Sea M variedad y $P \subseteq M$ subvariedad. En este caso se tiene una inclusión:

$$\varphi : P \longrightarrow M.$$

Sea N otra variedad.

*) Si $\psi : M \longrightarrow N$ suave entonces:

$$\psi|_P = \psi \circ \varphi : P \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} N$$

es suave. Además $\forall p_0 \in P$:

$$d(\psi|_P)_{p_0} = d\psi_{p_0}|_{T_{p_0}P}.$$

Corolario: Si $P \subseteq M$ es subvariedad, $\varphi : N \longrightarrow M$ es suave y $\varphi(N) \subseteq P$, entonces el mapeo $\tilde{\varphi} : N \longrightarrow P$ inducido es suave.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"'] & M \\ & P \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dem.: Sea $q \in N$, $\varphi(q) \in P \subseteq M$ y sean $(x^1, \dots, x^n)$ coordenadas de M en U, $\varphi(q) \in U$, adaptadas a P. Es decir, $x^1|_P, \dots, x^m|_P$ $(m = \dim P)$ son coordenadas de P en $U \cap P$.

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rd, "\tilde{\varphi}"'] & M \supseteq \overset{\varphi(p)}{U} \arrow[r] & \mathbb{R}^n & (u,0) \\
& P \supseteq U \cap P \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r] & \mathbb{R}^m \arrow[u] & u \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

$\varphi : N \to M$ C^∞ en q

$\iff$ $x^1 \circ \varphi, \dots, x^n \circ \varphi$ C^∞ en q

$\implies$ $x^1 \circ \varphi, \dots, x^m \circ \varphi$ C^∞ en q

$\iff$ $x^1|_P \circ \varphi, \dots, x^m|_P \circ \varphi$ C^∞ en q

$\iff$ $\tilde{\varphi} : N \to P$ es C^∞ en q. //

Corolario: Sea M variedad y $P \subseteq M$ subconjunto. Entonces existe a lo más una estructura de variedad en P tal que $P \hookrightarrow M$ es subvariedad.

Dem.: Denotemos con P_1, P_2 al conjunto P dotado de dos estructuras de variedad tal que

$$P_1 \hookrightarrow M \quad , \quad P_2 \hookrightarrow M$$

son subvariedades. Tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, "id_P"'] & M \\ & P_2 \arrow[u, hook, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

$i_1 = i_2 = i : P \longrightarrow M$ como mapeos de conjuntos.

Por el corolario anterior

$$id_P : P_1 \longrightarrow P_2$$

es suave y similarmente $id_P : P_2 \longrightarrow P_1$ es también suave.

$\therefore \quad id_P : P_1 \longrightarrow P_2$ es difeomorfismo. //

Proposición: Sea M variedad y $P \subseteq M$ subconjunto.
Entonces, P admite una estructura de variedad tal que $j: P \hookrightarrow M$ es subvariedad si y sólo si: (m fijo)

$*$) $\forall p \in P$ $\exists$ una carta de M en U, $p \in U$, adaptada a P tal que $U \cap P$ es una m-rebanada.

Dem.: $\Rightarrow$)) se probó antes.

$\Leftarrow$): Suponemos que se cumple $*$). Dotamos a P de la topología heredada.
¿cartas, atlas?
$\forall p \in P$ sea $(\xi = (x^1, \dots, x^n), U)$ carta de M adaptada a P y con $\xi(p) = 0$. En particular:

$$\xi(U \cap P) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ es abierto.}$$

Sea $(\xi_P = (x^1|_P, \dots, x^m|_P), U \cap P)$, el cual define un homeomorfismo:

$$\xi_P : U \cap P \longrightarrow \xi(U \cap P) \subseteq \mathbb{R}^m$$

En particular, $(\xi_P, U \cap P)$ son cartas. Sea (η, V) otra carta adaptada:

$$\eta(V \cap P) \text{ abierto en } \mathbb{R}^m$$

y $(\eta_P, V \cap P)$ la correspondiente carta de P. Resta checar la compatibilidad entre $(\xi_P, U \cap P)$ y $(\eta_P, V \cap P)$. Pero esto se sigue de:

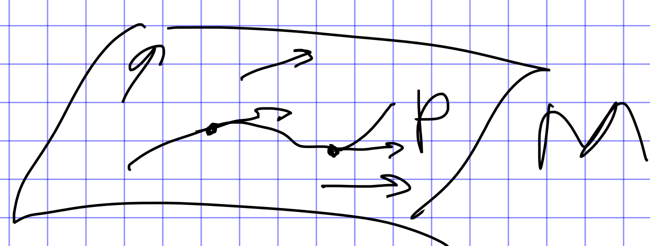
$$u^j \circ \xi_P \circ \eta_P^{-1} = u^j \circ (\xi \circ \eta^{-1})\Big|_{\underbrace{\eta(V \cap P)}_{\text{en } \mathbb{R}^m}} \qquad j = 1, \dots, m$$

son suaves. //

Sea $P \subseteq M$ subvariedad. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface:

$$X_p \in T_pP \quad \forall p \in P$$

entonces decimos que X es tangente a P.



Denotamos con $X|_P$ al campo vectorial en P que se induce.

Proposición:
Sea $P \subset M$ subvariedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a P.
Entonces:

(1) $X|_P \in \mathfrak{X}(P)$.

(2) Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a P, entonces:

$$[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$$

en particular $[X, Y]$ es tangente a P.

Dem.: Para checar que $X|_P \in \mathfrak{X}(P)$ usar coordenadas adaptadas:

$$X|_P = \sum_{j=1}^{m} X(x^j)|_P \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_P$$

$(x^1, \ldots, x^m, \ldots, x^n)$ son las coordenadas.

Para (2) observamos que si $j: P \hookrightarrow M$ es la inclusión entonces:

$$X|_p \underset{j}{\sim} X, \quad Y|_p \underset{j}{\sim} Y$$

y por un lema:

$$[X|_p, Y|_p] \underset{j}{\sim} [X, Y]$$

$$\therefore \quad dj_{p_0}([X|_p, Y|_p]) = [X, Y]_{p_0}$$

$$\|$$

$$[X|_p, Y|_p]_{p_0}$$

//

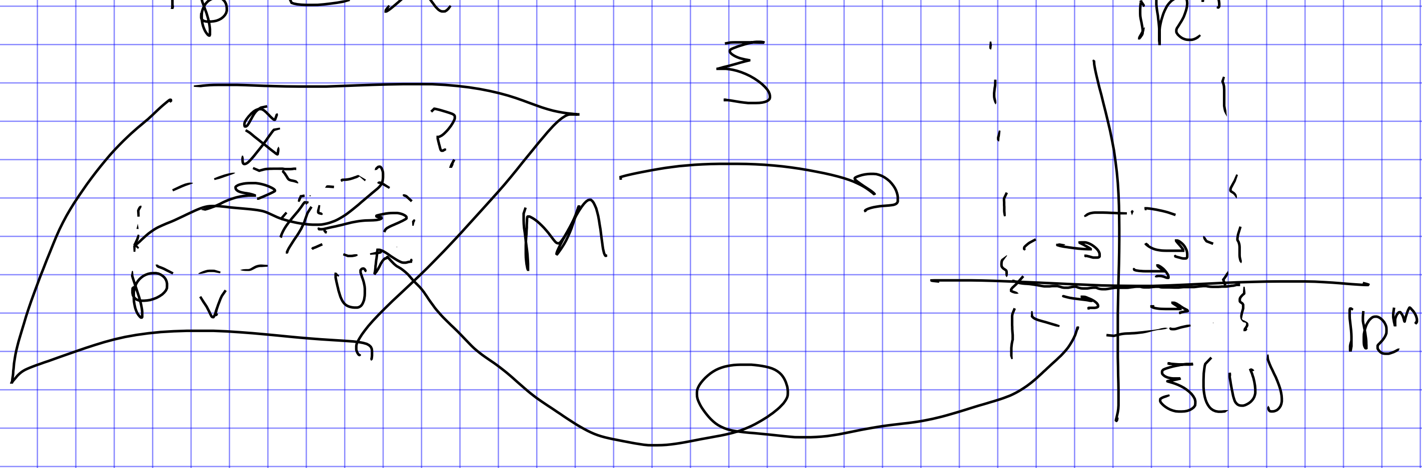
Observación:

$P \subseteq M$,

Si $\hat{X} \in \mathfrak{X}(P)$, entonces

$\exists\, X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente a P

$\ni X|_p = \hat{X}$



y se usan particiones de la unidad.

Inmersiones y submersiones.

Inmersiones ✓

Definición:
Sea $\varphi: M \longrightarrow N$ suave.

*) φ se dice submersión local si $d\varphi_p: T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ es sobre $\forall p \in M$.

*) φ se dice submersión si $d\varphi_p$ es sobre $\forall p \in M$ y φ es sobre.

Proposición:
Sea $\varphi: M^m \longrightarrow N^n$ suave.
Entonces, son equivalentes:

(1) φ es submersión local.

(2) $\forall p \in M$ $\exists$ cartas (ξ, U) de M, $p \in U$, (η, V) de N, $\varphi(p) \in V$ tales que $\xi(p) = 0$, $\eta(\varphi(p)) = 0$ y el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \supseteq U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\xi"'] & V \subseteq N \arrow[d, "\eta"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r] & \mathbb{R}^n \\ (x^1, \ldots, x^m) \arrow[r, mapsto] & (x^1, \ldots, x^n) \end{tikzcd}$$

$m \geq n.$