu$ debe de ser par. La imparidad de G_μ y por lo tanto la simetría de μ se sigue de esta observación. ■

Observación 3.5.2 *El inverso del resultado anterior también es cierto, sin embargo posponemos la prueba para el Capítulo 4.*

3.6 Convolución Multiplicativa Libre de Medidas

En esta sección mencionamos de forma muy breve lo que se conoce como **convolución multiplicativa libre** para medidas con soporte compacto asociadas a variables aleatorias no conmutativas en un C^*-espacio de probabilidad.

El estudio de productos de variables aleatorias no-conmutativas en relación libre fue retomado recientemente para el caso de media cero por Speicher y Raj Rao [46]. Es importante recalcar la importancia de este estudio, no sólo desde el punto de vista teórico sino también del aplicado.

En el contexto de matrices aleatorias, casos interesantes se encuentran dentro de este caso. Por ejemplo, ya que la ley de semicírculo es la distribución espectral asintótica de matrices aleatorias Gaussianas, y un resultado similar se tiene para la distribución de Marchenko-Pastur para matrices de Wishart, entonces es de interés conocer la convolución multiplicativa libre de una ley de Semicírculo con una Poisson Libre. Otra razón para abordar este tema es el poder dar una interpretación a la distribución beta simétrica que presentamos en la Subsección 3.7.7.

De forma similar a la transformada cumulante libre el siguiente teorema de Voiculescu muestra la relación entre la transformada S y el producto de medidas con soporte compacto en relación libre definida por Voiculescu.

Las demostraciones de los resultados de esta subsección se encuentran en [46].

Teorema 3.6.1 *Sean a_1 y a_2 variables aleatorias no conmutativas en relación libre tales que $\tau(a_1) \neq 0$ y $\tau(a_2) \neq 0$. Si μ_1 y μ_2 son las $*$-distribuciones de a_1 y a_2, denotamos por S_{μ_1} a la* *transformada S de μ_1 y por S_{μ_2} a la transformada S de μ_2. Entonces*

$$S_{\mu_1\mu_2}(z) = S_{\mu_1}(z)S_{\mu_1}(z)$$

es la S-transformada de $\mu_1 \boxtimes \mu_2$.

En el estudio de convolución multiplicativa libre, normalmente nos restringimos al caso cuando ambos factores tienen soporte en $\mathbb{R}^+$. Este resultado es suficiente en este caso, sin embargo, existen muchos casos interesantes donde uno de los factores no tiene soporte en $\mathbb{R}^+$. En estos casos trabajar la convolución $\boxtimes$ con la transformada S tiene una falla como se menciono en la Sección 2.5.

Como hemos visto en la Sección 2.5, para poder invertir las serie de potencias $M(z)$ necesitamos que el primer momento sea diferente de cero. Sin embargo, trabajar con las transformadas S definidas en (2.5.2) resuelve el problema al menos para cuando sólo una de las medidas tiene media cero. Notemos que distribuciones importantes entran dentro de este caso, tales como la distribución de semicírculo o la ley arcoseno.

Teorema 3.6.2 *Sean a_1 y a_2 variables aleatorias libres tales que $\tau(a_1) = 0, \tau(a_1^2) = 0$ y $\tau(a_2) \neq 0$. Sean μ_1 y μ_2 las $*$-distribuciones de a_1 y a_2, respectivamente. Denotemos por S_{μ_1} y $\widetilde{S}_{\mu_1}$ a las dos transformadas S de μ_1 y por S_{μ_2} a la transformada S de μ_2. Entonces*

$$S_{\mu_1\mu_2}(z) = S_{\mu_1}(z)S_{\mu_2}(z) \text{ y } \widetilde{S}_{\mu_1\mu_2}(z) = \widetilde{S}_{\mu_1}(z)S_{\mu_2}(z)$$

son las dos S-transformadas de $\mu_1 \boxtimes \mu_2$.

Notemos que para que la definición sea correcta necesitamos que la $*$-distribución de a_1a_2 también entre en la definición 2.5.2. Esto se obtiene fácilmente de la relaciones en el Capítulo 1 para los primeros momentos de a_1a_2 cuando a_1 y a_2 están en relación libre. En efecto,

$$\tau(a_1a_2) = \tau(a_1)\tau(a_2) = 0$$

y además

$$\tau((a_1a_2)^2) = \tau(a_1^2)\tau(a_2)^2 + \tau(a_1)^2\tau(a_2^2) - \tau(a_1)^2\tau(a_2)^2 = \tau((a_1a_2)^2) \neq 0.$$

Entonces para este caso podemos obtener las convolución $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ a través de las transformadas S.

En la Subsección 4.6.4 se dan ejemplos de esta convolución.

3.7 Ejemplos

En esta sección usamos los resultados analíticos de este capítulo para verificar y construir ejemplos de medidas de probabilidad infinitamente divisibles en el sentido libre.

Mostramos que la ley arcoseno no es infinitamente divisible. Por otra parte, mediante la biyección de Bercovici Pata estudiamos la divisibilidad infinita libre de las distribuciones de semicírculo, Poisson libre, Cauchy, 1/2-estable libre y más generalmente las distribuciones estables libres. Así mismo, se encuentra que la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$ es infinitamente divisible libre con medida de Lévy arcoseno. Finalmente consideramos las familias de distribuciones beta $B(\alpha, \beta)$, señalando algunos valores de los parámetros α y β para los cuales podemos decidir si estas distribuciones son o no infinitamente divisibles en el sentido libre; en el Capítulo 4 se consideran otros valores de estos parámetros usando herramientas del enfoque combinatorio.

3.7.1 Ley Arcoseno

En esta subsección mostramos que la distribución arcoseno no es infinitamente divisible en el sentido libre. Así mismo, este ejemplo muestra que la convolución libre de medidas atómicas puede ser absolutamente continua, como se menciona en la Sección 3.1.

Proposición 3.7.1 *Sea μ la medida puramente atómica dada por*

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1).$$

Entonces $\mu \boxplus \mu$ es la distribución del arcoseno en $(-2, 2)$ con densidad

$$a_{0,2}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} 1_{(-2,2)}(x). \tag{3.18}$$

Demostración La transformada de Cauchy de μ está dada por

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - t} \mu(dt) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

De (2.15) y escribiendo $K_\mu(z) = \mathcal{R}_\mu(z) + \frac{1}{z}$ tenemos que $G_\mu(K_\mu(z)) = z$ y por lo tanto

$$(K_\mu(z))^2 - \frac{(K_\mu(z))}{z} = 1.$$

Resolviendo para $K_\mu(z)$ tenemos las soluciones

$$K_\mu(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4z^2}}{2z}.$$

Obtenemos entonces la $\mathcal{R}$-transformada

$$\mathcal{R}_\mu(z) = \frac{\sqrt{1 + 4z^2} - 1}{2z}.$$

Calculando $\mathcal{R}_{\mu \boxplus \mu}$ obtenemos

$$\frac{1}{z} + \mathcal{R}_{\mu \boxplus \mu}(z) = \frac{1}{z} + 2\mathcal{R}_\mu(z) = \frac{\sqrt{1 + 4z^2}}{z}$$

de donde

$$\frac{\sqrt{1 + 4(G_{\mu \boxplus \mu}(z))^2}}{G_{\mu \boxplus \mu}(z)} = z.$$

Por lo tanto

$$G_{\mu \boxplus \mu}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4}}, \quad z \in \mathbb{C}^+, \tag{3.19}$$

que, como se vio en Subsección 2.6.2, es la transformada de Cauchy de la ley arcoseno en $(-2, 2)$.

■

Del resultado anterior tenemos que $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ no es $\boxplus$-infinitamente divisible. Esto se sigue del hecho de que μ con dos átomos no puede ser $\boxplus$-infinitamente divisible (Proposición 3.2.2) y de la Proposición 3.2.1, ya que si una medida $\mu \boxplus \mu$ es $\boxplus$-infinitamente divisible también lo debería ser su componente μ.

Otra forma de ver que la ley arcoseno no es $\boxplus$-infinitamente divisible es verificar que la transformada de Voiculescu $\phi_\mu(z)$ no es analítica. En efecto, de (3.19) se tiene que $F_{\mu\boxplus\mu}(z) = \sqrt{z^2 - 4}$ y $F^{-1}_{\mu\boxplus\mu}(z) = \sqrt{z^2 + 4}$ de donde obtenemos la transformada de Voiculescu

$$\phi_{\mu\boxplus\mu}(z) = \sqrt{z^2 + 4} - z,$$

la cual no es una función analítica en $z = 2i \in \mathbb{C}^+$. Por lo tanto, del Teorema 3.2.2, tenemos que la ley de arcoseno no es infinitamente divisible en el sentido libre.

3.7.2 Ley de Semicírculo

En la Sección 2.6.1 mostramos que la transformada cumulante libre de la distribución del semicírculo $W_{m,\sigma}$ con media m y varianza σ^2 está dada por

$$\mathcal{C}_{W_{m,\sigma}}(z) = mz + \sigma^2 z^2. \tag{3.20}$$

De esta expresión obtenemos fácilmente varios resultados importantes.

Proposición 3.7.2 *Sean $W_{m_1,\sigma_1}, ..., W_{m_n,\sigma_n}$ distribuciones de semicírculo con medias $m_1,..., m_n$ y varianzas $\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2$ respectivamente. Entonces $W_{m,\sigma} = W_{m_1,\sigma_1} \boxplus \cdots \boxplus W_{m_n,\sigma_n}$ tiene distribución de semicírculo con media $m_1 + \cdots + m_n$ y varianza $\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$.*

Demostración Usando (3.20) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{W_{m,\sigma}}(z) &= \mathcal{C}_{\mu_1}(z) + \cdots + \mathcal{C}_{\mu_n}(z) = \\ &= (\sigma_1^2 z^2 + m_1 z) + \cdots + (\sigma_n^2 z^2 + m_n z) \\ &= (\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2) z^2 + (m_1 + \cdots + m_n) z \end{aligned}$$

y por lo tanto $W_{m,\sigma}$ es como se quiere. ■

De la proposición anterior es claro que la distribución del semicírculo es infinitamente divisible en el sentido libre. Esto también se puede ver directamente de su transformada cumulante ya que claramente $\mathcal{C}_{W_{m,\sigma}}(z)$ tiene representación Lévy-Khintchine (3.6) con terna característica libre $(m, \sigma^2, 0)$.

Usando la biyección de Bercovici-Pata Λ, se tiene trivialmente que $W_{m,\sigma} = \Lambda(\Phi_{m,\sigma})$, donde $\Phi_{m,\sigma}$ es la medida Gaussiana con media m, varianza σ^2, terna característica clásica $(m, \sigma^2, 0)$ y densidad

$$\varphi_{m,\sigma^2}(dx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta es una razón más para referirse a la distribución del semicírculo como la distribución Gaussiana libre.

Este ejemplo muestra claramente que la biyección de Bercovici-Pata Λ puede enviar medidas con soporte no compacto a medidas con soporte compacto. Más aún, tomando la distribución normal $\Phi_{2,1}$ con media dos y varianza uno, se tiene que $W_{2,1} = \Lambda(\Phi_{2,1})$ tiene soporte no negativo, ya que es la ley del semicírculo con densidad

$$w_{2,1}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-(x-2)^2} \cdot 1_{[1,3]}(x)dx.$$

Esto prueba que el inverso del Teorema 3.4.3 no es cierto.

3.7.3 Distribución Poisson Libre

Sea μ la distribución de Poisson clásica Poiss$^{\star}(\lambda)$ con media $\lambda > 0$

$$\mu(\{n\}) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, 2...$$

En esta caso la terna característica es $(0, 0, \nu)$ con medida de Lévy $\nu = \lambda\delta_1$. Consideremos la distribución de Poisson clásica μ_{λ,γ_0} con deriva $\gamma_0 > 0$, la cual denotamos por Poiss$^{\star}(\lambda, \gamma_0)$. Llamamos a $\Lambda(\mu_{\lambda,\gamma_0})$ la distribución **Poisson Libre** y la denotamos por Poiss$^{\boxplus}(\lambda, \gamma_0)$.

Como se muestra en la siguiente proposición, la distribución Poisson libre tiene soporte compacto, tiene al cero como átomo cuando $0 \leq \lambda < 1$ y es absolutamente continua cuando $\lambda \geq 1$.

Proposición 3.7.3 *a) La distribución* $Poiss^{\boxplus}(\lambda,\gamma_0)$ *es una medida con soporte compacto dada por*

$$\Lambda(\mu_{\lambda,\gamma_0})(dx)=\begin{cases}(1-\lambda)\delta_0+\frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}1_{[a,b]}(x)dx, & si\ 0\leq\lambda\leq 1\\ \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}1_{[a,b]}(x)dx & si\ \lambda>1\end{cases}\tag{3.21}$$

donde $a=(1-\sqrt{\lambda})^2+\gamma_0$ *y* $b=(1+\sqrt{\lambda})^2+\gamma_0$.

b) La transformada de Cauchy está dada por

$$G(z)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(z-a)(b-z)}}{2z}+\frac{1-\lambda}{2z}.$$

c) La transformada cumulante libre es

$$\mathcal{C}(z)=\frac{\lambda z}{1-z}.$$

d) La transformada S *de Voiculescu de* $\mu_{1,0}$ *es*

$$S(z)=\frac{1}{z+1}.$$

Demostración Sin perdida de generalidad tomamos $\gamma_0=0$. La función cumulante libre de $\Lambda(\mu_{\lambda,0})$ es

$$\mathcal{C}(z)=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zt}-1-tz1_{[-1,1]}(t)\right)\nu(dt)=\frac{\lambda}{1-z}-\lambda=\frac{\lambda z}{1-z}.$$

Ahora, usando (3.8) tenemos

$$1+\frac{\lambda G(z)}{1-G(z)}=zG(z)$$

y por lo tanto

$$zG(z)^2-(z-\lambda+1)G(z)+1=0.$$

Resolviendo para $G(z)$ (tomando la raíz para que se cumpla (v) en la Proposición 2.2.1)

$$G(z)=\frac{1}{2z}\left(z-\lambda-\sqrt{(z-(1-\sqrt{\lambda})^2)((1+\sqrt{\lambda})^2-z)}+1\right)\quad \text{si}\quad z\neq 0$$

escribiendo $a = (1-\sqrt{\lambda})^2$ y $b = (1+\sqrt{\lambda})^2$ obtenemos

$$G(z) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(z-a)((b-z)}}{2z} + \frac{1-\lambda}{2z}.$$

Ahora, para $\lambda \leq 1$, $G_{(1-\lambda)\delta_0} = \frac{1-\lambda}{z}$, la densidad es

$$f_\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to+0} \operatorname{Im}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(z-a)((b-z)}}{2z}) = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{x\,(4\lambda-8-x)}}{2x} \text{ para } x\in[a,b]. \tag{3.22}$$

Así, de (2.8) tenemos que

$$\Lambda(\mu_{\lambda,\gamma_0})(dx) = \begin{cases} (1-\lambda)\delta_0 + \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}1_{[a,b]}(x)dx, & \text{si } 0\leq\lambda\leq 1 \\ \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(x-a)(b-x)}\cdot 1_{[a,b]}(x)dx & \text{si } \lambda > 1 \end{cases}$$

de donde se sigue el resultado para cualquier deriva.

Finalmente de (2.18) tenemos que la serie de potencias M está dada por

$$M(z) = \frac{1}{z}G_\mu(\frac{1}{z}) - 1 = 1 - \sqrt{1-4z} - 2z$$

y

$$\chi(z) = \frac{z}{(1+z)^2}.$$

Así, obtenemos que la transformada S de la Poisson libre es

$$S_\gamma(z) = \frac{1}{z+1}.$$

■

En particular, para $\lambda = 1, \gamma_0 = 0$ se obtiene la distribución de Marchenko-Pastur [35]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{4-(2-x)^2}\cdot 1_{[0,4]}(x)dx,$$

pues $a = 0$, $b = 4$ y $x(4-x) = 4-(2-x)^2$. Cabe destacar que esta distribución es obtenida en [35] como el límite de la medida espectral de un ensamble de matrices aleatorias de Wishart.

Con respecto al inverso del Teorema 3.4.3, una modificación de la distribución de Poisson libre nos permite ver que una medida infinitamente divisible libre $\Lambda(\mu)$ con soporte en $\mathbb{R}^+$ puede venir de una medida infinitamente divisible clásica μ con soporte no concentrado en $\mathbb{R}_+$, aún si su parte Gaussiana es cero y la medida de Lévy no tiene soporte en $\mathbb{R}^+$. En efecto, sea μ con terna característica $(3, 0, \nu)$ donde $\nu = \delta_{-1}$. Entonces, si μ_1 es la distribución Poiss$^\star(1)$, $\mu = D_{-1}\mu_1 \star \delta_4$ está dada por

$$\mu(\{n\}) = \exp(1)\frac{1}{(4-n)!} \qquad n = 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2....$$

mientras que $\Lambda(\mu)$ tiene distribución $D_{-1}\Lambda(\mu_1) \boxplus \delta_4$ con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi(4-x)}\sqrt{(4-x)(x-2)} \cdot 1_{[2,4]}(x). \tag{3.23}$$

En efecto, si $\Lambda(\mu) = D_{-1}\Lambda(\mu_1) \boxplus \delta_4$ entonces $\Lambda(\mu)(dr) = \Lambda(\mu_1)(4 - dr)$ y sustituyendo en (3.21), la densidad de $\Lambda(\mu)$ es como en (3.23). Este ejemplo nos fue comunicado por el Dr. Alfonso Rocha Arteaga.

3.7.4 Distribución de Cauchy

Este ejemplo muestra que la distribución de Cauchy (la cual tiene soporte no acotado) es una distribución infinitamente divisible tanto en el sentido clásico como en el libre. Además, es un punto fijo de la biyección de Bercovici-Pata.

Sean $\lambda > 0$, como vimos en el Ejemplo 2.6.4, la distribución de Cauchy tiene densidad y función característica dadas por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}, \ \widehat{\mu}_\lambda(u) = e^{-\lambda|u|}.$$

Entonces su transformada cumulante clásica está dada por $\log \widehat{\mu}_\lambda(u) = -\lambda |u|$ de donde la distribución de Cauchy es $\star$-infinitamente divisible. Su terna característica es $(\lambda, 0, \nu)$ donde $\nu(dr) = dx/|x|$ es una medida de Lévy simétrica.

Por otro lado, para encontrar $\Lambda(\mu)$ usamos la transformada cumulante libre

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\Lambda(\mu)}(z) &= \lambda z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t) \right) \nu(dt) \\
&= \lambda z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - tz1_{[-1,1]}(t) \right) \frac{dt}{|t|}^{-} \\
&= \lambda z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{zt}{1-zt} \right) \frac{dt}{|t|}, \quad z \in \mathbb{C}^{-}. \\
&= -i\lambda z.
\end{aligned}$$

de donde por (2.35) en la Subsección 2.6.4 se tiene que $\Lambda(\mu) = \mu$.

3.7.5 Distribución Beta Tipo 2

Este ejemplo ilustra que existe una distribución distinta a la de Cauchy que es infinitamente divisible tanto en sentido clásico como en sentido libre.

Sea μ la distribución clásica 1/2-estable con parámetro de escala $\theta = 1$ y deriva $\gamma_0 > 0$. Su soporte está en (γ_0, ∞). El caso $\gamma_0 = 0$ se conoce como distribución de Lévy y tiene densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-1/2x}}{x^{3/2}}, \quad x > 0.$$

Por ser una distribución estable, es una ley infinitamente divisible en el sentido clásico, con terna característica $(0, 0, \nu)$, con $\nu(dx) = dx/r^{3/2}$.

Usando la biyección de Bercovici-Pata Λ, se tiene que la función cumulante de $\lambda = \Lambda(\mu)$ es

$$\mathcal{C}_{\lambda}(z) = -iz^{1/2}$$

De esta expresión obtenemos que $F_{\lambda}^{-1}(z) = -iz^{1/2} - z$ de donde se encuentra que la transformada de Cauchy de λ está dada por

$$G_{\lambda}(z) = -\frac{1}{2z^2}\left(2z + \sqrt{4z+1} + 1\right).$$

Para θ general se pueden hacer cálculos similares. Consideremos $\theta > 0$ y $\gamma_0 = 0$.

Usando la fórmula de inversión (2.9), se tiene que λ tiene densidad

$$g(x) = \frac{\theta}{\pi(x)^2}\sqrt{(x) - \frac{\theta^2}{4}}, \qquad x > \frac{\theta^2}{4} + \gamma_0.$$

Esta distribución es una distribución beta tipo 2 $B_2(1/2, 3/2)$ con rango $(\frac{\theta^2}{4}, \infty)$. Recordamos que una distribución es beta tipo 2 $B_2(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0, \beta > 0$, si es absolutamente continua con densidad

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (\frac{1}{1+x})^{\alpha+\beta}, \quad 0 < x < \infty.$$

Esta distribución tiene soporte no acotado en $\mathbb{R}_+$ y es infinitamente divisible en el sentido clásico [47, pag 415]. Por lo tanto la distribución 1/2-estable libre $\lambda = \Lambda(\mu)$ es también infinitamente divisible en el sentido clásico.

3.7.6 Distribuciones Estables

Una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ se dice **estable con respecto a la convolución libre** (o simplemente **$\boxplus$-estable**), si la clase

$$\{\psi(\mu) : \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es una transformación afín creciente}\} \tag{3.24}$$

es cerrada bajo la operación $\boxplus$. Denotamos por $S(\boxplus)$ a la clase de medidas de probabilidad $\boxplus$-estable en $\mathbb{R}$.

Como consecuencia del comportamiento de $\mathcal{C}_\mu$ con respecto a la dilatación tenemos que una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ pertenece a $S(\boxplus)$ si y sólo si la siguiente condición se satisface (para z^{-1} en una región de la forma $\Gamma_{\alpha,\beta}$): para todo $a > 0$ existen $\acute{a} > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{C}_\mu(z) + \mathcal{C}_\mu(az) = \mathcal{C}_\mu(\acute{a}z) + bz. \tag{3.25}$$

de donde se sigue que la distribución de Semicírculo, la distribución de Cauchy y la beta tipo 2 $B_2(1/2, 3/2)$ son estables.

Proposición 3.7.4 *i) Toda distribución de Semicírculo $W_{m,\sigma}$ es $\boxplus$-estable.*

ii) Toda distribución de Cauchy $Ca(\lambda)$ es $\boxplus$-estable.

iii) La distribución beta tipo 2 $B(1/2,3/2)$ es $\boxplus$-estable.

Demostración Es fácil ver que $S(\boxplus)$ es cerrada bajo operaciones $D_a(a>0)$ y bajo translaciones de tamaño $b\in\mathbb{R}$. Entonces basta ver que las transformadas cumulantes libres $\mathcal{C}_\mu(z)=z^2$ y $\mathcal{C}_\mu(z)=i\,|z|$ cumplen con (3.25). Para la distribución de semicírculo

$$\mathcal{C}_\mu(z)+\mathcal{C}_\mu(az)=z^2+a^2z^2=\left(1+a^2\right)z^2=\mathcal{C}_\mu((\sqrt{1+a^2})z)$$

y para la distribución de Cauchy

$$\mathcal{C}_\mu(z)+\mathcal{C}_\mu(az)=i\,|z|+i\,|a|\,|z|=(1+a)\,i\,|z|=\mathcal{C}_\mu((1+a)z).$$

Finalmente, $B(1/2,3/2)$ pertenece a $S(\boxplus)$, ya que satisface (3.25), puesto que

$$\mathcal{C}_\mu(z)+\mathcal{C}_\mu(az)=-iz^{1/2}+-i(az)^{1/2}=-\left(1+a^{1/2}\right)iz^{1/2}=\mathcal{C}_\mu((1+a^{1/2})^2z).$$

■

En general las distribuciones estables son el rango de las distribuciones estables clásicas bajo la biyección de Bercovici-Pata. Específicamente, la terna de una distribución α-estable no Gaussiana, $0<\alpha<2$, es $(\gamma,0,\nu)$ con

$$\nu(dx)=\frac{c}{|x|^{1+\alpha}}dx.$$

Entonces, por la transformación de Bercovici-Pata y la fórmula de Lévy-Khintchine (3.6), la transformada cumulante libre de la distribución α-estable libre es

$$\mathcal{C}_\mu(z)=\gamma z+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zt}-1-tz1_{[-1,1]}\left(t\right)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt. \tag{3.26}$$

Veamos entonces que se cumple (3.25):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\mu(z)+\mathcal{C}_\mu(az) &= \gamma z+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zt}-1-tz1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt\\
&\quad+\gamma az+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-azt}-1-taz1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt\\
&= \gamma z+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zt}-1-tz1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt\\
&\quad+\gamma az+a^\alpha\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zy}-1-yz1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|y|^{1+\alpha}}dt\\
&= \gamma(1+a)z+(1+a^\alpha)\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-zt}-1-tz1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt\\
&= \gamma(1+a-(1+a^\alpha)^{1/\alpha})z+\gamma(((1+a^\alpha)^{1/\alpha})z\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1-z(1+a^\alpha)^{1/\alpha}t}-1-t(1+a^\alpha)^{1/\alpha}z1_{[-1,1]}(t)\right)\frac{c}{|t|^{1+\alpha}}dt\\
&= \mathcal{C}_\mu((1+a^\alpha)^{1/\alpha})+\gamma(1+a-(1+a^\alpha)^{1/\alpha})z.
\end{aligned}
$$

Las distribuciones estables libres fueron estudiadas a detalle en Bercovici y Pata [9, con apéndice de P. Biane], quienes caracterizaron los dominios de atracción y probaron que estas distribuciones son absolutamente continuas. Asimismo, encontraron las ecuaciones diferenciales que satisfacen sus densidades. Sólo existe una fórmula explícita para la densidad en los casos de ley del semicírculo, la distribución de Cauchy y la distribución beta tipo 2 $B_2(1/2, 3/2)$ de la sección anterior.

Es un problema abierto el sí las distribuciones $\alpha-$estables libres, para $0 < \alpha < 2$, son también infinitamente divisibles en el sentido clásico, como lo son la distribución de Cauchy y la beta tipo 2 $B_2(1/2, 3/2)$. No conocemos la respuesta a esta pregunta.

3.7.7 Distribución Beta Simétrica $BS(1/2, 3/2)$

En este ejemplo ilustramos como la expresión (3.17) para medidas de Lévy simétricas y finitas, puede usarse para demostrar que la distribución infinitamente divisible libre con medida de Lévy arcoseno es una distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$.

Recordamos que para $\alpha, \beta > 0$, una medida de probabilidad tiene distribución beta simétrica

$BS(\alpha,\beta)$, si es absolutamente continua con función de densidad

$$g(x) = \frac{1}{2B(\alpha,\beta)} |x|^{\alpha-1} (1-|x|)^{\beta-1}, \quad |x| < 1.$$

Este ejemplo muestra como se puede obtener la función de densidad de leyes infinitamente divisibles no triviales a partir de su medida de Lévy.

Sea

$$a_{o,s}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(s-x^2)^{-1/2}, |x| < \sqrt{s} \\ 0 \qquad\qquad\quad |x| > \sqrt{s}, \end{cases} \tag{3.27}$$

la densidad de la ley arcoseno $A_{o,s}$ en $(-\sqrt{s}, \sqrt{s})$. Tomaremos $A_{0,1}$ que tiene media cero y varianza uno. De la Sección 2.6.2 se tiene que $A_{o,s}$ tiene transformada de Cauchy

$$G_{A_{o,s}}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2s}}. \tag{3.28}$$

Sea $\lambda = \Lambda(\mu)$ la medida infinitamente divisible libre correspondiente a la distribución infinitamente divisible μ con medida de Lévy $\nu(dx) = a_{1,0}(x)dx$. De (3.16) obtenemos que la transformada cumulante libre de λ es

$$\mathcal{C}_\lambda^{\boxplus}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2z^2}} - 1. \tag{3.29}$$

Usando (2.16) y (3.17) obtenemos que la transformada de Cauchy G_λ de λ satisface la ecuación

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(1 - 4z^{-2}\right)^{1/2}\right)\right)^{1/2}.$$

Por lo tanto

$$G_\lambda\left(\frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}\right) = z^{-1}. \tag{3.30}$$

La siguiente identificación de la distribución $BS(1/2, 3/2)$ no se encontró reportada en la literatura.

Proposición 3.7.5 *a) La función G_λ dada por (3.30) es la transformada de Cauchy de la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$ en $[-2, 2]$ con densidad*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} |x|^{-1/2} (2-|x|)^{1/2}, \quad |x| < 2.$$

b) La distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$ es infinitamente divisible en el sentido libre.

Demostración Usaremos la fórmula de (2.9). Para $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G\,(x+iy) &= \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(1 - 4(x+iy)^{-2}\right)^{1/2}\right)\right)^{1/2} \\ &\to \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(1 - 4x^{-2}\right)^{1/2}\right)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Existe parte imaginaria cuando $|x| < 2$ y $x \neq 0$. Para x fijo en este conjunto, buscamos $b < 0$ tal que

$$\left(1 - \left(1 - 4x^{-2}\right)^{1/2}\right)^{1/2} = a + ib.$$

Es decir

$$1 - i\left(4x^{-2} - 1\right)^{1/2} = a^2 - b^2 + 2iab;$$

de donde obtenemos que $a^2 = b^2 + 1$. Y

$$\left(4x^{-2} - 1\right)^{1/2} = -2ab.$$

Por lo tanto

$$x^{-2}(4 - x^2) = 4a^2b^2 = 4b^4 + 4b^2,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$b^4 + b^2 - \frac{1}{4}x^{-2}(4 - x^2) = 0.$$

Resolviendo para b^2 (el cual tiene que ser positivo)

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + x^{-2}(4 - x^2)}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,|x|^{-1}\,(2 - |x|), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$b = -\sqrt{\frac{1}{2}\,|x|^{-1}\,(2 - |x|)}.$$

Así, la densidad g de G_λ es

$$g\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\left|x\right|^{-1/2}\left(2-\left|x\right|\right)^{1/2},\quad \left|x\right|<2$$

la cual es una distribución beta simétrica $BS(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ reescalada.

La parte b) del Teorema se sigue entonces de las consideraciones anteriores. ■

Surge la pregunta natural si otras distribuciones beta simétricas son infinitamente divisibles. Una respuesta parcial se da en el capítulo siguiente.

3.7.8 Distribución Beta (Tipo 1)

Recordamos que para $\alpha,\beta>0$, una medida de probabilidad tiene distribución beta $B(\alpha,\beta)$ (también llamada beta de tipo I), si es absolutamente continua y su función de densidad es

$$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0<x<1.$$

Sea X una variable infinitamente divisible libre, entonces la variable aleatoria $Y=2-X/2$ tiene también una distribución infinitamente divisible libre. En particular, para X con densidad de Poisson Libre(3.23) mediante un argumento de cambio de variable sencillo se encuentra que Y tiene densidad

$$f(x)=\frac{1}{\pi x}\sqrt{x(1-x)}\cdot 1_{[0,1]}(x).$$

Identificamos a esta distribución como una distribución beta $B(1/2,3/2)$. La familia de distribuciones beta incluye otras distribuciones importantes, tales como la ley arcoseno $AS(0,1)$ en el caso $B(1/2,1/2)$ y a la distribución uniforme en $[-1,1]$ en el caso $B(1,1)$. Hemos visto que la distribución arcoseno $AS(-1,1)$ no es infinitamente divisible en el sentido libre, por lo que $AS(0,1)$ tampoco lo es, ya que es una traslación de la primera. En el caso de la distribución uniforme, de la Subsección 2.6.3 tenemos que su transformada de Voiculescu es

$$\phi(z)=\frac{ze^{2/z}-z+e^{2/z}+1}{e^{2/z}-1},$$

la cual tiene una singularidad en $z=0$, lo cual por el Teorema 3.2.2 implica que la distribución uniforme tampoco es infinitamente divisible.

Finalmente debemos mencionar que el caso $B(3/2, 3/2)$ con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{x(1-x)}$$

es una distribución semicírculo $W_{1,1/2}$.

De las consideraciones anteriores surge la pregunta de cuáles distribuciones beta no son infinitamente divisibles en el sentido libre. Damos una respuesta parcial al final del capítulo siguiente.

3.7.9 Convolución Multiplicativa con una Distribución de Poisson Libre

En esta subsección estudiamos la convolución multiplicativa de dos medidas, cuando una de ellas tiene distribución Poisson Libre (1). Esta convolución siempre una distribución infinitamente divisible libre. Comenzamos estudiando dos ejemplos de convolución multiplicativa libre entre medidas, tratados por Speicher y Raj Rao [46] .

Recordemos que si μ tiene distribución de Semicírculo su transformada S es

$$S_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Mientras que, de la Proposición 3.7.3 la transformada S de ν con distribución Poisson libre es

$$S_\gamma(z) = \frac{1}{z+1}.$$

Entonces la transformada S de la convolución multiplicativa libre $\mu \boxtimes \nu$ es

$$S_{\mu\boxtimes\gamma}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}.$$

Así, usando (2.18), la transformada de Cauchy G de la medida de probabilidad $\mu \boxtimes \nu$ satisface la ecuación

$$z^2G^4 - zG + 1 = 0.$$

Esta ecuación se puede ver como un cuadrática en zG cuya solución es

$$zG(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(z)^2}}{2G(z)^2}.$$

Finalmente de la ecuación (3.8) tenemos que

$$1 - \mathcal{C}(G(z)) = zG(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G(z)^2}}{2G(z)^2},$$

de donde se obtiene la transformada cumulante libre

$$\mathcal{C}_{\mu \boxtimes \gamma}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}.$$

Consideremos ahora la convolución multiplicativa entre μ con distribución Poisson libre y ν con distribución Poisson libre trasladada por -1.

La Poisson libre trasladada por $-\alpha$ tiene transformada S

$$S_\mu^\alpha = \frac{-z - 1 + \alpha + \sqrt{z^2 + 2z + 2z\alpha + 1 - 2\alpha + \alpha^2}}{2z\alpha},$$

en particular para $\alpha = 1$ tenemos

$$S_\mu = S_\mu^1 = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4z}}{2z}.$$

Entonces la transformada S de la convolución multiplicativa libre $\mu \boxtimes \gamma$ es

$$S_{\mu \boxtimes \gamma} = \frac{-z + \sqrt{z^2 + 4z}}{2z(z+1)},$$

de donde la transformada de Cauchy de la medida de probabilidad $\mu \boxtimes \gamma$ satisface la ecuación

$$z^2 G^4 + z^2 G^3 - zG^2 - zG + 1 = 0.$$

Esta ecuación también se puede ver como un cuadrática en zG, obteniendo en este caso

$$\mathcal{C}_{\mu\boxtimes\gamma}(z) = \frac{1+z-\sqrt{1-2z-3z^3}}{2(z+z^2)}.$$

De las consideraciones anteriores se puede demostrar la divisibilidad infinita de estos dos ejemplos a través de su transformada cumulante libre. Sin embargo, en el Teorema 4.6.1 probaremos que si ν es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con soporte compacto y μ es una medida con distribución Poisson Libre (1), entonces $\nu \boxtimes \mu$ es infinitamente divisible en el sentido libre.

Capítulo 4

Enfoque Combinatorio

El objetivo principal de este capítulo es presentar el enfoque combinatorio de Speicher [43], [44] para estudiar la convolución y divisibilidad infinita libre de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Además, este capítulo explica de manera más amplia la conexión entre estos conceptos y la suma de variables aleatorias no-conmutativas libres definida en le Capítulo 1.

Para leer este capítulo es necesario conocer las herramientas y la notación de combinatoria sobre particiones que no se cruzan que se presentan en el Apéndice A. Así mismo, se requiere estar familiarizado con los problemas de momentos de medidas y su relación con sucesiones positivas definidas, lo cual se resume en el Apéndice B.

En todo este capítulo se supondrá que las medidas de probabilidad consideradas tienen todos sus momentos finitos; lo cual se cumple, en particular, si las medidas tienen soporte compacto. Es importante reiterar que contrario a lo que sucede en divisibilidad infinita clásica en donde una distribución no trivial no puede tener soporte compacto, en divisibilidad infinita libre varias distribuciones importantes si lo tienen; como hemos visto en el capítulo anterior.

Los objetos principales de este capítulo son los cumulantes. A lo largo del capítulo mostramos que los cumulantes libres desempeñan el papel de la transformada cumulante libre del Capítulo 3, debido a que linealizan la convolución libre. Se presentan criterios en base a estos cumulantes y se presentan ejemplos, tanto nuevos como conocidos.

4.1 Cumulantes y Momentos

En este trabajo adoptamos la definición general de cumulantes de acuerdo a la axiomatización en Lehner [33].

Definición 4.1.1 *Dada una noción de independencia en un espacio de probabilidad no-conmutativo* (A,τ) *decimos que una sucesión de aplicaciones* $t_n : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, *que manda* $a \to t_n(a)$, $n = 1, 2, 3...$ *se llama sucesión de* ***cumulantes (con respecto a la independencia)*** *si cumple las siguientes tres propiedades*

a) $t_n(a)$ *es un polinomio en los primeros* n *momentos de* a *con término mayor* $m_n(a)$. *Esto asegura que se pueden recuperar los momentos en términos de los cumulantes.*

b) Homogeneidad de grado n: $t_n(\lambda a) = \lambda^n t_n(a)$.

c) Aditividad con respecto a la independencia: si a *y* b *son variables aleatorias independientes, entonces* $t_n(a + b) = t_n(a) + t_n(b)$.

Dado la propiedad a) se tiene que una sucesión de cumulantes tiene exactamente la misma información que la sucesión de momentos. Las propiedades b) y c) nos dicen que los cumulantes se "comportan bien".

4.1.1 Cumulantes Clásicos

Como primer ejemplo presentamos de forma breve el caso más conocido de cumulantes: los cumulantes para la independencia clásica de variables aleatorias, estudiados inicialmente por T. Thiele en 1889. Recordemos que los momentos de una medida μ en $\mathbb{R}$ se definen como

$$m_n(\mu) = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx).$$

Estas constantes sirven en algunas ocasiones para definir una medida. Sin embargo, otras constantes asociadas a una medida, conocidas como los cumulantes clásicos, tienen propiedades más útiles desde el punto teórico (combinatorio), por ejemplo, el segundo cumulante clásico es la varianza y el cuarto cumulante clásico está asociado a la curtosis.

Definamos entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, el cumulante clásico c_n como la n-ésima derivada (evaluada en 0) de $C_x(t) = \log \widehat{\mu_X}(t)$, definida en el Capítulo 1. Es decir,

$$\log \widehat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n.$$

Esto es

$$\exp(c_1 t + \frac{c_2}{2!} t^2 + ... + \frac{c_n}{n!} t^n ..) = 1 + m_1 t + \frac{m_2}{2!} t^2 + ..., \tag{4.1}$$

de donde se pueden derivar expresiones para los momentos en términos de los cumulantes (ver pagina, 194, Ejercicio 11.37, [39])

$$m_n = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in P(n)} \prod_{V \in \boldsymbol{\pi}} c_{|V|} \tag{4.2}$$

donde $P(n)$ denota el conjunto de todas las particiones de $\{1, 2, ..., n\}$. Los primeros momentos se ven así

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 && (4.3) \\ m_2 &= c_2 + c_1^2 \\ m_3 &= c_3 + 3c_2c_1 + c_1^3 \\ m_4 &= c_4 + 4c_3c_1 + 3c_2^2 + 6c_2c_1^2 + c_1^4 && (4.4) \\ m_5 &= c_5 + 5c_4c_1 + 10c_3c_2 + 10c_3{c_1}^2 + 15c_2^2c_1 + 10c_2c_1^3 + c_1^5. \end{aligned}$$

Además, usando el Teorema de Inversión de Möbius (sobre $P(n)$) puede darse la siguiente expresión para los cumulantes en términos de los momentos, (ver subsección A.3.1)

$$c_n = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in P(n)} (-1)^{k-1} (k-1)! \prod_{V \in \boldsymbol{\pi}} m_{|V|} \tag{4.5}$$

donde para cada $\pi \in P(n)$, k denota el número de bloques de π.

Es fácil ver que los cumulantes clásicos son de hecho cumulantes según la Definición 4.1.1. Las condiciones a) y b) se siguen directamente de la fórmula (4.5): a) se sigue de que la partición $\pi = \{[1, 2, ..., n]\}$ aporta con el sumando m_n y b) se sigue de la homogeneidad de la función

$p(\pi) = \prod_{V \in \boldsymbol{\pi}} m_{|V|}$ para cada π. Finalmente c) es consecuencia de la linealidad de la derivada y del hecho de que $\log \widehat{\mu}$ linealiza la convolución clásica.

4.1.2 Cumulantes Libres

Los **cumulantes libres** (k_n), introducidos por Ronald Speicher en [43], se definen de manera similar a los cumulantes clásicos. Sin embargo, necesitamos primero extender la definición de cumulantes a particiones para poder entender la combinatoria detrás de ellos.

Notación 4.1.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra unitaria y sea $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ una funcional lineal unitaria. Dada una sucesión de funcionales multilineales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$,*

$$\begin{array}{rcl} p_n & : & \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}, \\ (a_1, ..., a_n) & \longmapsto & p_\pi[a_1, ..., a_n] \end{array}$$

extendemos esta sucesión a una familia $(p_\pi)_{n\in\mathbb{N},\pi\in NC(n)}$ de funcionales multilineales a través de la formula

$$p_\pi[a_1, ..., a_n] := \prod_{V\in\pi} p(V)[a_1, ..., a_s] \quad \textit{para } a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$$

donde

$$p(V)[a_1, ..., a_s] := p_s(a_{i_1}, ..., a_{i_s}) \tag{4.6}$$

para $V = \{i_1, i_2 ..., i_s\}$ y $i_1 < i_2 ... < i_s$.

La familia $(p_\pi)_{n\in\mathbb{N},\pi\in NC(n)}$ se llama la **familia multiplicativa de funcionales** en $NC(n)$ determinada por la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que usamos dos diferente tipos de paréntesis en la definición y que $p_n(a_1, ..., a_n) = p_{\mathbf{1}_n}[a_1, ..., a_n]$ para toda $n \geq 1$ y para todas $a_1, ..., a_n$ ($\mathbf{1}_n$ es la partición que sólo tiene un bloque). La multiplicidad de la familia $(p_\pi)_{n\in\mathbb{N},\pi\in NC(n)}$ significa que tenemos una factorización de acuerdo a la estructura en bloques de $NC(n)$.

Notación 4.1.2 *Sea A un álgebra unitaria y sea $\tau : A \to \mathbb{C}$ una funcional lineal unitaria. Definamos las funcionales multilineales $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ a través de la fórmula*

$$\tau_n(a_1, ..., a_n) := \tau(a_1 \cdots a_n).$$

Extendemos esta notación para las correspondientes funcionales multiplicativas en las particiones que no se cruzan a través de la formula

$$\tau_\pi[a_1, ..., a_n] := \prod_{V \in \pi} \tau(V)[a_1, ..., a_n] \text{ para } a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$$

donde $\tau(V)[a_1, ..., a_s]$ *se define como en (4.6).*

Ahora podemos definir los cumulantes libres por medio de la inversión de Möbius.

Definición 4.1.2 *Sea* $(\mathcal{A}, \tau)$ *un espacio de probabilidad no-conmutativo. Los correspondientes* ***cumulantes libres*** $(k_\pi)_{\pi \in NC(n)}$ *son, para cada* $n \in N$, $\pi \in NC(n)$, *funciones multilineales*

$$\begin{aligned} k_\pi \quad &: \quad \mathcal{A}^n \to \mathbb{C}, \\ (a_1, ..., a_n) \quad &\longmapsto \quad k_\pi[a_1, ..., a_n] \end{aligned}$$

donde

$$k_\pi[a_1, ..., a_n] := \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} \tau_\sigma[a_1, ..., a_n]\mu(\sigma, \pi),$$

y μ *es la función de Möbius en* $NC(n)$, *(ver A.3.2).*

Debido a la factorización canónica en intervalos de $NC(n)$ se obtienen fórmulas más sencillas para los cumulantes libres.

Proposición 4.1.1 *La aplicación* $\pi \longmapsto k_\pi$ *es una familia multiplicativa de funcionales, es decir*

$$k_\pi[a_1, ..., a_n] := \prod_{V \in \pi} k(V)[a_1, ..., a_n].$$

Más aún, la Definición 4.1.2 es equivalente a los siguientes enunciados.

i) $\pi \longmapsto k_\pi$ *es una familia multiplicativa de funcionales y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todos los* $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$ *se cumple que*

$$k_\pi(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} \tau_\sigma[a_1, ..., a_n]\mu(\sigma, 1_n). \tag{4.7}$$

ii) $\pi \longmapsto k_\pi$ *es una familia multiplicativa de funcionales y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todos los* $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$ *se cumple que*

$$\tau(a_1, ..., a_n) = \sum_{\sigma \in NC(n)} k_\sigma[a_1, ..., a_n]. \tag{4.8}$$

Recordemos del Capítulo 1 que cuando trabajamos con variables aleatorias no-conmutativas, estamos interesados principalmente en los momentos y su distribución. Ahora estamos interesados en los cumulantes libres de variables aleatorias no-conmutativas.

Notación 4.1.3 *Sean* $(a_i)_{i\in I}$ *variables aleatorias en una espacio de probabilidad no-conmutativo* (A, τ) *y sean* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *las funcionales de cumulantes libre correspondientes.*

a) Los ***cumulantes libres de*** $(\mathbf{a}_i)_{i\in I}$ *son todas las expresiones de la forma* $k_n(a_{i(1)}, ..., a_{i(n)})$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $i(1), ..., i(n) \in I$.

b)Si $(\mathcal{A}, \tau)$ *es un* $*$*-espacio de probabilidad, entonces los* $*$-***cumulantes libres de*** $(a_i)_{i\in I}$ *son los cumulantes de* $(a_i, a_i^*)_{i\in I}$.

c) Si sólo tenemos una variable aleatoria no-conmutativa a *usamos la notación* $k_n^a := k_n(a, a, ..., a)$.

d) Cuando la medida de probabilidad μ *es la* $*$*-distribución de* a *decimos que sus cumulantes son* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} := k_n^a$.

Entonces si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los cumulantes y momentos de la medida de probabilidad μ, llegamos a una fórmula análoga a (4.2) entre los momentos m_n y los cumulantes libres k_n

$$m_n = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in NC(n)} k_\pi \tag{4.9}$$

donde $\pi \rightarrow k_\pi$ es la extensión multiplicativa de los cumulantes a particiones que no se cruzan, es decir

$$k_\pi := k_{|V_1|} \cdots k_{|V_1|} \qquad \text{para} \qquad \pi = \{V_1, ..., V_r\} \in NC(n).$$

Podemos calcular fácilmente los primeros términos usando la fórmula (4.9), obteniendo el análogo libre a (4.3)

$$\begin{aligned}
m_1 &= k_1 \\
m_2 &= k_2 + k_1^2 \\
m_3 &= k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3 \\
m_4 &= k_4 + 4k_3k_1 + 2k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4 \\
m_5 &= k_5 + 5k_4k_1 + 5k_2k_3 + 10k_3k^2 + 10k_2^2k_1 + 10k_2k^3 + k_1^5.
\end{aligned}$$

Además, usando la inversión de Möbius en la látiz de las particiones que no se cruzan podemos obtener explícitamente una relación análoga a (4.5) entre los cumulantes libres k_n y los momentos m_n. Es decir,

$$k_n = \sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{V \in \boldsymbol{\pi}} m_{|V|} \prod_{U \in K(\boldsymbol{\pi})} s_{|U|}. \tag{4.10}$$

Nótese que calculamos la función de Möbius $\mu(\sigma, 1_n)$ en la fórmula (4.7) en términos del complemento de Kreweras de $K(\pi)$ como y $s_n = (-1)^n C_n$ (ver subsección A.3.2).

Observemos que la única diferencia entre las relaciones (4.2) y (4.9) es que la primera suma es sobre todas las particiones, mientras que la segunda es sobre las particiones que no se cruzan $NC(n)$. Además, como $P(n) = NC(n)$ para $n = 1, 2$ y 3 se tiene que $c_i = k_i$ $i = 1, 2, 3$. Esto explica de alguna manera por qué en el Capítulo 1 los primeros momentos mixtos de X e Y se ven iguales para dos variables aleatorias independientes y para dos variables aleatorias no-conmutativas en relación libre.

4.1.3 Relación entre Cumulantes Libres y Cumulantes Clásicos

Para terminar con esta sección presentamos una fórmula para los cumulantes libres en términos de los cumulantes clásicos. Este es muy buen ejemplo de como se usa la inversión de Möbius en la látiz de particiones que no se cruzan (Apéndice A). Utilizamos una versión más de la fórmula (4.8)

$$m_\pi = \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} k_\sigma.$$

Teorema 4.1.3 *Sea* (m_n) *una sucesión de momentos con cumulantes clásicos* c_n*. Entonces los cumulantes libres* k_n *de* m_n *están dados por la fórmula*

$$k_n = \sum_{\pi \in \Pi_n^{conn}} c_\pi \tag{4.11}$$

donde $\Pi_n^{conn} := \{\pi \in P(n) : \pi$ *está conectada*$\}$ *y* $c_\pi = \prod_{V \in \pi} c_{|V|}$.

Demostración Para $\sigma \in \Pi_n$ denotamos por $\overline{\sigma}$ a su cerradura en $NC(n)$, esto es la partición más chica que no se cruza π tal que $\sigma \leq \pi$. Esto es tomar σ y unir todos los bloques que se cruzan.

Entonces para cada $\pi \in NC(n)$ definimos

$$\widetilde{k}_\pi = \sum_{\substack{\sigma \in P(n) \\ \overline{\sigma} = \pi}} c_\sigma.$$

Queremos ver la preimagen de cualquier partición $\pi \in NC(n)$ bajo la operación cerradura, es decir, quienes son las particiones $\sigma \in P$ tales que $\overline{\sigma} = \pi$. Pero para esto basta con ver quien es la preimagen de $\pi = \{\{1, 2, 3, ..., n\}\}$ ya que claramente $\widetilde{k}_\pi$ es multiplicativa. Para que la cerradura de una partición σ sea $\pi = \{\{1, 2, 3, ..., n\}\}$ queremos que de hecho sea una partición conectada, es decir que $\sigma \in \Pi_n^{conn}$ lo que se traduce en

$$\widetilde{k}_n := \widetilde{k}_{1_n} = \sum_{\sigma \in \Pi_n^{conn}} k_\sigma.$$

En general para $\pi \in NC(n)$ tenemos

$$\begin{aligned} m_\pi &= \sum_{\boldsymbol{\rho} \in P(n)} c_\rho \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} \sum_{\substack{\rho \in P(n) \\ \overline{\rho} = \sigma}} c_\rho \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in NC(n) \\ \sigma \leq \pi}} \widetilde{k}_\sigma \end{aligned}$$

de donde por la Inversión de Möbius se tiene que $\widetilde{k}_\pi = k_\pi$ y se sigue el resultado. ■

4.2 Convolución y Cumulantes libres

Hasta ahora no hemos visto que relación existe entre los cumulantes libres y la convolución libre $\boxplus$. Primero queremos mostrar que los cumulantes libres son cumulantes según la Definición 4.1.1 para la relación de independencia libre $\boxplus$. Las condiciones a) y b) se siguen de la definición de cumulantes libres. La condición c) es consecuencia de lo siguiente: el hecho de que dos variables aleatorias no-conmutativas son "independientes" se puede describir de una manera muy sencilla, como se muestra en el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [39, Teorema 11.16]

Teorema 4.2.1 *Sea (A,τ) un C^*-espacio de probabilidad no-conmutativo y sean $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los cumulantes libres correspondientes. Consideremos subálgebras unitarias $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ están en relación libre.

ii) Para todo $n \geq 2$ y para todo $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, $(j = 1, ..., n)$ con $i(1), ..., i(n) \in I$ se tiene que $k_n(a_1, ..., a_n) = 0$ siempre que existen $1 \leq l, k \leq n$ con $i(l) \neq i(k)$.

Como consecuencia directa se tiene que los cumulantes libres cumplen la condición c) de la Definición 4.1.1 para la relación libre.

Corolario 4.2.2 *Sean a y b variables aleatorias libres en algún espacio de probabilidad no-conmutativo. Entonces se tiene*

$$k_n^{a+b} = k_n^a + k_n^b \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demostración Del Teorema 4.2.1 se tiene que todos los cumulantes que tienen ambas a y b como argumentos deben anularse y por lo tanto

$$\begin{aligned} k_n^{a+b} &= k_n(a+b, ..., a+b) \\ &= k_n(a, ..., a) + k_n(b, ..., b) \\ &= k_n^a + k_n^b. \end{aligned}$$

■

Claramente todos los cumulantes libres existen si y solo sí todos los momentos existen.

Además, pidiendo ciertas restricciones a los momentos, que serán claras más adelante, se tiene por a) en la Definición 4.1.1 que los cumulantes definen la $*$-distribución de a. Por otra parte el hecho de que se cumpla c) en la Definición 4.1.1 nos dice que dados a y b en relación libre podemos encontrar los cumulantes de $a+b$ y por lo tanto su $*$-distribución. Esto nos dice de alguna forma que se debería de poderse entender la convolución libre únicamente con los cumulantes libres, cuando estos existen. Ahora definamos la transformada

$$C_a(z) = \sum k_n^a z^n. \tag{4.12}$$

Entonces los cumulantes libres y la función C_a tienen la misma información, además C_a se "comporta bien" como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3 *La transformada C_a cumple con las siguientes condiciones.*

a) $C_a(z) + C_b(z) = C_{a+b}(z)$

b) $C_{am}(z) = C_m(az)$

Demostración De (4.12) tenemos

$$\begin{aligned} C_a(z) + C_b(z) &= \sum k_n^a z^n + \sum k_n^b z^n \\ &= \sum (k_n^a + k_n^b) z^n \\ &= \sum k_n^{a+b} z^n \\ &= C_{a+b}(z) \end{aligned}$$

lo que demuestra (a). La demostración de (b) se sigue la misma forma

$$\begin{aligned} C_{am}(z) &= \sum k_n^{am} z^n \\ &= \sum (a^n k_n^m z^n) \\ &= \sum k_n^m (az)^n \\ &= C_m(az). \end{aligned}$$

∎

Entonces llegamos a una función que tiene toda la información del espectro y además se "comporta bien" con respecto a la independencia y a la dilatación. Por otra parte en los Capítulos 2 y 3 vimos que la transformada cumulante libre también cumple estas propiedades. El siguiente teorema explica la relación entre C_a y la transformada cumulante libre $\mathcal{C}_\mu(z)$.

Teorema 4.2.4 *Sean $(m_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(k_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ los momentos y cumulantes libres de alguna variable aleatoria y consideremos las series formales de potencias*

$$M_a(z) = 1 + \sum m_n(a) z^n$$

y

$$C_a(z) = 1 + \sum k_n^a z^n.$$

Entonces

$$M_a(z) = C_a[zM_a(z)]. \tag{4.13}$$

Demostración De la definición de cumulantes se tiene que poniendo $f_n(1_n) := m_n$ y $g_n(1_n) := k_n$ la relación (4.10) equivale a que $f = g * \varsigma$ (la convolución de la funciones g y la función zeta ζ de la Definición A.3.2). Por la inversión de Möbius en $NC(n)$, se tiene la relación (4.13). ■

La relación (4.13) es equivalente a la definición de $\mathcal{C}_\mu$ en términos de la transformada de Cauchy dada en el Capítulo 2, pues $G_\mu(z) = \frac{1}{z}M(\frac{1}{z})$. Entonces

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \sum k_n(\mu) z^n = \sum k_n^a z^n = C_a(z) \tag{4.14}$$

donde μ es la $*$-distribución de a.

En este caso de las ecuaciones (2.14) y (4.14) podemos ver a la transformada R_μ de Voiculescu de la siguiente forma

$$\mathcal{R}_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(\mu) z^n. \tag{4.15}$$

Esto nos dice que en convolución libre, trabajar con los cumulante libres da la misma información que trabajar con la transformada cumulante libre.

En las siguientes secciones veremos como se ve la biyección de Bercovici-Pata Λ y que quiere decir que una medida sea infinitamente divisible libre en términos de los cumulantes libres.

4.3 La Biyección Λ Vía Cumulantes

Una manera de entender , en términos de los cumulantes, la biyección de Bercovici-Pata descrita en el capítulo anterior fue observada por Anshelevich [3].

Sea μ una medida de probabilidad infinitamente divisible en el sentido clásico, con cumulantes clásicos α_n. Entonces la biyección de Bercovici-Pata puede ser definida como la aplicación que manda a μ a la medida de probabilidad v en $\mathbb{R}$ con cumulantes libres α_n. En otra palabras los cumulantes libres $\Lambda(\mu)$ son los cumulantes clásicos de μ. Esto es

$$c_n(\mu) = k_n(\Lambda(\mu)).$$

Usando las expresiones (4.11), (4.10) y (4.5) de la sección anterior, lo anterior se traduce en la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} k_n(\Lambda(\mu)) &= \sum_{\pi \in \Pi_n^{conn}} k_\pi(\mu) \\ \sum_{\mathbf{V} \in P(n)} (-1)^{k-1}(k-1)! \prod_{v \in \mathbf{V}} m_{|v|}(\mu) &= \sum_{\mathbf{V} \in NC(n)} \prod_{v \in \mathbf{V}} m_{|v|}(\Lambda(\mu)) \prod_{U \in K(\mathbf{U})} S_{|U|}. \end{aligned}$$

Esto permite decidir si una variable aleatoria es o no infinitamente divisible en el sentido libre verificando si sus cumulantes libres son cumulantes clásicos de una medida que es infinitamente divisible en el sentido clásico y viceversa.

En Steutel y Van Horn [47] se consideran algunas condiciones necesarias para los cumulantes clásicos de una medida infinitamente divisible, estos criterios son válidos por supuesto para los cumulantes libres. A continuación damos ejemplos de restricciones conocidas para los cumulantes clásicos que pueden ser traducidas a los cumulantes libres.

Por ejemplo, el siguiente resultado es bien conocido ([47, pag 181]). Recordamos que una medida es tipo Poisson si su medida de Lévy esta concentrada en un punto.

Proposición 4.3.1 *Los cumulantes clásicos c_2, c_3 y c_4 de una distribución infinitamente di-*

visible en el sentido clásico con cuarto momento finito satisfacen la ecuación

$$c_2 c_4 \geq c_3^2$$

con igualdad si y sólo si μ es Gaussiana o de tipo Poisson.

La biyección de Bercovici-Pata nos dice que los cumulantes k_2, k_3 y k_4 deben de satisfacer la misma relación para una medida en $ID(\boxplus)$, obteniendo el siguiente corolario.

Corolario 4.3.1 *Los cumulantes libres k_2, k_3 y k_4 de una distribución infinitamente divisible en el sentido libre con cuarto momento finito satisfacen la ecuación*

$$k_2 k_4 \geq k_3^2$$

con igualdad si y sólo si μ tiene distribución de semicírculo o de tipo Poisson libre.

Otro criterio útil se obtiene de la siguiente observación: Si μ es infinitamente divisible en el sentido clásico entonces $c_{2m} \geq 0$.

Recordemos que la **curtosis** de una medida v se define como

$$Kur(v) = \frac{m_4(v)}{(m_2(v))^2} - 3.$$

Una consecuencia de que $c_{2m} \geq 0$ es que si una distribución con cuarto momento es infinitamente divisible en el sentido clásico, entonces ésta es leptocúrtica, es decir con curtosis no negativa. Obtenemos a continuación un resultado análogo con respecto a la divisibilidad infinita libre. Este resultado, aunque sencillo, no fue encontrado en la literatura.

Proposición 4.3.2 *Si μ es una medida infinitamente divisible en el sentido libre, entonces la curtosis de μ es mayor que -1.*

Demostración Supongamos que $\mu = \Lambda(v)$. La curtosis de una distribución infinitamente divisible en el sentido clásico debe ser mayor que cero, esto viene del hecho de que el cuarto cumulante debe ser positivo. Esto es,

$$\frac{k_4(\mu)}{(k_2(\mu))^2} = \frac{c_4(v)}{(c_2(v))^2} = \frac{m_4(v)}{(m_2(v))^2} - 3 = Kur(v) \geq 0.$$

Calculando la curtosis de μ

$$\begin{aligned}
Kur(\mu) &= \frac{c_4(\mu)}{(c_2^2)(\mu)^2} = \frac{m_4(\mu) - 3(m_2(\mu))^2 - 4m_3(\mu)m_1(\mu) - m_1(\mu)}{(m_2(\mu))^2} \\
&= \frac{m_4(\mu) - 2(m_2(\mu))^2 - -4m_3(\mu)m_1(\mu) - m_1(\mu)}{(m_2(\mu))^2} - 1 = \frac{k_4(\mu)}{(k_2^2(\mu))^2} - 1
\end{aligned}$$

se tiene

$$Kur(\mu) \geq -1. \tag{4.16}$$

■

En la siguiente sección presentamos un criterio para que una medida sea $\boxplus$-infinitamente divisible en términos de sus cumulantes libres. De las consideraciones hechas en esta sección se tiene que este criterio también es válido para los cumulantes clásicos de una medida $\star$-infinitamente divisible.

4.4 Cumulantes de Leyes Infinitamente Divisibles Libres

Es de interés determinar en qué se traduce que una distribución sea infinitamente divisible en el sentido libre en términos de los cumulantes libres. Resulta que el concepto adecuado es el de sucesiones positivas definidas.

Recordamos que una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ es **semi-positiva definida** si se tiene que para todo $r = 0, 1, 2, ...$ y para todo $z_1, ..., z_r \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\sum_{i,j=0}^{r} z_i \overline{z_j} a_{i+j} \geq 0, \tag{4.17}$$

en este caso escribimos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$. De igual forma una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ se dice **condicionalmente semi-positiva definida** si se tiene que para todo $r = 1, 2, ...$ y para todo $z_1, ..., z_r \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\sum_{i,j=1}^{r} z_i \overline{z_j} a_{i+j} \geq 0.$$

Observemos que una sucesión semi-positiva definida es en particular condicionalmente semi-positiva definida.

En el apéndice B, se hace un resumen de los principales resultados sobre sucesiones semi-positivas definidas y su relación con los problemas de momentos.

El siguiente resultado es una versión un poco más general del Teorema 13.16 en [39].

Teorema 4.4.1 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con cumulantes libres $k_n < CD^n(n-1)!$ para algunos $C, D > 0$. Entonces las siguientes enunciados son equivalentes:*

i) La medida μ es infinitamente divisible en el sentido libre.

ii) La transformada R_μ de Voiculescu es de la forma

$$R_\mu(z) = k_1 + \int \frac{z}{1-xz}\rho(dx) \tag{4.18}$$

donde ρ tiene todos sus momentos.

iii) La sucesión de cumulantes libres es condicionalmente semi-positiva definida.

Más aún, se tienen las siguientes caracterizaciones para el soporte de la medida ρ :

a) ρ tiene soporte en $[0,\infty]$,si y sólo si $\{k_{n+3}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

b) ρ tiene soporte acotado si y sólo si k_n crece subexponencialmente.

c) ρ tiene soporte en $[-1,1]$ si y sólo si $\{k_{n+2} - k_{n+4}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

d) ρ tiene soporte en $[0,1]$ si y sólo si $\{k_{n+2} - k_{n+3}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, $\{k_{n+3} - k_{n+4}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ $\{k_{n+3}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

Demostración Primero probaremos que (ii) y (iii) son equivalentes. Supongamos que la sucesión $(k_{n+2})_{n\geq 0}$ de cumulantes libres es definida positiva, esto quiere decir por el criterio de Hamburger (ver Teorema B.2.1, Apéndice B) que existe una medida ρ con momentos k_{n+2},

$$k_{n+2} = \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x) \qquad (n \geq 0).$$

Esta medida es única ya que los cumulantes libres satisfacen la condición de subexponencialidad $k_n < CD^n(n-1)!$.

Entonces $R_\mu(z)$ de (4.15) se ve de la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_\mu(z) &= k_1 + \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+2} z^{n+1} \\ &= k_1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \int_{\mathbb{R}} x^n d\rho(x) \\ &= k_1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} \int_{\mathbb{R}} (xz)^n \, d\rho(x) \\ &= k_1 + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{1-xz} d\rho(x), \end{aligned}$$

y claramente los pasos se pueden revertir.

Además, de la demostración anterior y el Teorema B.2.3 se sigue que las condiciones (a), (b), (c) y (d) en los cumulantes libres de la medida μ implican las condiciones sobre el soporte de la medida ρ.

Sea μ una medida infinitamente divisible en el sentido libre. Como vimos en el Teorema 3.2.2, una medida es infinitamente divisible si y solo si

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zx}{z-x} \sigma(dx), \qquad (z \in \mathbb{C}^+)$$

de donde por la ecuación (2.14) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu(z) &= \phi_\mu(\frac{1}{z}) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+(\frac{1}{z})x}{\frac{1}{z}-x} \sigma(dx) \\ &= \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{z+x}{1-xz} \sigma(dx) \\ &= \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1-xz} \sigma(dx) + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{1-xz} \sigma(dx) \\ &= k_1 + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{1-xz} d\rho(x), \end{aligned}$$

y nuevamente los pasos se pueden revertir. ■

Como corolario del teorema anterior obtenemos una extensión del Corolario 4.3.1.

Corolario 4.4.2 *Sea $(k_i)_{i>0}$ la sucesión de cumulantes libres de la medida μ infinitamente divisible. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades para los cumulantes libres* *a)* $k_{2m} \geq 0$ *con igualdad si y sólo si* μ *tiene distribución de semicírculo.*

b) $k_{2m} + k_{2n} \geq 2k_{m+n}$.

c) $k_{2m}k_{2n} \geq (k_{m+n})^2$

Demostración Del inciso (d) del teorema anterior si μ es infinitamente divisible entonces $\{k_{n+2}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ de donde por el Teorema B.2.2 se tiene que si $k_{2m} \geq 0$, para todo m. Más aún, si $k_{2m} = 0$ para algún $m > 1$ entonces para todo $n \geq 2$ se tiene que $k_n = 0$ para $n > 2$ y por lo tanto la medida μ debe ser una distribución de semicírculo, en otras palabras, la medida ρ en la representación (4.18) es idénticamente cero. Las desigualdades en (b) y (c) se siguen de la misma forma que (a) de los incisos (e) y (f) en el Teorema B.2.2. ■

A continuación damos algunas relaciones entre una medida infinitamente divisible libre y su medida de Lévy.

Proposición 4.4.1 *Sea* μ *una medida de probabilidad infinitamente divisible libre con todos sus momentos, con función cumulante dada por*

$$\mathcal{C}_\mu(z) = k_1 z + \int \frac{z^2}{1 - xz}\sigma(dx), \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Entonces

a) La medida σ *es simétrica si y sólo si la medida de* μ *es simétrica.*

b) El soporte de σ *es acotado si y sólo si el soporte de* μ *es acotado.*

Demostración a) Una medida con todos sus momentos y media cero es simétrica cuando sus momentos impares son cero. Supongamos primero que σ es simétrica y tiene media cero, entonces los momentos impares de σ son cero. Esto es $k_{2n+1} = 0$, usando nuevamente (4.9) se tiene y observando que cualquier partición de $[2n + 1]$ tiene al menos un elemento impar se tiene

$$m_{2n+1} = \sum_{\mathbf{V} \in NC(n)} \prod_{v \in \mathbf{V}} k_{|v|} = \sum_{\mathbf{V} \in NC(n)} 0 = 0.$$

El regreso se sigue de la misma forma usando (4.10).

b) Recordemos del Apéndice A, Teorema B.2.4 que una medida tiene soporte acotado si y sólo si tiene todos sus momentos y estos crecen subexponencialmente. De esta forma, supongamos que el soporte de σ es acotado, esto es existe $D > 0$ tal que $k_n < D^n$. Usando (4.9) se obtiene

$$|m_n| \leq \sum_{\mathbf{V} \in NC(n)} \prod_{v \in \mathbf{V}} k_{|v|} \leq \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} D^n \leq 4^n D^n$$

lo que prueba que el soporte de μ acotado. El regreso se sigue de la misma forma, simplemente necesitamos acotar k_n

$$|k_n| = \sum_{\mathbf{V} \in NC(n)} \prod_{v \in \mathbf{V}} m_{|v|}(\mu) \prod_{U \in K(\mathbf{V})} S_{|U|} \leq 4^n D^n 4^n.$$

■

Observación 4.4.3 *Observemos que las condiciones sobre el soporte no pueden ser aplicados en probabilidad clásica ya que el número de particiones es $n!$ que no es subexponencial.*

Observación 4.4.4 *De la prueba del teorema anterior y un argumento límite idéntico al utilizado en Teorema 3.5.1 se sigue el inverso del Teorema 3.5.1.*

4.5 Coeficientes de Jacobi

Finalmente, presentamos un último criterio combinatorio para la divisibilidad infinita libre en términos de los **coeficientes de Jacobi**. Este enfoque fue propuesto por Wojciech Mlotkowski y fue anunciado en el evento *"28th Conference on Quantum Probability and Related Topics"*, en Guanajuato, en septiembre del 2007. Lo presentado en esta sección es un resumen del material que nos proporcionó el autor.

La idea es encontrar una fórmula que expresa los cumulantes libres de una medida con todos sus momentos en términos de su coeficientes de Jacobi. Esto permite dar condiciones necesarias para divisibilidad infinita libre.

Los coeficientes de Jacobi $\gamma_m = \gamma_m(\mu) \geq 0, \beta_m = \beta_m(\mu) \in \mathbb{R}$, se definen a través de la siguiente recursión

$$xP_m(x) = P_{m+1}(x) + \beta_m P_m(x) + \gamma_{m-1} P_{m-1}(x),$$

donde $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ y $(P_m)_{m\geq 0}$ es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a μ, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} P_m(x)P_n(x)\mu(dx) = 0 \qquad \text{si } m \neq n.$$

Entonces podemos escribir la transformada de Cauchy de la medida μ de la siguiente manera:

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t}\mu(dt) = \cfrac{1}{z - \beta_0 - \cfrac{\gamma_0}{z - \beta_1 - \cfrac{\gamma_1}{z - \beta_2 - \cfrac{\gamma_2}{\ddots}}}}$$

Existe una relación entre los momentos y los coeficientes de Jacobi, ésta se obtiene a través de la **fórmula de Accardi-Bozejko** ([26])

$$m_n = \sum_{\sigma \in NC_{1,2}(n)} \prod_{v\in\sigma, |v|=1} \beta_{d(V,\sigma)} \prod_{v\in\sigma,|v|=2} \gamma_{d(V,\sigma)}$$

donde:

i) $NC_{1,2}(n)$: las particiones $\pi \in NC(n)$ tales $|V| \in \{1, 2\}$. para toda $V \in \pi$

ii) $d(V, \pi)$: la profundidad del bloque V en π.

Además, a partir de (4.2) se puede obtener la siguiente fórmula para los cumulantes en términos de los coeficientes de Jacobi

$$k_n = \sum_{(\sigma,k)\in NCL^1_{1,2}(n)} \prod_{V\in\sigma} w(V, k(V)).$$

Definimos como $\beta(t), \gamma(t)$ a los coeficientes de Jacobi de la potencia libre $\mu^{\boxplus t}$,

$$k(\mu^{\boxplus t}). \tag{4.19}$$

Entonces se pueden obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\beta_0(t) &= t\beta_0 \\
\gamma_0(t) &= t\gamma_0 \\
\beta_1(t) &= \beta_1 - \beta_0 + t\beta_0 \\
\gamma_1(t) &= \gamma_1 - \gamma_0 + t\gamma_0 \\
\beta_2(t) &= \beta_1(t) - \frac{\gamma_1(\beta_2 - \beta_1)}{\gamma_1(t)} \\
\gamma_2(t) &= \gamma_1(t) + \frac{\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_1(t) - (1-t)\gamma_0\gamma_1(\beta_2 - \beta_1)^2}{\gamma_1(t)^2}.
\end{aligned}$$

Sí μ es $\boxplus-$infinitamente divisible entonces $\lim_{t\to 0^+} \gamma_m(t) \geq 0$ para toda $m \geq 0$.

Corolario 4.5.1 *Si μ es infinitamente divisible en el sentido libre entonces $\gamma_0 \leq \gamma_1$ y*

$$\gamma_0\gamma_1(\beta_2 - \beta_1)^2 \leq (\gamma_1 - \gamma_0)\left[\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_1 - \gamma_0)^2\right].$$

Corolario 4.5.2 *Si $a, b > 0, a \neq b$ y μ es una medida con transformada de Cauchy*

$$G_\mu(z) = \cfrac{1}{z - \beta_0 - \cfrac{a}{z - \beta_1 - \cfrac{b}{z - \beta_2 - \cfrac{a}{z - \beta_2 - \cfrac{\gamma_3}{\ddots}}}}}$$

entonces μ no es $\boxplus-$infinitamente divisible

4.6 Ejemplos

4.6.1 Distribuciones Tipo Beta

En las subsecciones 3.7.8, 3.7.5 y 3.7.7 se dan ejemplos de distribuciones "tipo beta" que son infinitamente divisibles en el sentido libre. En esta subsección usamos el criterio de la curtosis encontrado en la Proposición 4.3.2 para determinar otros valores de parámetros para los cuales estas distribuciones no son infinitamente divisibles.

Si μ es una distribución beta $B(\alpha,\beta)$, su curtosis de μ está dada por

$$Kur(\mu) = 6\frac{\alpha^3 - \alpha^2(2\beta-1) + \beta^2(\beta+1) - 2\alpha\beta(\beta+2)}{\alpha\beta(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}. \tag{4.20}$$

La Proposición 4.3.2 nos dice que si una distribución $B(\alpha,\beta)$ es $\boxplus-$infinitamente divisible, entonces debe tener una curtosis mayor que menos uno. Así, de la ecuación (4.20) se obtiene la desigualdad

$$\alpha^3\beta + 6\alpha^3 + 2\alpha^2\beta^2 - 7\alpha^2\beta + 6\alpha^2 + \alpha\beta^3 - 7\alpha\beta^2 - 18\alpha\beta + 6\beta^3 + 6\beta^2 \geq 0$$

que es simétrica con respecto a α y β.

Observemos que esta desigualdad se cumple para los casos $B(1/2,3/2)$, $B(3/2,1/2)$ y $B(3/2,3/2)$, que son $\boxplus$-infinitamente divisibles según el Ejemplo 3.7.8, mientras que la distribución $B(1/2,1/2)$ no la cumple.

Esta desigualdad permite encontrar familias de funciones que no son infinitamente divisibles. Por ejemplo, tomando $\beta = \alpha$ obtenemos que si $\alpha < 3/2$, entonces $B(\alpha,\alpha)$ no es $\boxplus$-infinitamente divisible. Por otra parte, si tomamos algún valor fijo de α, digamos $\alpha = 1/2$, se obtiene que $B(1/2,\beta)$ no es $\boxplus$-infinitamente divisible si $\beta \in [0.236, 0.913]$. Por simetría, si tomamos $B(\alpha,1/2)$, entonces α no debe estar en el intervalo $[0.236, 0.913]$.

De igual forma que para la distribución beta, podemos obtener una desigualdad como (4.20) para la distribución beta simétrica. Así, sea μ una distribución beta simétrica $BS(\alpha,\beta)$, si μ es infinitamente divisible se tiene que

$$(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \geq 2\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3). \tag{4.21}$$

En particular, cuando $\beta = \alpha$ se tiene que si $\alpha > 7/25$ entonces $BS(\alpha,\alpha)$ no es $\boxplus$-infinitamente divisible. En particular los caso $BS(3/2,3/2)$ y $BS(1/2,1/2)$ no son $\boxplus$-infinitamente divisible. Tomando $\alpha = 1/2$, se obtiene que $BS(1/2,\beta)$ no es $\boxplus$-infinitamente divisible si $\beta < 1/2$. Recordemos que el caso $BS(1/2,3/2)$ si lo es.

Para el caso distribuciones $B_2(\alpha,\beta)$ (beta tipo 2) no se puede utilizar este criterio, pues estas distribuciones no tienen curtosis definida, debido a la falta de momentos.

4.6.2 Potencias de Semicírculo y Gaussiana

Retomamos las potencias de semicírculo introducidas en la Sección 2.6.5. Es de interés saber si estas distribuciones son infinitamente divisibles en el sentido libre. Damos una respuesta parcial a este problema y presentamos algunas conjeturas.

Recordemos que casos importantes de esta familia ya han sido tratados. La distribución del semicírculo ($\theta = 0$) es $\boxplus$-infinitamente divisible, mientras que las distribuciones arcoseno ($\theta = -1$), uniforme ($\theta = -1/2$) y el caso frontera ($\theta = -3/2$) no lo son.

Es importante resaltar que esta familia contiene a las distribuciones "Gaussianas" para diferentes convoluciones. Como ya se ha mencionado, la ley arcoseno ($\theta = -1$) desempeña el papel de la Gaussiana en convolución monótona (ver [17]), la ley del semicírculo ($\theta = 0$) en convolución libre y el caso límite ($\theta \to \infty$) es la distribución Gaussiana clásica. El otro caso frontera ($\theta = -3/2$) es la respectiva "Gaussiana" en la convolución booleana (ver [45]).

A continuación mostramos, utilizando la Proposición 4.3.2 que la distribución de potencia del semicírculo S_θ no es infinitamente divisible en el sentido libre cuando θ es negativa.

Proposición 4.6.1 *Si $\theta < 0$, entonces S_θ no es infinitamente divisibles.*

Demostración De la Proposición 2.6.2 tenemos que

$$ES_\theta^{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{(k)!} \frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+k)}.$$

Así, calculando la curtosis de S_θ obtenemos:

$$\frac{ES_\theta^4}{(ES_\theta^2)^2} - 3 = \frac{\frac{1}{2^4}\frac{(4)!}{(2)!}\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+2)}}{(\frac{1}{2^2}\frac{(2)!}{1!}\frac{\Gamma(\theta+2)}{\Gamma(\theta+2+1)})^2} - 3 = \frac{3}{\Gamma(\theta+2)\Gamma(\theta+4)}\Big((\Gamma(\theta+3))^2 - \Gamma(\theta+2)\Gamma(\theta+4)\Big) < -1,$$

por lo que de la Proposición 4.3.2 obtenemos el resultado. ■

Observemos que

$$\lim_{\theta\to\infty}\Big(\frac{3}{\Gamma(\theta+2)\Gamma(\theta+4)}\Big((\Gamma(\theta+3))^2 - \Gamma(\theta+2)\Gamma(\theta+4)\Big)\Big) = 0.$$

Esto viene del hecho de que $c_4 \to 0$ cuando $n \to \infty$. De hecho, cualquier límite de cumulante clásico de orden par mayor que c_2 tiende a cero. Esto se sigue del Teorema de

Poincaré 2.6.1 ya que $f_n(x\,;\sqrt{(n+2)/2}\sigma)$ converge, cuando $n \to \infty$, a la densidad Gaussiana $(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-x^2/(2\sigma^2))$.

Además la convergencia en distribución de las potencias de semicírculo a la Gaussiana nos dice que si existe $N > 0$ tal que para todo $\theta > N$ la distribución PS_θ es infinitamente divisible en el sentido libre, entonces la distribución Gaussiana también lo sería. Esto daría un nuevo ejemplo de una distribución que es infinitamente divisible en ambos sentidos.

De las observaciones anteriores planteamos las siguientes conjeturas.

Conjetura 1: La distribución potencia de semicírculo es infinitamente divisible para $\theta \geq 0$.

Conjetura 2: La distribución Gaussiana es infinitamente divisible en el sentido libre (4.17).

A pesar de que no hemos encontrado una fórmula explícita para los cumulantes libres de las potencias de semicírculo, podemos calcular los cumulantes libres de la distribución Gaussiana en términos de ciertos tipos de diagramas.

Un diagrama de cuerdas es un círculo con $2n$ vértices o nodos y n pares de nodos ajenos unidos por n cuerdas. Existe una biyección clara entre los diagramas de $2n$ cuerdas y las particiones por pares de $\{1, 2..., 2n\}$. Esto nos dice, por ejemplo, que el número de diagramas de cuerdas que no se intersectan es igual al número de particiones por pares que no se cruzan. Diremos que un diagrama de cuerdas está conectado si al quitar el círculo original, la figura hecha por las cuerdas es conexa.

Lo anterior nos permite dar una interpretación de los cumulantes libres de la distribución Gaussiana. Esto fue observado en Lenher [33]. Sin embargo, aquí damos una prueba diferente.

Proposición 4.6.2 *Sea μ una medida con distribución Gaussiana estándar. Entonces el n-ésimo cumulante libre $k_n(\mu)$ es igual al número de diagramas de cuerdas conectados de $2n$ nodos.*

Demostración Denotemos I_n a los números de diagramas de cuerdas de $2n$ nodos, es bien conocido (y fácil de demostrar) que $I_n = (1)(3)(5)...(2n+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Sea

$$I(z) = \sum_{n\geq 0} I_n z^n$$

la función generatriz correspondiente a I_n. Además, denotemos por D_n al número de diagramas conectados de $2n$ nodos y sea

$$D(z) = \sum_{n\geq 0} D_n z^n.$$

Entonces de [16] se tiene la relación

$$I(z) = D(zI(z)^2). \tag{4.22}$$

Observemos que si μ es una distribución Gaussiana, entonces $I_n = m_{2n}(\mu)$ y (4.22) es exactamente la relación que se cumple entre la serie de momentos y la serie de cumulantes libres (4.13). Así, tenemos que D_n no es otra cosa que el cumulante libre $k_{2n}(\mu)$. ∎

Más aún, de [16], esta interpretación nos da una fórmula recursiva para los cumulantes libres de μ

$$k_{2n}(\mu) = (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} k_{2n-2i}(\mu)k_{2i}(\mu),$$

donde μ es distribución Gaussiana.

4.6.3 Distribución Exponencial

Sea μ una distribución exponencial estándar con función de densidad

$$g(x) = e^{-x},\ x > 0.$$

Es bien conocido que la distribución exponencial es infinitamente divisible en el sentido clásico. Podemos calcular analíticamente los momentos y los cumulantes clásicos de μ a partir de la transformada de Fourier

$$\widehat{\mu}(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial\left(\log\widehat{\mu}(z)\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\log(\frac{1}{1-z})\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(-\log(1-z)\right)}{\partial z} = \frac{1}{1-z}$$

y de (4.1) se tiene la relación $c_{r+1} = m_r$.

La transformada de Cauchy

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{z-x}dx$$

no tiene una forma explícita, más allá de estar en términos de una Integral Exponencial Ei; ver [22, 5, p. 876].

Sin embargo, también se puede obtener una descripción de la distribución exponencial desde el enfoque combinatorio.

Proposición 4.6.3 *Sea μ una medida todos sus momentos. Entonces μ tiene cumulantes clásicos $c_r(\mu) = (r-1)!$ si y solo si sus momentos son $m_n(\mu) = n!$*

Demostración Supongamos que μ tiene cumulantes clásicos $c_r = (r-1)!$.

Queremos mostrar entonces que

$$\sum_{\boldsymbol{\pi} \in P(n)} \prod_{V \in \boldsymbol{\pi}} (|V|-1)! = n!.$$

Utilizamos la técnica de contar de 2 formas una misma cosa. En este caso contaremos el número de permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Es bien conocido que el número de permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$ es $n!$. Por otra parte, una forma de hacer una permutación es la siguiente: Escojamos una partición, dada esta partición, para cada bloque escojamos una permutación cíclica del bloque. El hecho de que con este procedimiento obtenemos cada una de las particiones viene del hecho de que toda permutación se puede escribir como producto de permutaciones cíclicas ajenas de una y sólo una vez. Ahora contemos cuantas formas hay de hacer esto. Para cada bloque de tamaño V existen $(|V|-1)!$ permutaciones cíclicas diferentes. Lo que para cada partición da $\Pi_{V\in\pi}(|V|-1)!$ permutaciones diferentes y sumando sobre todas la particiones obtenemos

$$\sum_{\mathbf{V} \in P(n)} \prod_{v \in \mathbf{V}} (|v|-1)! = n!.$$

Claramente los momentos determinan los cumulantes, por lo que el inverso es cierto. ■

Esta prueba nos permite trabajar la biyección de Bercovici-Pata Λ a través de sus cumulantes. De hecho, encontramos una interpretación (que no se halló en la literatura) para los momentos de la distribución infinitamente divisible libre asociada a la distribución exponencial.

Proposición 4.6.4 *Sea μ una medida con cumulantes libres $k_r(\mu) = (r-1)!$ y sea $\Pi(n)$ el* *conjunto de permutaciones de n elementos. Los momentos*

$$m_n(\mu) = \# \left\{ s \in \Pi(n) : \forall a, b \ (\forall m, \ s^m(a) < b \ ) \Longrightarrow (\forall l, \ a < s^l(b)) \ \right\} \tag{4.23}$$

es decir, las permutaciones cuya factorización en permutaciones cíclicas no tiene intersecciones.

Demostración Un argumento idéntico al de la prueba de la proposición anterior sirve para este caso. La única diferencia es que ahora queremos contar solo las permutaciones cuyas factores cíclicos no se intersecten, esto corresponde a haber escogido inicialmente una partición que no se cruza (es claro que si tomamos dos bloques de una partición que no se cruza van a dar lugar a permutaciones cíclicas que no se intersectan). ■

Entonces, si μ es una medida con distribución exponencial $\Lambda(\mu)$ es una medida con momentos como en (4.23).

Finalmente, observemos que podemos reconocer la medida de Lévy como una medida μ con densidad de Lévy

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \ x > 0.$$

4.6.4 Interpretación de la Beta Simétrica $BS(1/2, 3/2)$

En esta subsección continuamos con el estudio de productos de variables aleatorias libres iniciado en la Subsección 3.7.9 y damos una interpretación de la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$ en términos del producto de las variables aleatorias estudiadas en las Subsecciones 1.4.1 y 1.4.2. Específicamente, mostraremos que $BS(1/2, 3/2)$ es la $*$-distribución del producto ab de las variables aleatorias $a = s^2$ y $b = u + u^*$ en relación libre, donde u es un elemento Haar unitario y s es un elemento semicircular.

Comenzamos con un resultado general sobre la combinatoria de los cumulantes libres de productos de variables aleatorias libres, cuya demostración se puede encontrar en [39, pp 227].

Proposición 4.6.5 *Sean $a, b \in (A, \tau)$ en relación libre con cumulantes libre k_π^a y k_π^b respectivamente, entonces*

$$k_n^{ab} = \sum_{\pi \in \pi} k_\pi^a k_{K(\pi)}^b. \tag{4.24}$$

Así, podemos obtener el siguiente resultado anunciado al final de la Subsección 3.7.9, que muestra que el producto de una variable aleatoria a con $*$-distribución Poisson Libre (1) con cualquier otra variable b, es infinitamente divisible en el sentido libre, siempre que a y b estén en relación libre. Este resultado puede obtenerse a partir de la Proposición 12.8 y las consideraciones en la página 224 en el libro [39, pp 227].

Teorema 4.6.1 *Sea ν una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con soporte compacto y sea μ una medida con distribución Poisson Libre* (1)*. Entonces*

i) $\nu \boxtimes \mu$ es infinitamente divisible en el sentido libre.

ii) Su transformada cumulante libre tiene la representación

$$\mathcal{C}_{\nu\boxtimes\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 \right) \nu(dt). \tag{4.25}$$

Demostración Sea $a, b \in (A, \tau)$, donde a tiene $*$-distribución ν y b tiene $*$-distribución Poisson Libre (1), entonces para $n \geq 1$ se tiene

$$k_n^b = 1,$$

y sustituyendo en (4.24) obtenemos

$$k_n^{ab} = \sum_{\pi \in \pi} k_\pi^a.$$

De la fórmula (4.2) tenemos

$$k_n^{ab} = m_n(a) = m_n(\nu). \tag{4.26}$$

Por la Proposición B.2.1, la sucesión $(k_n^{ab})_{n=0}^{\infty}$ es semi-positiva definida. En particular, $(k_n^{ab})_{n=0}^{\infty}$ es condicionalmente semi-positiva definida. De la Proposición 4.4.1 se tiene (i).

La representación (4.25) se obtiene de la siguiente forma

$$\mathcal{C}_{\nu\boxtimes\mu}(z) = \sum_{n=1} k_n^{ab} z^n = \sum_{n=1} m_n(\nu) z^n = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 \right) \nu(dt).$$

■

Finalmente estamos en posición de dar la interpretación de la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$. Este resultado no se encontró reportado en la literatura.

Proposición 4.6.6 *Sea $A_{0,1}$ la distribución arcoseno en $(-1,1)$ y μ la distribución Poisson Libre (1). Entonces $\mu \boxtimes A_{0,1}$ es la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$.*

Demostración La demostración se sigue trivialmente del teorema anterior y del hecho de que por construcción, la distribución beta simétrica $BS(1/2, 3/2)$ tiene terna característica $(0, 0, A_{0,1})$, como se prueba en la Subsección 3.7.7. ■

4.6.5 Poisson Libre Generalizada y Semicírculo

En esta subsección introducimos familias no encontradas en la literatura de medidas infinitamente divisibles en un sentido más general que el presentado en las secciones anteriores. Esto es, las medidas que obtenemos no son infinitamente divisibles en los reales sino en los complejos. La idea principal es trabajar con cumulantes que dan lugar a medidas sobre los complejos y estudiar lo que sería la biyección Λ de Bercovici-Pata para este caso.

Como motivación consideremos que μ es la distribución de Poisson libre y Y es una variable aleatoria (clásica) con distribución semicírculo estándar. Es fácil ver que Y^2 tiene distribución μ. Generalizamos este resultado obteniendo las familias p-Poisson libre y p-semicírculo, así como sus análogas en el sentido clásico. Además, veremos que los números conocidos como de Fuss-Catalán ([25]) aparecen como momentos de estas distribuciones.

Como vimos anteriormente todos los cumulantes de la distribución de Poisson clásica y libre son iguales. Siguiendo estas ideas a continuación introducimos dos familias de distribuciones relacionadas con estas distribuciones.

Definición 4.6.2 *1) La medida μ tiene distribución **p-Poisson libre**(λ) si todos los cumulantes clásicos múltiplos de p son iguales a λ y los demás son cero. Más formalmente*

$$c_s(\mu) = \begin{cases} \lambda & si \ s = pn \\ 0 & si \ p \ no \ divide \ a \ s \end{cases} \qquad s \geq 0. \tag{4.27}$$

2) La medida μ tiene distribución p-Poisson libre(λ) si todos los cumulantes libres múltiplos de

p son iguales a λ y los demás son cero. Más formalmente

$$k_s(\mu) = \begin{cases} \lambda & \text{si } s = pn \\ 0 & \text{si } p \text{ no divide a } s \end{cases} \quad s \geq 0. \tag{4.28}$$

De ahora en adelante nos restringiremos al caso $\lambda = 1$. Encontramos primero los momentos, la transformada cumulante libre y la transformada de Cauchy.

Proposición 4.6.7 *Sea μ una medida de probabilidad con distribución p-Poisson libre*(1).

i) Los momentos de μ están dados en términos de los números de Fuss-Catalán, es decir

$$m_s(\mu) = \begin{cases} \frac{\binom{(p+1)n}{n}}{pn+1} & \text{si } s = pn \\ 0 & \text{si } p \text{ no divide a } s \end{cases} \quad s \geq 0.$$

ii) La transformada de Cauchy G_μ satisface la ecuación

$$zG_\mu^{p+1} - zG_\mu + 1 = 0. \tag{4.29}$$

iii) La transformada cumulante libre de μ es

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \frac{z^p}{1 - z^p}. \tag{4.30}$$

Demostración i) El caso en que s no es múltiplo de k es trivial. Supongamos que $s = pn$ y observemos que la función $k_s(\mu)$ es la función indicadora en los múltiplos de p. Usando (4.9) tenemos que

$$k_\pi = \prod_{V \in \pi} k_{|V|}$$

no es otra cosa que la función indicadoras en las particiones cuyos bloques son múltiplos de p, los cuales son contadas en la Proposición A.1.3. Así obtenemos

$$m_s = m_{pn} = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in NC(pn)} \prod_{V \in \pi} k_{|V|} = \sum_{\pi \notin NC(k|pn)} 0 + \sum_{\pi \in NC(k|pn)} 1 = \frac{\binom{(p+1)n}{n}}{pn+1}.$$

De la expresión anterior vemos que los momentos crecen subexponencialmente y por lo tanto por la Proposición B.2.4, μ debe tener soporte acotado. Recordemos que para el caso en que

μ tiene soporte compacto la transformada cumulante libre puede ser expresada como serie de potencias de los cumulantes libre. Entonces

$$\mathcal{C}_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\mu) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^{pn} = (z^p + z^{2p} + ...) = (\frac{z^p}{1-z^p}),$$

lo cual prueba (iii). Finalmente probamos (ii). Usando (3.8) tenemos que

$$1 + (\frac{G(z)^p}{1 - G(z)^p}) = zG(z)$$

de donde la transformada de Cauchy G debe resolver la ecuación(4.29). ■

Resulta que la ecuación (4.29) sólo se puede resolver de forma explícita para los casos $p = 1$ y $p = 2$ dando

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{1}{2z}\left(z - \sqrt{z^2-4}\right) \qquad \text{si } p = 1 \\ G_2(z) &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}} L(z) + \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \frac{1}{L(z)}) \text{ si } p = 2 \end{aligned}$$

donde $L(z) = \frac{1}{z}(\sqrt{3}\sqrt{27z^4 - 4z^6} - 9z^2)^{1/3}$.

Sin embargo, usando la biyección de Bercovici-Pata podemos dar una mejor descripción de estas distribuciones. Sabemos que $\Lambda^{-1}(\mu)$ es la distribución cuyos cumulantes son $c_n(\Lambda^{-1}(\mu)) = k_n(\mu)$. Así, la función cumulante clásica de $\Lambda^{-1}(\mu)$ es

$$\log f_{\Lambda^{-1}(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{(n)!}. \tag{4.31}$$

A continuación demostramos que los casos $p = 1, 2$ son distribuciones infinitamente divisibles en el sentido libre.

Teorema 4.6.3 *Sea μ con distribución p-Poisson libre. Entonces μ es infinitamente divisible en el sentido libre para $p = 1, 2$.*

Demostración De (4.31) tenemos, para $p = 1$, la función cumulante clásica

$$\log f_{\Lambda^{-1}(\mu)}(z) = e^z - 1.$$

Esto nos dice que la función característica de μ tiene una representación de Lévy-Khintchine con terna característica (γ, ς) con $\gamma = 0$ y la medida de Lévy ς está acumulada en un punto. Es decir, $\Lambda^{-1}(\mu)$ es una Poisson clásica y por lo tanto μ es una Poisson libre.

Para $k = 2$

$$\log f_{\Lambda^{-1}(\mu)}(z) = \cosh(z) = (\frac{e^z - 1}{2}) + (\frac{e^{-z} - 1}{2}).$$

En este caso la función característica de μ tiene una representación de Lévy-Khintchine (γ, ς) con $\gamma = 0$ y ς acumulada en los puntos 1 y -1. Es decir, $\Lambda^{-1}(\mu)$ es la distribución de una variable aleatoria $Y = X_1 - X_2$ dondeX_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución Poisson(1).Por lo tanto, $\mu = \mu_1 \boxplus D_{-1}(\mu_1)$ donde μ_1 es una Poisson libre. ■

El caso general se puede tratar de la misma forma que $p = 1, 2$. La diferencia es que se tendrá una representación integral de Lévy-Khintchine pero con la "medida de Lévy" concentrada en las raíces p-ésimas de la unidad. Esto se sigue de la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{(kn)!} = \frac{e^{w_1 z} + e^{w_2 z} + ... + e^{w_p z}}{k} - 1 = \frac{(e^{w_1 z} - 1) + (e^{w_2 z} - 1) + ... + (e^{w_p z} - 1)}{k},$$

donde $w_1, w_2, \ldots, w_p$ son las p-ésimas raíces de las unidad.

Más aún, si $Z_1, Z_2, .., Z_k$ son variable aleatorias con distribución de Poisson clásica (1), entonces

$$Z = \sum_{i=1}^{k} w_i Z_i \tag{4.32}$$

tiene distribución p-Poisson clásica. Equivalentemente, si $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$, son medidas Poisson libre(1), entonces

$$\mu = D_{w_1}\mu_1 \boxplus D_{w_2}\mu_2 \boxplus D_{w_3}\mu_3 ... \boxplus D_{w_k}\mu_k$$

tiene distribución p-Poisson libre. Donde la convolución $\boxplus$ de medidas sobre $\mathbb{C}$ en la expresión anterior se entiende en el sentido de la Sección 1.3.

Observemos que para $p > 2$, la medidas p-Poisson libre y p-Poisson no tienen soporte en los reales, sino en los complejos. De hecho, pedimos que el primero y segundo cumulante sean cero, que para el caso real sólo se cumple para la distribución acumulada en cero.

Así, los momentos y cumulantes considerados, si bien no dan lugar a leyes infinitamente divisibles en $\mathbb{R}$, dan lugar a leyes infinitamente divisibles en los complejos. Recordemos la noción de variables aleatorias infinitamente divisible en $\mathbb{C}$, más generalmente tenemos.

Definición 4.6.4 *Sea μ una medida de probabilidad en $(\mathcal{H}, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ es la clase de los Boreleanos en $\mathcal{H}$. Decimos que μ es infinitamente divisible con respecto a la convolución $*$, si para todo entero positivo n, existe una medida de probabilidad μ_n en $\mathcal{B}$, tal que*

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \cdots * \mu_n}_{n\ veces}. \tag{4.33}$$

Una medida μ de probabilidad en $\mathbb{C}$ es infinitamente divisible si es la distribución de una variable aleatoria $Z = X + iY$ donde el vector (X, Y) es infinitamente divisibles en $\mathbb{R}^2$.

Así, es claro de (4.32) que la distribución p-Poisson clásica es infinitamente divisible en el sentido clásico. Por lo tanto la p-Poisson libre es $\boxplus$-infinitamente divisible en los complejos (en el sentido de la Sección 1.3).

Una observación importante es que la medida de Lévy asociada a la p-Poisson libre es exactamente la medida descrita como la $*$-distribución de una variable aleatoria no-conmutativa p-Haar unitaria en la Subsección 1.4.1.

En este mismo contexto, definimos la medida **p-semicírculo** como la distribución ξ con cumulantes

$$k_s(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = p+1 \\ 0 & \text{si } s \neq p+1 \end{cases} \quad s \geq 0. \tag{4.34}$$

El caso $p = 1$ es la distribución del semicírculo.

Proposición 4.6.8 *Sea ξ una medida p-semicírculo.*

i) Los momentos de ξ están dados en términos de los números de Fuss-Catalán, es decir

$$m_s(\xi) = \begin{cases} \frac{\binom{(p+1)n}{n}}{pn+1} & si\ s = (p+1)n \\ 0 & si\ p+1\ no\ divide\ a\ s \end{cases} \quad s \geq 0.$$

ii) La transformada de Cauchy G de ξ cumple la ecuación

$$1 + G^{p+1} - zG = 0. \tag{4.35}$$

iii) La transformada cumulante libre de ξ es

$$\mathcal{C}(z) = z^{p+1}. \tag{4.36}$$

Demostración Procederemos como en la prueba de la Proposición 4.6.7.

i) El caso en que s no es múltiplo de $p+1$ es trivial. Supongamos que $s = (p+1)n$. Usando (4.9) tenemos que

$$k_\pi = \prod_{V \in \pi} k_{|V|}$$

es la función indicadora en las particiones cuyos bloques tienen tamaño $p+1$. Estos son contadas en la Proposición A.1.4. Así obtenemos

$$m_s = m_{(p+1)n} = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in NC(pn)} \prod_{V \in \pi} k_{|V|} = \frac{\binom{(p+1)n}{n}}{pn+1}.$$

De la expresión anterior vemos que los momentos crecen subexponencialmente y por lo tanto por la Proposición B.2.4, ξ debe tener soporte acotado. Entonces, nuevamente la transformada cumulante libre puede ser expresada como serie de potencias de los cumulantes libres. Así

$$\mathcal{C}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(\xi) z^n = z^{p+1}.$$

Finalmente probamos (ii). Usando (3.8) tenemos que

$$1 + G(z)^p = zG(z)$$

que tiene mucha similitud con (4.30). ■

De nuevo podemos resolver explícitamente para $p = 1$ y $p = 2$, obteniendo

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{1}{2z}\left(z - \sqrt{z^2 - 4}\right) \qquad \text{si } p = 1 \\ G_2(z) &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}} L(z) + \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \frac{1}{L(z)}) \text{ si } p = 2 \end{aligned}$$

donde $L(z) = \frac{1}{z}(\sqrt{3}\sqrt{27z^3 - 4z^4} - 9z^2)^{1/3}$. Observando la gran similitud con el caso de la p-

Poisson libre. Otra importante observación es que si X tiene es variable aleatoria (clásica) con distribución p-Poisson libre μ y Y es variable aleatoria (clásica) con distribución p-semicírculo libre ξ, entonces

$$m_{(p+1)n}(\xi) = m_{pn}(\mu),$$

lo que prueba que la distribución de Y^{p+1} es igual a la de X^p.

Queremos saber si las distribuciones ξ son infinitamente $\boxplus-$divisibles.

Proposición 4.6.9 *Sea ξ una medida en $\mathbb{C}$ con distribución p-semicírculo libre. Entonces ξ es $\boxplus$-infinitamente divisible sí y sólo si $p = 1$.*

Demostración Sabemos que $\Lambda(\xi)$ es la distribución cuyos cumulantes son $c_n(\Lambda(\xi)) = \alpha_n(\xi)$. De donde la función cumulante clásica es

$$\log f_\xi(z) = \frac{z^{p+1}}{p!},$$

que sólo es infinitamente divisibles en los casos $p = 1$ que es una distribución Gaussiana, por lo que usando la biyección Λ, se tiene el resultado. ■

Apéndice A

Particiones que No se Cruzan.

Este apéndice se incluye de manera especial para facilitar la lectura de esta tesis. El principal objeto de estudio es el conjunto de las particiones, al que damos un estructura de látiz. Enfocamos nuestra atención en el subconjunto de particiones que no se cruzan. Se presentan las herramientas y conceptos que se usan en el enfoque combinatorio para divisibilidad infinita del Capítulo 4: algunos resultados de conteo de particiones, el complemento de Kreweras para particiones que no se cruzan, la inversión de Möbius, entre otros.

Para el tema de particiones en general sugerimos el libro de Aigner [1], mientras que para el tema de particiones que no se cruzan el libro reciente de Nica y Speicher [39].

Por completés y analogía con el Capítulo 2, relacionado con el enfoque analítico del Capítulo 3, presentamos demostraciones de algunos resultados.

A.1 Particiones y Particiones que no se cruzan

En esta sección presentamos los conjuntos **P(n)** de **particiones** y **NC(n)** de **particiones que no se cruzan**, así como resultados de conteo que se utilizan en el Capítulo 4. Las demostraciones y resultados sobre el conjunto $P(n)$ no se detallan pues son bien conocidos. Sin embargo, hacemos demostraciones detalladas para los resultados sobre $NC(n)$.

Definición A.1.1 *Sea S un conjunto totalmente ordenado.*

(1) Decimos que $\pi = \{V_1, ..., V_r\}$ es una ***partición*** *del conjunto S si y sólo si los V_i $(1 \leq i \leq r)$ son subconjuntos no vacíos de S, ajenos por pares tales que $V_1 \cup V_2 ... \cup V_r = S$.*

*Llamamos a $V_1, V_2, .., V_r$ los **bloques** de π. El número de bloques de π se denota como $|\pi|$.*

(2) El conjunto de todas las particiones de S se denota como $P(S)$. Cuando $S = \{1, ..., n\}$, entonces hablaremos de $P(n)$.

*(3) Una partición $\pi = \{V_1, ..., V_r\}$ se dice que **se cruza** si existen V_i, V_j con $j \neq i$ y $a < b < c < d$ tales que $a, c \in V_i$ y $b, c \in V_j$.*

*(4) El conjunto de particiones que **no se cruzan** se denotará $NC(S)$. Cuando $S = \{1, ..., n\}$ entonces hablaremos de $NC(n)$.*

Proposición A.1.1 *Sea n un entero positivo y sean $r_1, r_2, ...r_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $r_1 + 2r_2 ... + nr_n = n$. El número de particiones de π en $P(n)$ que tienen r_1 bloques con 1 elemento, r_2 bloques con 2 elementos, ..., r_n bloques con n elementos es igual a*

$$\frac{n!}{\prod_{i=0}^{n} r_i! \prod_{i=0}^{n} i!^{r_i}}.$$

Demostración Podemos dan un orden arbitrario a los bloques $B_1, B_2, B_3, ...B_k$, con tamaños $b_1, b_2, ...b_k$. respectivamente. En cada bloque ordenamos sus elementos. Para hacer una partición tenemos que poner b_1 elementos en B_1, b_2 en B_2, ...,b_n elementos en B_n, es decir, escoger b_1 elementos del total n, después b_2 de los $n - b_1$ que quedan, etc. Esto es

$$\binom{n}{b_1}\binom{n-b_1}{b_2}\binom{n-b_1-b_2}{b_3}\cdots\binom{n-b_1-b_2}{b_n} = \frac{n!}{b_1!b_2!b_3!...b_n!} = \frac{n!}{1!^{r_1}2!^{r_2}...(n!)^{r_n}}.$$

La última igualdad es sólo reordenar los términos iguales. Sin embargo bloques del mismo tamaño dan lugar a repeticiones de la misma partición, entonces tenemos que dividir entre $r_i!$ por cada tipo de bloques. De aquí se obtiene el resultado al dividir entre $r_1!r_2! \cdots r_n!$. ■

Corolario A.1.2 *El número de particiones por pares del conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ es $(2n)!! = \dfrac{2n!}{2^n n!}$.*

A continuación presentamos resultados análogos para las particiones que no se cruzan.

Proposición A.1.2 *Sea n un entero positivo y sean $r_1, r_2, ...r_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $r_1 + 2r_2 ... + nr_n = n$. El número de particiones de π en $NC(n)$ que tienen r_1 bloques con 1 elemento, r_2*

bloques con 2 elementos, ... , r_n bloques con n elementos es igual a

$$\frac{n!}{(n+1-\sum_{i=0}^{n} r_i)!\prod_{i=0}^{n} r_i!}. \tag{A.1}$$

Demostración Esta prueba se dividirá en 3 partes, primero resolvemos el problema para el caso en que los bloques son distinguibles, después hacemos una biyección para calcular un ejemplo fácil y finalmente quitamos las etiquetas.

a) Supongamos que las partes son distinguibles. Queremos mostrar que el número de particiones con m bloques de tamaños dados a_i sólo dependen de m.

a.1) Hagamos una biyección entre las particiones de la forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_m)$ y las particiones de la forma $(a_1+1, a_2-1, a_3, ..., a_m)$. Donde a_i indica el tamaño del bloque A_i.

Supongamos que $1 \in A_1$, y que A_1 no cubre a A_2. Esto es, si $a \in A_1$ y $b \in A_2$ entonces $a < b$. Sea b_1 el más chico, b_2 el segundo más chico y b_k el más grande de los elementos de A_2. A continuación describimos la biyección:

Tenemos cuatro tipo de bloques, haremos modificaciones de los bloques de la siguiente manera.

i) A_1 será cambiado por $A_1 \cup \{b_k + b_2 - b_1\}$ y A_2 por B_1/b_1.

ii) Si un bloque esta contenido en el intervalo $[1,\ k] \in A_1$, o $[b_2, n]$ entonces ese bloque se deja igual.

iii) Si un bloque esta contenido en intervalo $[b_1,\ b_2]$. Cambiamos los elementos s del bloque por $s - b_1 + k$.

iv) Finalmente si un bloque tiene $x_1, x_2, ..x_k$ en el intervalo $[b_k, b_k + b_1 - 2]$ entonces cambiaremos estos los elementos x_i por $x_i + b_2 - b_1$.

Obsérvese que esto es una biyección pues podemos invertir los pasos.

a.2) En general si $1 \notin A_1$ la biyección se hará de la misma manera, usando el siguiente resultado: Existe una única rotación D tal que A_1 y A_2 son tales que $1 \in A_1$ y A_1 no cubre a A_2.

Entonces la biyección será aplicar la única rotación D después la biyección como en el caso anterior y finalmente aplicar la rotación inversa D^{-1}.

a.3) Observemos que en (a.1) los conjuntos A_1 y A_2 se pueden escoger arbitrariamente. Así, repitiendo (a.1) y (a.2) muchas veces, a partir de cualquier partición con k bloques se puede obtener una partición de la forma $(n-k+1, 1, 1, ...1, 1,)$.

b) Como se mostró en (a) se tiene una biyección entre las particiones con k bloques con tamaños dados y particiones de la forma $(n-k+1, 1, 1, ...1, 1,)$. Es fácil calcular el número de particiones de la forma $(n-k+1, 1, 1, ...1, 1)$ esto es simplemente

$$\frac{n!}{n-k!} = \frac{n!}{(n+1-\sum_{i=0}^{n} r_i)!}.$$

c) En el caso en que dos bloques del mismo tamaño no son distinguibles, simplemente debemos dividir por $\prod_{i=0}^{n} r_i!$ donde r_i es el número de bloques de tamaño de i.

El resultado se sigue de las observaciones anteriores. ■

Observemos que la fórmula (A.1) sólo depende de los r_i, por ejemplo existe el mismo número de particiones de la forma $4-4-2$ que de la forma $3-3-4$.

Corolario A.1.3 *El número de particiones por pares que no se cruzan del conjunto* $\{1, 2, ..., 2n\}$ *es igual al n-ésimo número de Catalán* $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

Demostración Esto es calcular el caso $r_2 = n$ ■

Corolario A.1.4 *Para* $1 < m \leq n$ *se tiene que*

$$\#\{\pi \in NC(n) \mid \pi \text{ tiene } m \text{ bloques}\} = \frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m-1}$$

Demostración Claramente queremos la siguiente suma

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k \\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{n!}{(n+1-\sum_{i=0}^{n} r_i)! \prod_{i=0}^{n} r_i!} &= \sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k \\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{n!}{(n+1-k)! \prod_{i=0}^{n} r_i!} \\
&= \binom{n}{k-1} \sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k \\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{(k-1)!}{\prod_{i=0}^{n} r_i!} \\
&= \binom{n}{k-1} \frac{1}{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

donde la suma de la última igualdad se sigue de la siguiente identidad

$$\sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k\\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} r_i!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!k!(n-k)!}. \tag{A.2}$$

Para probar que esta identidad es cierta basta ver que si

$$D(k,n) = \sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k\\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} r_i!}.$$

Entonces

$$D(k,n) = \sum_{\substack{r_1+r_2+..r_n=k\\ r_1+2r_2+..nr_n=n}} \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n} r_i!} = \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{1}{r_1} \sum_{\substack{r_2+..r_n=k-r_1\\ r_2+2r_3+...+(n-1)r_n=n-k}} \frac{1}{\prod\limits_{i=2}^{n} r_i!} = \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{1}{r_1} D(r_1,k).$$

Esta recursión claramente define a $D(k,n)$ si se pide $D(1,n)=1/n$ y haciendo cálculos sencillos se puede ver que la parte derecha de (A.2) también cumple con la recursión. ■

Proposición A.1.3 *Sea* $\mathrm{NC}(k \mid nk)$ *el conjunto de las particiones de* $\{1,2,3,...nk\}$ *cuyos bloques son de tamaño un múltiplo de* k*. El número de particiones en* $\mathrm{NC}(k \mid nk)$ *es*

$$\frac{\binom{(k+1)n}{n}}{kn+1}.$$

En particular $\mathrm{NC}(1 \mid n) = C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

Demostración Primero calculemos cual es el número de particiones con m bloques todos con tamaño un múltiplo de k. Esto es

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{r_1+r_2+\ldots+r_n=m\\ r_1+2r_2+\ldots+nr_n=n}} \frac{(nk)!}{(nk+1-\sum\limits_{i=0}^{n} r_i)!\prod\limits_{i=0}^{n} r_i!} &= \sum_{\substack{r_1+r_2+\ldots+r_n=m\\ r_1+2r_2+\ldots+nr_n=n}} \frac{(nk)!}{(nk+1-m)!\prod\limits_{i=0}^{n} r_i!} \\
&= \sum_{\substack{r_1+r_2+\ldots+r_n=m\\ r_1+2r_2+\ldots+nr_n=n}} \frac{(nk)!}{(nk+1-m)!\prod\limits_{i=0}^{n} r_i!} \\
&= \frac{(nk)!}{(nk+1-m)!} \sum_{\substack{r_1+r_2+\ldots+r_n=m\\ r_1+2r_2+\ldots+nr_n=n}} \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n} r_i!} \\
&= \frac{(nk)!}{(nk+1-m)!} \frac{(n-1)!}{(m-1)!m!(n-m)!} \\
&= \frac{1}{n}\binom{nk}{m-1}\binom{n}{m}
\end{aligned}
$$

Finalmente es bien conocido que

$$
\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{nk}{m-1}\binom{n}{m} = \frac{\binom{(k+1)n}{n}}{nk+1}
$$

de donde se obtiene el resultado. ■

Corolario A.1.5 *El número de particiones de $(k+1)n$ elementos en bloques de tamaño k es igual al número de particiones de kn elementos en múltiplos de k.*

Sería interesante contar con una prueba biyectiva para este resultado, la cual desconocemos.

A.2 NC(n) y P(n) como Látices

Será muy útil dotar a los conjuntos $P(n)$ y $NC(n)$ de una estructura de látiz. Recordemos que una látiz es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \preceq)$, en donde cada par de elementos (x, y) tiene un único supremo (mínima cota superior con respecto a $\preceq$) y un único ínfimo (máxima cota inferior con respecto a $\preceq$). Más formalmente

Definición A.2.1 *Sea $(L, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado* *i) Sean $\pi, \sigma \in L$, Si el conjunto $U = \{\tau \in P | \tau \succeq \pi, \tau \succeq \sigma\}$ es no vacío y tiene un mínimo τ_0, entonces τ_0 es el **supremo** de π y σ y se denota por $\pi \vee \sigma$*

*ii) Sean $\pi, \sigma \in P$, Si el conjunto $L = \{\rho \in P | \rho \preceq \pi, \rho \preceq \sigma\}$ es no vacío y tiene un máximo ρ_0, entonces ρ_0 es el **ínfimo** de π y σ y se denota por $\pi \wedge \sigma$*

*iii) Si para cualesquiera $\pi, \sigma \in P$, existen $\pi \vee \sigma$ y $\pi \wedge \sigma$, entonces decimos que P es una **látiz**.*

A veces nos referiremos a la Látiz $(L, \preceq)$ solamente por L y a un conjunto parcialmente ordenado $(P, \preceq)$ solamente por P.

Proposición A.2.1 *Sea $(P, \preceq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado. Si $(P, \preceq)$ tiene un elemento máximo 1_P, y cualesquiera dos elementos de $(P, \preceq)$ tienen ínfimo, entonces P es una látiz.*

Demostración Si cualesquiera dos elementos de P tienen ínfimo entonces se sigue por inducción en k que para cualquier familia finita de elementos en P, existe $\rho_0 = \rho_1 \wedge \rho_2 \wedge ... \wedge \rho_k$. Sean $\pi, \sigma \in P$, entonces $U = \{\tau \in P | \tau \geq \sigma, \sigma\tau \geq \pi\}$ es no vacío ($1_P \in U$), entonces podemos listar los elementos de $U = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k\}$. Entonces se verifica que si $\rho_0 = \rho_1 \wedge \rho_2 \wedge ... \wedge \rho_k$, entonces $\pi \vee \sigma = \rho_0$. ■

A.2.1 La Látiz P(n) y la Sublátiz NC(n)

Definición A.2.2 *Sean $\pi, \sigma \in P(n)$ dos particiones que no se cruzan. Definimos el orden parcial $(P(n), \leq)$ de la siguiente forma: $\pi \leq \sigma$ si y sólo si todo bloque $v \in \pi$ está contenido completamente en un bloque $w \in \sigma$.*

Proposición A.2.2 *El orden parcial $(P(n), \leq)$ induce una estructura de látiz en $P(n)$.*

Demostración Como $1_n \in P(n)$ es el máximo respecto al orden $(P(n), \leq)$, por la proposición anterior basta ver que si $\pi, \sigma \in P(n)$, entonces existe $\pi \wedge \sigma \in P(n)$. Si $\sigma = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$, $\pi = \{W_1, W_2, ..., W_l\}$, observemos que

$$\eta = \{V_i \cap W_j | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l, V_i \cap W_j \neq \varnothing\} \in NC(n)$$

Claramente η es menor que σ y π (respecto al orden $(P(n), \leq)$) y es la partición más grande que lo cumple. ■

Definición A.2.3 *Sean $\pi, \sigma \in NC(n)$ dos particiones que no se cruzan. Definimos el orden parcial $(NC(n), \leq)$ de la siguiente forma: $\pi \leq \sigma$ si y sólo si todo bloque $v \in \pi$ está contenido completamente en un bloque $w \in \sigma$.*

Proposición A.2.3 *El orden parcial $((NC(n), \leq))$ induce una estructura de látiz en $NC(n)$.*

Demostración Por la Proposición A.2.1 basta ver que si $\pi, \sigma \in NC(n)$ entonces $\pi \wedge \sigma \in NC(n)$, pero esto es claro ya que cualquier η tal que $\eta \leq \sigma$ es también una partición que no se cruza. ■

A.2.2 Complemento de Kreweras

Resulta que $NC(n)$ tiene una propiedad de auto-dualidad. Más aún, existe un anti-isomorfismo $K : NC(n) \to NC(n)$ llamado el complemento de Kreweras.

Definición A.2.4 *La función complemento $K : NC(n) \to NC(n)$ se define de la siguiente manera. Consideramos elementos adicionales $\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n}$ y los intercalamos de la siguiente manera*

$$1\overline{1}2\overline{2}...n\overline{n}.$$

*Sea $\pi \in NC(n)$ entonces su **Complemento de Kreweras** $K(\pi) \in NC(\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n}) \cong NC(n)$ es el elemento más grande de los $\sigma \in NC(\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n})$ con la propiedad que*

$$\pi \cup \sigma \in NC(1, \overline{1}, ..., n, \overline{n}).$$

Ejemplo A.2.5 *Sea*

$$\pi = \{(1, 2, 7), (3), (4, 6), (5), (8)\} \in NC(8)$$

entonces

$$K(\pi) = \{(1), (2, 3, 6), (4, 5), (7, 8)\}.$$

A continuación enunciamos algunas de las propiedades del complemento de Kreweras.

Proposición A.2.4 *Sea $K : NC(n) \to NC(n)$ la función complemento de Kreweras. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

i) Sea $\pi \in NC(n)$ entonces $K^2(\pi)$ es una permutación cíclica de π, es decir, si $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$, entonces $K^2(\pi) = \{\sigma(V_1), \sigma(V_2), ..., \sigma(V_k)\}$, donde $\sigma(V_i) = \{\sigma(i) | i \in V_i\}$ y $\sigma = (12...n)^m \in S_n$ para algún $m \leq n$. En particular, $K^2(\pi)$ tiene la misma estructura de bloques que π.

ii) K^{2n} es la identidad, en consecuencia, K es una biyección.

iii) K es un anti-isomorfismo, es decir, si $\pi, \sigma \in NC(n), \pi \leq \sigma$, entonces $K(\pi) \geq K(\sigma)$.

iv) $|\pi| + |K(\pi)| = n + 1$.

A.2.3 Factorización en Bloques

La última propiedad que necesitamos para un buen entendimiento de la combinatoria en las particiones que no se cruzan se conoce como factorización canónica en bloques de los intervalos. Usaremos la función complemento de Kreweras para entender esta factorización.

Definición A.2.6 *Sean $\pi, \sigma \in NC(n)$, $\pi \leq \sigma$. Entonces*

$$[\pi, \sigma] = \{\tau \in NC(n) | \pi \leq \tau \leq \sigma\}.$$

Definición A.2.7 *Sean $P_1, P_2, ..., P_n$ conjuntos parcialmente ordenados. Entonces el producto de órdenes parciales de $P_1, P_2, ..., P_n$ en $P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$ está definido por*

$$(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n) \leq (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \iff \pi_i \leq \sigma_i, \ \forall \ i = 1, 2, ..., n.$$

Proposición A.2.5 *Sean $\pi, \sigma \in NC(n)$, $\pi \leq \sigma$. Entonces existen enteros $k_1, k_2, ..., k_n$ tales que*

$$[\pi, \sigma] \cong NC(1)^{k_1} \times NC(1)^{k_2} \times ... \times NC(1)^{k_n}.$$

*A esta factorización se le llama **factorización canónica** de $[\pi, \sigma]$.*

Demostración Observemos primero que

$$[\pi,\sigma]\cong\prod_{V\in\sigma}[\pi|_V,\sigma|_V]$$

Usando la biyección que preserva ordenes entre V y $\{1,2,...,|V|\}$ resulta que $[\pi|_V,\sigma|_V]\cong[\tau,1_{|V|}]$. Ahora, usando la función complemento de Kreweras, obtenemos que $[\tau,1_{|V|}]$ es anti-isomorfo a un intervalo de la forma $[0_{|V|},\rho]$ (donde $\rho=K(\tau)$). Finalmente

$$[0_{|V|},\rho]\cong\prod_{W\in\rho}[0_{|V|}|_W,\rho|_W]\cong\prod_{W\in\rho}NC(W)\cong\prod_{W\in\rho}NC(|W|)$$

de donde se sigue que $[\pi,\sigma]$ tiene la factorización deseada. ■

Ejemplo A.2.8 *Sean $\pi,\sigma\in NC(12)$, donde*

$$\begin{aligned}\pi &= \{(1,9)(2,5)(3)(4)(6)(7,8)(10)(11)(12)\}\ y\\ \sigma &= \{(1,6,9,12)(2,4,5)(3)(7,8)(10,11)\}.\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}[\pi,\sigma] &\cong [\{(1,9),(6),(12)\},1_{\{1,6,9,12\}}]\times[\{(2,5),(4)\},1_{\{2,4,5\}}]\\ &\quad\times[\{(3)\},1_{\{3\}}]\times[\{(7,8)\},1_{\{7,8\}}]\times[\{(10),(11)\},1_{\{10,11\}}]\\ &\cong [\{(1,3),(2),(4)\},1_4]\times[\{(1,3),(2)\},1_3]\times[1_1,1_1]\\ &\quad\times[1_2,1_2]\times[0_2,1_2].\end{aligned}$$

Aplicando el complemento de Kreweras obtenemos que

$$
\begin{aligned}
K(\{(1,3),(2),(4)\}) &= \{(1,2)(3,4)\} \\
&\Longrightarrow [\{(1,3),(2),(4)\},1_4] \cong [0_4,\{(1,2)(3,4)\}] \cong NC(2)^2 \\
K(\{(1,3),(2)\}) &= \{(1,2)(3)\} \\
&\Longrightarrow [\{(1,3),(2)\},1_3] \cong [0_3,\{(1,2)(3)\}] \cong NC(1) \times NC(2) \\
[1_1,1_1] &\cong NC(1) \\
[1_2,1_2] &\cong NC(1)^2 \\
[0_2,1_2] &\cong NC(2).
\end{aligned}
$$

Entonces, la factorización canónica de $[\pi,\sigma]$ *es*

$$[\pi,\sigma] \cong NC(1)^4 \times NC(2)^4.$$

A.3 Inversión de Möbius

La inversión de Möbius es bastante conocida en el marco de teoría de números, en donde se considera el conjunto de los enteros positivos dotado con el orden parcial dado por la divisibilidad. Sin embargo, los mismos resultados se pueden generalizar para cualquier conjunto parcialmente ordenado y látices. En esta sección estamos interesados en la inversión de Möbius para la látiz NC(n).

Advertimos que muchas pruebas de esta sección serán omitidas pues son resultados muy generales y conocidos. Una explicación más detallada sobre la inversión de Möbius se puede ver en [1] ó [46].

A.3.1 Convolución e Inversión de Möbius

Empecemos definiendo la convolución[1] en el marco de conjuntos parcialmente ordenados.

[1] No confundir con el concepto de convolución explicado en los capítulos 1 y 2 de esta tesis.

Definición A.3.1 *Sea P un conjunto parcialmente ordenado, y sea $P^{(2)} := \{(\pi, \sigma) : \pi, \sigma \in P, \pi \leq \sigma\}$*

Para $F, G : P^{(2)} \to \mathbb{C}$, su ***convolución*** *$F * G : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ es la función definida por:*

$$(F * G) := \sum_{\substack{\rho \in P \\ \pi \leq \rho \leq \sigma}} F(\pi, \sigma) G(\rho, \sigma).$$

Más aún, para funciones $f : P \to \mathbb{C}$ y funciones $G : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ consideremos la convolución $f * G : P \to \mathbb{C}$ definida por

$$(F * G) := \sum_{\substack{\rho \in P \\ \rho \leq \sigma}} F(\rho) G(\rho, \sigma).$$

Las convoluciones definidas arriba tienen las propiedad de asociatividad y de distributividad con respecto a tomar combinaciones lineales de funciones en $P^{(2)}$ o en P. Es decir,

$$\begin{aligned} (F * G) * H &= F * (G * H), \qquad (f * G) * H = f * (G * H) \\ (F + G) * H &= F * H + G * H, \qquad (f + g) * H = f * H + (g * H) \end{aligned}$$

para $F, G, H : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ y para $f, g, : P \to \mathbb{C}$. Además es fácil verificar que la función $\delta : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ definida por

$$d(\pi, \sigma) = \begin{cases} 1 & \pi = \sigma \\ 0 & \pi < \sigma \end{cases}$$

es la unidad con respecto a la convoluciones en la Definición A.3.1.

El siguiente resultado nos dice cuando una función tiene inversa con respecto a la convolución.

Proposición A.3.1 *Sea P un conjunto parcialmente ordenado finito. Consideremos la convolución para funciones en $P^{(2)}$ como en la Definición A.3.1. Una función $F : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ es invertible con respecto a la convolución si y sólo si $F(\pi, \pi) \neq 0$ para todo $\pi \in P$.*

Ahora podemos definir las funciones ζ y μ, las cuales son claves para la inversión de Möbius.

Definición A.3.2 *Sea P un conjunto parcialmente ordenado finito. La* ***función zeta*** *de P,*

$\zeta : P^{(2)} \to \mathbb{C}$ está definida por

$$\zeta(\pi, \sigma) = 1, \qquad \forall (\pi, \sigma) \in P^{(2)}$$

La inversa de ζ bajo la convolución es llamada la ***función de Möbius*** *de P, la cual denotaremos por μ.*

Notemos que la función de Möbius está bien definida ya que $\zeta(\pi, \pi) = 1 \neq 0$. Estamos ahora en condiciones de formular la primera versión del Teorema de Inversión de Möbius

Proposición A.3.2 *Sea P un conjunto parcialmente ordenado y sea μ la función de Möbius en P. Consideremos dos funciones $f, g : P \to C$. Entonces el siguiente enunciado*

$$f(\pi) = \sum_{\substack{\sigma \in P \\ \sigma \leq \pi}} g(\sigma) \qquad \textit{para todo } \tau \in P$$

es equivalente a

$$g(\pi) = \sum_{\substack{\sigma \in P \\ \sigma \leq \pi}} f(\sigma) \mu(\sigma, \pi)$$

La siguiente proposición muestra que para el caso en que se tiene una látiz se pueden dar versiones parciales del Teorema de Inversión de Möbius. Ésta versión será de mucha utilidad para probar propiedades de las particiones que no se cruzan.

Proposición A.3.3 *Sea L una látiz y sea μ la función de Möbius en L. Considera dos funciones $f, g : L \to C$ que se relacionan por la siguiente fórmula*

$$f(\tau) = \sum_{\substack{\pi \in P \\ \pi \leq \tau}} g(\pi) \qquad \textit{para todo } \tau \in P.$$

Entonces para todo $w, \tau \in P$, con $w \leq \tau$, se tiene la siguiente relación:

$$\sum_{\substack{\sigma \in P \\ w \leq \sigma \leq \tau}} f(\sigma) \mu(\sigma, \tau) = \sum_{\substack{\pi \in P \\ \pi \vee w \leq \tau}} g(\pi).$$

EL siguiente corolario es una consecuencia de la proposición anterior y es útil para calcular funciones de Möbius en casos concretos, en particular para la látiz $NC(n)$.

Proposición A.3.4 *Sea L una látiz y sea μ la función de Möbius en L. Para toda partición $\omega \neq 0_P$ se tiene*

$$\sum_{\substack{\pi \in P \\ \pi \vee w = 1_P}} f(\sigma)\mu(0_P, \pi) = 0.$$

Demostración Consideremos la función $g : P \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(\pi) = (0_P, \pi), \quad \pi \in P.$$

Ahora, sea $f = g * \zeta$, para cada $\tau \in P$ tenemos

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sum_{\substack{\pi \in P \\ \pi \leq \sigma}} g(\sigma) = \sum_{\substack{\pi \in P \\ 0_P \leq \pi \leq \sigma}} \mu(0_P, \pi)\zeta(\pi, \sigma) \\ &= (\mu * \zeta)(\pi, (0_P, \sigma)) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma = 0_P \\ 0 \text{ si } \sigma \neq 0_P \end{cases}. \end{aligned}$$

■

A.3.2 La Función de Möbius en NC(n)

Calcular la función de Möbius en $NC(n)$ explícitamente permite dar fórmulas explícitas para cumulantes y momentos. El siguiente hecho junto con la factorización canónica en intervalos vista en la sección anterior simplificará los cálculos.

Proposición A.3.5 *i) Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados y supóngase que $\Phi : P \to Q$ es un isomorfismo de órdenes. Entonces $\mu_Q(\Phi(\pi), \Phi(\sigma)) = \mu_P(\pi, \sigma)$ para toda π, σ tales que $\pi \leq \sigma$.*

ii) Sean $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2), ..., (P_k, \leq_k)$ conjuntos parcialmente ordenados. Consideremos el producto directo $P = P_1 \times P_2 \times ... \times P_k$ (con orden parcial descrito en la Definición A.2.7). Entonces para $\pi_i \leq_i \sigma_i$ en P_i se tiene

$$\mu_P((\pi_1, ..., \pi_k), (\sigma_1, ..., \sigma_k)) = \mu_P((\pi_1, \sigma_1)) \cdots \mu_P((\pi_k, \sigma_k))).$$

Para cada $n \geq 1$ denotaremos la función de Möbius en $NC(n)$ por μ_n y $s_n := \mu_n(0_n, 1_n)$ donde 0_n y 1_n son el máximo y el mínimo de $NC(n)$, respectivamente. Dada la factorización hecha en la sección anterior, los valores de las funciones de Möbius en las látices $NC(n)$ estarán completamente determinadas por los valores de s_n. En efecto, sea $\pi \leq \sigma \in NC(n)$ y supóngase que el intervalo $[\pi, \sigma]$ tiene la factorización canónica

$$[\pi, \sigma] = NC(1)^{k_1} \times NC(2)^{k_2} \times \cdots \times NC(n)^{k_n},$$

entonces de la Proposición A.3.5 tenemos que

$$\mu_n(\pi, \sigma) = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n},$$

entonces basta calcular s_n. Resulta que la fórmula general está relacionada con los Números de Catalán; ver [39] para una demostración.

Proposición A.3.6 *Para cada* $n \geq 1$, *se tiene*

$$s_n = \mu_n(0_n, 1_n) = (-1)^{n-1} C_{n-1}.$$

Apéndice B

Sucesiones y Matrices Positivas Definidas

En este apéndice recopilamos los resultados principales sobre los tres problemas clásicos de momentos (Hamburger, Stieltjes y Haussdorff) y su relación con matrices y sucesiones positivas definidas. Estos resultados se ocupan en los Capítulos 3 y 4. Para un estudio completo de los resultados aquí presentados recomendamos [2], [27] ó [28].

B.1 Matrices Positivas Definidas

Hacemos un pequeño resumen de los resultados para matrices positivas definidas.

Definición B.1.1 *La matriz Hermitiana $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ es* ***positiva definida*** *si y sólo para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ se cumple*

$$z^* M z > 0. \tag{B.1}$$

Si en lugar de (B.1) sólo se cumple

$$z^* M z \geq 0$$

diremos que la matriz es ***semi-positiva definida****.*

Nótese que en esta definición implícitamente usamos que $z^* M z \in \mathbb{R}$ para cualquier matriz Hermitiana M.

En el caso de una matriz A de dimensión infinita decimos que es (semi) positiva definida las submatrices cuadradas si superiores son (semi) positivas definidas.

En la siguiente proposición presentamos algunas definiciones equivalentes de matriz positiva definida. Para una prueba se puede ver [27].

Proposición B.1.1 *Sea $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ una matriz Hermitiana. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1) La matriz M es positiva definida.

2) Todos los valores propios λ_i de M son positivos.

3) La forma sesquilineal $\langle x, y\rangle := x^*My$ define un producto interno en $\mathbb{C}^n$.

4) Todas las submatrices en la esquina superior derecha tienen determinante positivo. Es decir, si $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ y definimos, para $t = 1, ..., n$, las matrices de tamaño $t \times t$, como $M_t = (m_{ij})_{i,j=1}^t$, entonces $\det(M_1) > 0$, $\det(M_2) > 0, ..., \det(M_n = M) > 0$.

5) Existe una matriz positiva definida B tal que $B^2 = M$.

Observación B.1.2 *El inciso 4) se conoce como el criterio de Sylvester. Una forma equivalente de este criterio es simplemente pedir que exista alguna sucesión de n menores anidados positivos. El criterio de Sylvester no se aplica para matrices semi-positivas definidas. Claramente si M es una matriz de $n \times n$ con $n^2 - 1$ ceros y un -1 en la esquina inferior cumple que $\det(M_1) \geq 0$, $\det(M_2) \geq 0, ..., \det(M_n = M) \geq 0$ y no es semi-positiva definida. Para matrices semi-positivas definidas todos los menores deben de ser no negativos.*

Las siguientes son propiedades básicas de las matrices positivas definidas.

Proposición B.1.2 *Sean $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ y $N = (n_{ij})_{i,j=1}^n$ matrices Hermitianas positivas definidas.*

1) Si r es un real positivo entonces rM también es positiva definida.

2) La suma $M + N$ y los productos MNM y NMN también son positivos definidas. Si $MN = NM$, entonces MN también es positiva definida.

3) Sea $M = (m_{ij}) > 0$ entonces las entradas m_{ii} son positivas. Como consecuencia $tr(M) > 0$. Más aún

$$|m_{ij}| \leq \frac{m_{ii} + m_{jj}}{2} < \sqrt{m_{ii}m_{kk}}$$

4) El producto de Hadamard $M \circ N = H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas $(h_{ij})_{i,j=1}^n = (m_{ij}n_{ij})_{i,j=1}^n$ es positivo definido.

Una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ se llama de **Hankel** si $a_{i,j} = a_{k,l}$ siempre que $i + j = k + l$. Una matriz de Hankel está determinada por sus elementos de la diagonal, así también será denotada por $A = (a_{ii})_{i=0}^n$.

Las matrices positivas definidas están asociados a sucesiones positivas definidas y problemas de momentos como veremos en la siguiente sección.

B.2 Sucesiones Semi-Positivas Definidas

Decimos que una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es **semi-positiva definida** si para todo $r = 0, 1, 2, ...$ y para todo $z_0, ..., z_r \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\sum_{i,j=0}^{r} z_i \overline{z_j} a_{i+j} \geq 0 \tag{B.2}$$

Si $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de números complejos, entonces $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ es semi-positiva definida si y solo si la matriz de Hankel infinita $A = (a_{nn} = a_n)_{n=0}^\infty$ es semi-positiva definida. En este caso escribimos $\{a_n\}_{n=0}^\infty \geq 0(+)$, estas sucesiones son muy importantes en probabilidad por su conexión con los problemas de momentos de Hamburger, Stieltjes y Haussdorff. El siguiente teorema de Hamburger da una representación para las sucesiones semi-positivas definidas.

Teorema B.2.1 (Hamburguer) *Sea $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ con $a_0 = 1$ y $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Entonces $\{a_n\}_{n=0}^\infty \geq 0(+)$ si y solo si*

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx), \tag{B.3}$$

para $n = 0, 1, 2...$ y μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$.

En general, dada una sucesión de momentos $\{m_n\}_{n=0}^\infty$, la medida μ en la representación (B.3) no es única. Sin embargo, si existen constantes C y D tales que $|a_n| < CD^n(n)!$ entonces existe una única medida μ que cumple con esta representación. (Ver [41])

Las siguientes son algunas de las propiedades fundamentales de las sucesiones positivas definidas que nos permiten asumir sin pérdida de generalidad que $a_0 = 1$ y $a_n \in \mathbb{R}$. Algunas de estas propiedades son consecuencias de resultados para matrices positivas definidas sin embargo las pruebas se reducen para matrices de Hankel.

Teorema B.2.2 *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$. *Entonces*

i) Los términos pares $a_{2n} \geq 0$*;*

ii) Todos los $a_n \in \mathbb{R}$ *;*

iii) $a_{2m} + a_{2n} \geq 2a_{m+n}$ *para todo* $m, n \geq 0$*;*

iv) $a_{2m}a_{2n} \geq (a_{m+n})^2$ *para todo* $m, n \geq 0$*;*

v) Si $a_0 = 0$*, entonces* $a_n = 0$ *para todo* $n = 1, 2, 3, ...$*;*

vi) Si $a_{2N} = 0$*,* $N \geq 0$ *entonces* $a_n = 0$ *para todo* $n = 1, 2, 3, ...$*;*

vii) Si $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$*,entonces* $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ *y* $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ *;*

viii) Si $a_0a_2 = a_1^2$*, entonces* $a_0^{n-1}a_n = a_1^n$ *para todo* $n = 1, 2, 3, ...$

Demostración i) Este hecho puede ser probado utilizando (ii) y (B.3), sin embargo aquí damos una prueba directa utilizando (B.2), tomando $z_m = 1$ y $z_i = 0$ siempre que $i \neq m$

$$\begin{aligned} (z_m)^2 a_{2m} &\geq 0. \\ a_{2m} &\geq 0 \end{aligned}$$

ii) Tomamos $a_0 = 1, a_n = 1$,por lo que $a_0 + 2a_n + a_{2n} \in \mathbb{R}$,como $a_0 \geq 0$ y $a_{2n} \geq 0$, tenemos que $a_0 + a_{2n} \in \mathbb{R}$, entonces $a_{m+n} \in \mathbb{R}$

iii) Tomando $z_m = -1, z_n = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} (z_m)^2 a_{2m} + \overline{z}_n z_m a_{m+n} + z_n \overline{z}_m a_{m+n} + (z_n)^2 a_{2n} &\geq 0 \\ a_{2m} - 2a_{m+n} + a_{2n} &\geq 0 \\ a_{2m} + a_{2n} &\geq 2a_{m+n}. \end{aligned}$$

iv) Si $a_{m+n} = 0$ la desigualdad es trivial,Si $a_{2m} = 0$ y $a_{2n} = 0$, por la desigualdad anterior, $a_{m+n} = 0$ también. Entonces podemos suponer sin perdida de generalidad que $a_{2m} > 0$. Si tomamos $z_m = -1$, $z_n = a_{2m}/a_{m+n}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
(z_m)^2 a_{2m} + \bar{z}_n z_m a_{m+n} + z_n \bar{z}_m a_{m+n} + a_{2n} &\geq 0 \\
a_{2m} - 2\frac{a_{2m}}{a_{m+n}} k + \left(\frac{a_{2m}}{a_{m+n}}\right)^2 a_{2n} &\geq 0 \\
a_{2m} - a_{2m} + \left(\frac{a_{2m}}{a_{m+n}}\right)^2 a_{2n} &\geq 0 \\
\left(\frac{a_{2m}}{a_{m+n}}\right)^2 a_{2n} &\geq a_{2m} \\
a_{2m} a_{2n} &\geq (a_{m+n})^2.
\end{aligned}$$

v) Utilizando iv) tenemos que si $a_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
a_0 a_{2n} &\geq (a_n)^2 \\
0 &\geq (a_n)^2
\end{aligned}$$

de donde $a_n = 0$. La prueba de (vi) es similar.

vii) Supongamos que $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$. Entonces utilizando la representación dada por (B.3) $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx)$ y $b_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \nu(dx)$. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribuciones $\mu_X = \mu$ y $\mu_Y = \nu$. Entonces los momentos de la variable aleatoria $Z = XY$ están dados por

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu_Z(dx) &= E[Z^n] = E[X^n]E[Y^n] = \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu_X(dx) \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu_Y(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx) \int_{-\infty}^{\infty} x^n \nu(dx) = a_n b_n.
\end{aligned}$$

De la misma forma los momentos de la variable aleatoria $W = X + Y$ están dados por $a_n + b_n$. Esto prueba que $\{a_n b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ pues tienen representación como en (B.3)

viii) Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, con $a_0 a_2 = a_1^2$, por vi) podemos suponer $a_0 = 1$ entonces sea X de tal forma que $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx) = E(X^n)$ calculando los primeros momentos de X tenemos

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu(dx) = a_0 a_2 = a_1^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \mu(dx)\right)^2 = E(X)^2$$

entonces $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0$ y X debe de ser una variable aleatoria constante. Así, $E(X^n) = E(X)^n$ y $a_0^{n-1} a_n = a_1^n$ para todo $n = 1, 2, 3...$ ■

Como una sucesión es positiva definida si y sólo si la matriz de Hankel es positiva definida, el criterio de Sylvester para matrices positivas debe cumplirse para la matrices de Hankel.

A continuación presentamos las versiones del problema de momentos de Stieltjes y Hausdorff, estos criterios clásicos dan una caracterización para el soporte de μ en términos de sus momentos.

Teorema B.2.3 *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, de tal forma que $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx)$ para alguna medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. Entonces*

i) El soporte de μ esta contenido en $[0, \infty)$ si y sólo si $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

ii) El soporte de μ esta contenido en $[-1, 1]$ si y sólo si $\{a_n - a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

iii) El soporte de μ esta contenido en $[0, 1]$ si y sólo si $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, $\{a_n - a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$ y $\{a_{n+1} - a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$

Finalmente presentamos un criterio en términos de los momentos para que una medida tenga soporte compacto. Antes recordamos que se dice que una sucesión **crece subexponencialmente** si existe una constante c tal que $|a_n| \leq c^n$.

Teorema B.2.4 *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \geq 0(+)$, de tal forma que $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx)$ para alguna medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$. Entonces el soporte de μ está acotado si y sólo si a_n crece subexponencialmente.*

Demostración Supongamos que el soporte de μ esta contenido en el intervalo $[R, -R]$. Entonces tenemos

$$|a_n| \leq \int_{-R}^{R} |x^n| \, \mu(dx) \leq R^n$$

pues μ es una medida de probabilidad.

El soporte de μ está acotado por $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}}$ nos dice los siguiente. Así, si $|a_n| \leq c^n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{c^{2n}} = c$$

■

Bibliografía

[1] Aigner, M. (1979). *Combinatorial Theory.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **234**, Springer-Verlag, Berlín.

[2] Akhiezer, N.I. (1965). *The Classical Moment Problem.* Oliver & Boyd, Edinburgh-London.

[3] Anshelevich, M. (2001). Partition dependant stochastic measures in q-deformed cumulants. *Documenta Mathematica* **6,** 343-384.

[4] Arnold, B. C. & R. A. Groeneveld (1980). Some properties of the arcsine distribution. *Journal of the American Statistical Association* **75,** 173-175.

[5] Barndorff-Nielsen, O. E. & S. Thorbjørnsen (2002). Self-decomposability and Lévy processes in free probability. *Bernoulli* **8,** 323-366.

[6] Barndorff-Nielsen, O. E. & S. Thorbjørnsen (2004). A connection between free and classical infinite divisibility. *Infinite Dimensional Anlysis, Quantum Probability and Related Topics* **7,** 573-590.

[7] Barndorff-Nielsen, O. E. & S. Thorbjørnsen (2006). Classical and free infinite divisibility and Lévy processes. In: *Quantum Independent Increment Processes II.* M. Schürmann and U. Franz (eds). Lecture Notes in Mathematics **1866**, Springer, Berlin.

[8] Benaych-Georges, F. (2005). Classical and free i.d. distributions and random matrices. *Annals of Probability* **33**, 1134-1170.

[9] Bercovici, H. & V. Pata (1999). Stable laws and domains of attraction in free probability theory. *Annals of Mathematics* **149**, 1023-1060. (con apéndice de P. Biane).

[10] Bercovici, H. & D. Voiculescu (1993). Free convolution of measures with unbounded supports. *Indiana Journal of Mathematics* **42**, 733-773.

[11] Biane, P. (1998). Representations of symmetric groups and free probability. *Advances in Mathematics* **138,** 126-181.

[12] Brualdi, R. A. (1991). *Introductory Combinatorics.* Tercera Edición. Elsevier, New York.

[13] Donoghue, W (1974). *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation.* Springer, New York.

[14] Feller, W. (1970). *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* **Vol. 1**. Tercera Edición revisada, John Wiley & Sons Inc.

[15] Ferguson, T. (1996). *A Course in Large Sample Theory.* Chapman & Hall, London.

[16] Flajolet, P & M. Noy (2000). Analytic combinatorics of chord diagrams. In: *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics.* D. Krob, A. A. Mikhalev and A. V. Mikhalev. Springer-Verlag, pp 191-201.

[17] Franz, U. & N. Muraki (2005). Markov property of monotone Lévy processes. In *Infinite Dimensional Harmonic Analysis III.* H. Heyer, T. Hirai, T. Kawazoe, K. Saito (eds). World Scientific, Singapore, pp 37-57.

[18] Gardner, M. (1976). Catalan numbers: An integer sequence that materializes in unexpected places. *Scientific American* **234**, 120-125.

[19] Gentle, J. E. (2004). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods.* Springer, New York.

[20] Gessel, I. (1992). Super ballot numbers. *Journal of Symbolic Computation* **14**, 179–194.

[21] Gnedenko, B. V. & A. N. Kolmogorov (1954). *Limit Distributions of Sums of Independent Random Variables.* Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Massachusetts.

[22] Gradshteyn, I. M. and M. Ryzhik (1994). Table of Integrals, Series and Products. Quinta Edición. *Academic Press*, London.

[23] Guionnet, A.(2008). *Random Matrices: Lectures on Macroscopic Asymptotics.* École dÈté des Probabilités de Saint-Flour XXXVI 2006, (Lecture Notes in Mathematics), Springer, New York.

[24] Hiai, F. & D. Petz (2000). *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy.* Mathemathical Surveys and Monographs **77,** American Mathematical Society, Providence.

[25] Hilton, P. & J. Pedersen (2001). Catalan Numbers, their Generalizations, and their Uses. *Math. Intelligencer* **13**, 64–75.

[26] Hora, A. & N. Obata (2007). *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs.* Series Theoretical and Mathematical Physics, XVIII, 371 Springer, New York.

[27] Horn, R. & C. Johnson (1975). *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge.

[28] Horn, R. (1969). Infinitely Divisible Positive Definite Sequences. *Transactions of the American Mathematical Society* **9**, 177-20.

[29] Kerov, S. V. (1993). Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem. *Functional Analysis and Applications* **27** , 104-117.

[30] Khorunzhy, A. M., B. A. Khoruzhenko & L. A. Pastur (1996). Asymptotic properties of large random matrices with independent entries. *Journal of Mathematical Physics.* **37**, 5033-5060.

[31] Kingman, J.F.C. (1963). Random walks with spherical symmetry *Acta Mathematica* **109** 11-53.

[32] Ledoux, M. (2004). Differential operators and spectral distributions of invariant ensembles from the classical orthogonal polynomials. The continuous case. *Electronic Journal of Probability* **9**, 177-208.

[33] Lenher, F. (2002). Free cumulants and enumeration of connected partitions. *European Journal of Combinatorics* **23,** 1025-1031.

[34] Maaseen, H. (1992). Addition of freely independent random variables. *Journal of Functional Analysis* **106** 409-438.

[35] Marchenko, V. & L. Pastur (1967). The distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices. *Mathematics Sbornik* **72**, 507-536.

[36] Mehta, M. L. (2004). *Random Matrices.* Tercera Edición. Academic Press, San Diego.

[37] Mezzadri, F. & N. C. Snaith (2005). *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory.* London Mathematical Society Lecture Notes Series **322,** Cambridge University Press, Cambridge.

[38] Nica, A. & R. Speicher (1998). Commutators of free random variables. *Duke Mathematical Journal* **92** 553-592.

[39] Nica, A. & R. Speicher (2006). *Lectures on the Combinatorics of Free Probability.* London Mathematical Society Lecture Notes Series **335,** Cambridge University Press, Cambridge

[40] Pérez-Abreu, V. (2006). A Random matrix model for the Gaussian distribution. *Periodica Mathematica Hungarica* **52,** 47-65.

[41] Reed, M. & B. Simon (1975). Fourier Analysis and Self-Adjointness **Vol 2.** *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 145-205.

[42] Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge University Press, Cambridge.

[43] Speicher, R. (1992). Multiplicative functions on the lattice of noncrossing partitions and free convolution, *Mathematische Annalen* **298**, 611–628.

[44] Speicher, R. (1997). Free probability theory and non-crossing partitions. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* **39** B39c (electronic).

[45] Speicher, R. & R. Woroudi (1997). Boolean convolution, *Fields Institute Communications*, **12** D. Voiculescu, (ed). American Mathematical Society, pp. 267-279

[46] Speicher, R. & N. Raj Rao (2007). Multiplication of free random variables and the S-transform: The case of vanishing mean. *Electronic Communications in Probability* **12,** 248-258.

[47] Steutel, F. W. & K. Van Harn (2003). *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line.* Marcel-Dekker, New York.

[48] Teschl, G. (2000). *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices.* Mathematical Surveys and Monographs **72,** American Mathematical Society, Providence.

[49] Uribe, G. F. (2002). *La Ley Arcoseno en Caminatas Aleatorias, Movimiento Browniano y en el Proceso Poisson Compuesto.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, UNAM, México.

[50] Vázquez, A. (2006). *Teoría Espectral de Operadores de Jacobi.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, México.

[51] Voiculescu, D. (1985) Symmetries of some reduced free product C^*-álgebras. In: *Operator Algebras and their Connections with Topology in Ergodic Theory. Lecture Notes in Mathematics* **1132**, Springer Verlag pp 556-588.

[52] Voiculescu, D. (1986). Addition of certain non-commuting random variables. *Journal of Functional Analysis* **66**, 323-346.

[53] Voiculescu, D. (1987). Multiplication of certain non-commuting random variables. *Journal of Operator Theory* **18**, 223-235

[54] Voiculescu, D (1991). Limit Laws for random matrices and free products. *Inventiones Mathematica* **104**, 201-220.

[55] Wigner, E. (1955). Characteristic vectors of bordered random matrices with infinite dimensions. *Annals of Mathematics* **62**, 548-564.