$\varphi: M \longrightarrow N$ suave:

*) φ inmersión $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & (u, 0) \end{array}$$

*) φ submersión local $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (u_1, \ldots, u^m) & \longmapsto & (u^1, \ldots, u^n) \end{array}$$

De hecho, las demostraciones prueban que basta tener $d\varphi_{p_0}$ 1-1 o sobre, respectivamente para tener las equivalencias en una vecindad de p_0.

Definición: $\varphi: M \longrightarrow N$ C^∞
Se dice que $q \in N$ es valor regular si $d\varphi_p$ es sobre $\forall p \in \varphi^{-1}(q)$

Por convención (o por vacuidad) todo elemento de $N \setminus \varphi(M)$ es valor regular.

Corolario: Si $\varphi : M \to N$ es suave y $q \in \varphi(M)$ es valor regular, entonces $\varphi^{-1}(q)$ es subvariedad de M que satisface:

1) $\dim \varphi^{-1}(q) = \dim M - \dim N$

2) $T_p \varphi^{-1}(q) = \operatorname{Ker}(d\varphi_p) \quad \forall p \in \varphi^{-1}(q)$

Dem.: Se usa el criterio de ser subvariedad usando rebanadas y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq U & \xrightarrow{\varphi} & V \subseteq N \\ \xi \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m \supseteq \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n \\ (u^1, \dots, u^m) & \longmapsto & (u^1, \dots, u^n) \end{array}$$

$p_0 \in \varphi^{-1}(q)$

$p_0 \in U$

$q = \varphi(p_0) \in V$

$$\therefore \quad U \cap \varphi^{-1}(q) \xleftrightarrow{\xi} \tilde{U} \cap \tilde{\varphi}^{-1}(0)$$
$$= \tilde{U} \cap \mathbb{R}^{m-n}$$

$\therefore$ $U \cap \varphi^{-1}(q)$ es rebanada.

De aquí se concluye también 1).

Además:

$$T_{p_0}\varphi^{-1}(q) \xleftrightarrow{d\xi_{p_0}} T_0\tilde{\varphi}^{-1}(0)$$

$$\shortparallel$$

$$\operatorname{Ker}(d\tilde{\varphi}_0)$$

$$\therefore \quad T_{p_0}\varphi^{-1}(q) = d\xi_{p_0}^{-1}(\operatorname{Ker}(d\tilde{\varphi}_0))$$

$$= \operatorname{Ker}(d\varphi_{p_0})$$

Ejemplos:

1) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

$$= \varphi^{-1}(1)$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2$$

$$\therefore \quad d\varphi_p = (2p_1, \ldots, 2p_{n+1}) = 2p$$

$$d\varphi_p(v) = 2p \cdot v \quad v \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vemos que $d\varphi_p$ es sobre
$\iff d\varphi_p \neq 0 \iff p \neq 0.$

$\therefore$ $r \in \mathbb{R}$ es valor regular de φ $\iff 0 \notin \varphi^{-1}(r)$

$$\iff \varphi(0) \neq r$$

$$\iff r \neq 0.$$

$\therefore$ 1 es valor regular de φ
$\implies S^n$ es subvariedad
y también:

$$T_p S^n = \operatorname{Ker}(d\varphi_p) = (\mathbb{R}p)^{\perp}$$

2) El conjunto:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{h} (x^j)^2 - \sum_{j=h+1}^{n+1} (x^j)^2 = \varepsilon \right\}$$

$\varepsilon = \pm 1$, es subvariedad
$(1 < h < n+1)$

3) $O(n) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n \}$
es subvariedad de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Consideramos:

$$\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym_{n\times n}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto AA^T$$

$\therefore \quad O(n) = \varphi^{-1}(I_n)$.

¿I_n es valor regular?

$$d\varphi_A : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Sym_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Afirmación:

$$d\varphi_A(B) = AB^T + BA^T$$

Dem.:

Se usa que si:

$$F(A) = F_1(A)\,F_2(A)$$

Funciones a valores matriciales, entonces:

$$dF_A(B) = F_1(A)\,d(F_2)_A(B) + d(F_1)_A(B)\,F_2(A)$$

la cual se prueba como en cálculo 1, o usando:

$$F(A)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} (F_1(A))_{ji}\,(F_2(A))_{ik} \quad //$$

Checamos que:

$$d\varphi_A : M_{n\times n} \longrightarrow Sym_{n\times n}$$

es sobre. Sea $C \in Sym_{n\times n}$

Hallar $B \ni$:

$$AB^T + BA^T = C$$

i.e.:

$$\underbrace{AB^T} + (AB^T)^T = \underbrace{\frac{1}{2}C} + \frac{1}{2}C^T$$

solución: B tal que:

$$AB^T = \frac{1}{2}C^T$$

$$BA^T = \frac{1}{2}C^T$$

$$B = \frac{1}{2}C^T(A^T)^{-1} = \frac{1}{2}C^T A$$

$\therefore$ $d\varphi_A$ es sobre.

$\therefore$ $O(n)$ es subvariedad.

Además, (su álgebra de Lie):

$$T_{I_n}O(n) = Ker(d\varphi_{I_n})$$

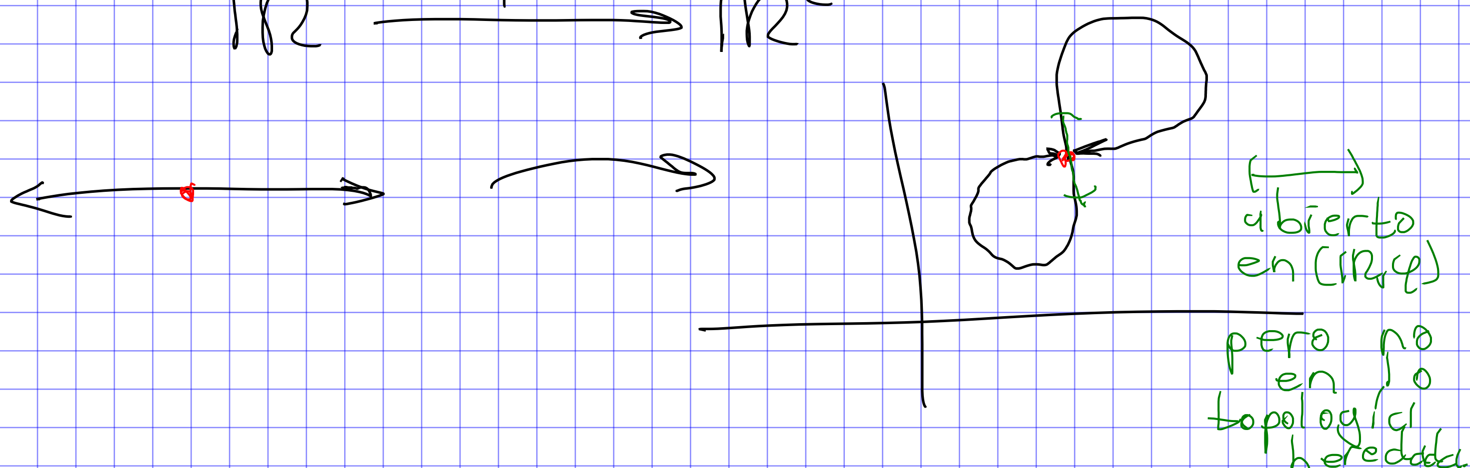
$$= \{B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}.$$

Definición: Una subvariedad inmersa de una variedad M es un par (P, φ) donde P es variedad y $\varphi : P \to M$ es inmersion inyectiva.

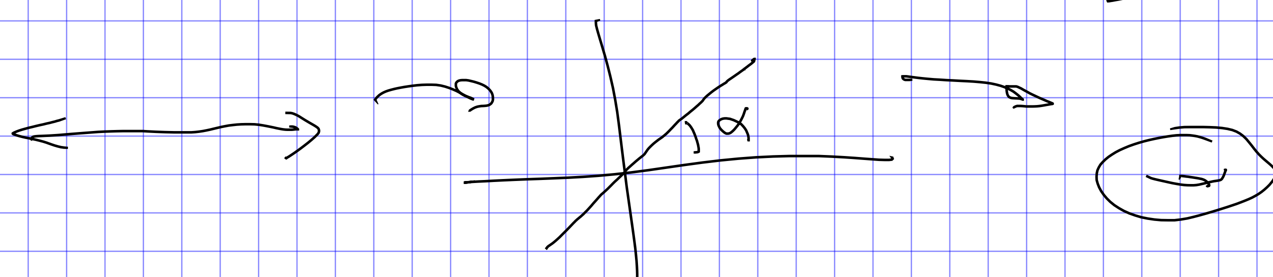
(i.e. $d\varphi_p$ es 1-1 $\forall p \in P$ y φ es 1-1)

Ejemplo:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$$



$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$



α irracional

O'Neill — Warner

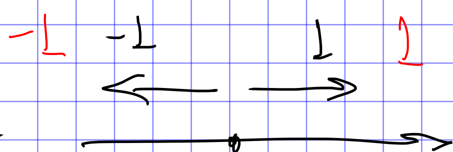
Guillemin-Pollack — (Teoría de Lie)

submanifold $\longleftrightarrow$ embedded submanifold

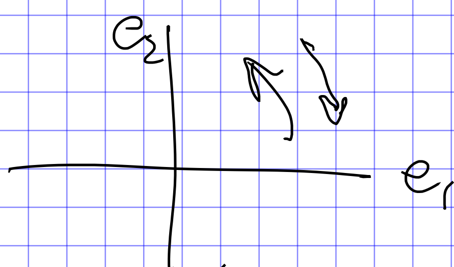
immersed submanifold $\longleftrightarrow$ submanifold.

Orientaciones en $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}$



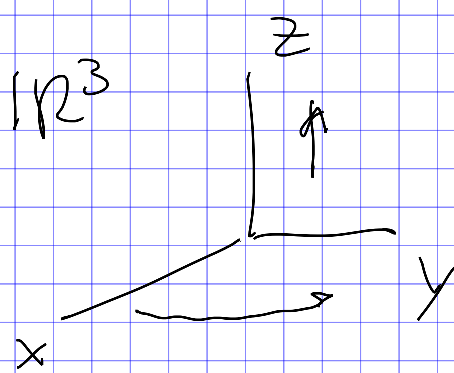
$\mathbb{R}^2$



(e_1, e_2) ó (e_2, e_1)

1 — -1

$\mathbb{R}^3$



(e_1, e_2, e_3) 1

$(e_1, e_2, -e_3)$ -1

det = ?

Una base en $\mathbb{R}^n$ ordenada $(v_1, \dots, v_n)$ se dice:

positiva si $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$

negativa si $\det(v_1, \dots, v_n) < 0$

Si $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es isomorfismo, entonces:

A mapea $+$ en $+$

$\iff \det(A) > 0$

A mapea $+$ en $-$

$\iff \det(A) < 0$.